

## ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВНУТРИ ВОЛНОВОДА С АБСОЛЮТНО ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

С.И. Харитонов<sup>1,2</sup>, С.Г. Волотовский<sup>1,2</sup>, С.Н. Хонина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,

443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В работе получены явные выражения импульса и момента импульса из теоремы Нётер (*ab initio*), содержащие квадраты модулей коэффициентов разложения по модам волновода, взвешенные на присутствующие порядки вихревой сингулярности.

Полученные выражения полезны для квантования электромагнитного поля в волноводе.

**Ключевые слова:** момент импульса, теорема Нётер, уравнение Лагранжа–Эйлера, вектор Умова–Пойнтинга, моды цилиндрического металлического волновода.

**Цитирование:** Харитонов, С.И. Вычисление момента импульса электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 588-605. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.

### Введение

Законы сохранения и динамические инварианты играют большую роль для описания движения любой динамической системы. Основные принципы получения динамических инвариантов для произвольной динамической системы с известным лагранжианом рассмотрены в работе [1]. В представленной работе рассмотрено получение динамических инвариантов для электромагнитного поля. Существует два подхода к получению динамических инвариантов для электромагнитного поля. Первый подход основан на использовании уравнений движения электромагнитного поля или системы уравнений Максвелла. Этот подход изложен в любом учебнике по классической электродинамике, например [2–4]. В рамках данного подхода можно легко получить закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Однако, кроме энергии, для электромагнитного поля существует ряд других инвариантов: импульс, момент импульса [5]. В работе [6] описана алгебра операторов симметрии уравнения Шредингера, а в работах [7, 8], пользуясь связью уравнения Шредингера с уравнением параксиального распространения светового поля, рассмотрена оптическая интерпретация операторов-инвариантов.

Нетрудно показать, что та или иная величина для электромагнитного поля является сохраняющейся, если известно аналитическое выражение [9], но нахождение выражения для этой величины – непростая задача. Метод получения динамических инвариантов даёт известная теоретикам теорема Нётер [1]. Следует отметить, что применение теоремы Нётер для вычисления динамических инвариантов электромагнитного поля приводит к выражениям для вектора энергии импульса, которые отличаются от выражения компонент вектора Умова–Пойнтинга, полученного из уравнений Максвелла в работах [2–4], посвящённых классической электродинамике. Аналогичная проблема возникает при вычислении компонент момента импульса электромагнитного поля. При вычислении компонент момента импульса возникает также про-

блема соответствия выражений динамических инвариантов выражениям, полученным в классической механике для системы материальных точек.

В данной работе приведено получение динамических инвариантов из теоремы Нётер для электромагнитного поля, которые стыкуются с выражениями, полученными в рамках классической электродинамики, и имеют структуру, аналогичную соответствующим выражениям, полученным в рамках классической механики.

Уравнения движения частиц в электромагнитном поле и выражения для динамических инвариантов содержат не только напряжённости электрического и магнитного поля, но и компоненты магнитного потенциала [10]. В данной работе приведена связь выражения для компонент магнитного потенциала с выражениями для комплексных амплитуд электрического и магнитного полей.

### 1. Вывод уравнения Лагранжа–Эйлера для электромагнитного поля

В приложении А рассмотрен вывод уравнения Лагранжа–Эйлера – простейший случай для движения материальной точки вдоль прямой.

В случае, когда несколько частиц движутся в трёхмерном пространстве, получается система уравнений по каждой переменной:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right] = 0, \quad i = 1, N. \quad (1)$$

По аналогии можно рассмотреть уравнения движения физических полей.

#### 1.1. Уравнение Лагранжа–Эйлера в многомерном случае для физических полей

Пусть функция Лагранжа имеет вид:

$$L(A_i(\mathbf{x}), A_{i,k}(\mathbf{x})), \quad i = 1, N; \quad (2)$$

$$k = 1, M, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^M).$$

Запишем действие в виде:

$$S[A_i(\mathbf{x})] = \int_{\Omega} L(A_i(\mathbf{x}), A_{i,k}(\mathbf{x})) d^M \mathbf{x}. \tag{3}$$

Условие экстремальности действия приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial L(A_i(\mathbf{x}), A_{i,k}(\mathbf{x}))}{\partial A_i} - \sum_{k=1}^M \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \frac{\partial L(A_i(\mathbf{x}), A_{i,k}(\mathbf{x}))}{\partial A_{i,k}} \right] = 0, \quad i = 1, N. \tag{4}$$

1.2. Вывод уравнения Лагранжа–Эйлера для электромагнитного поля

В случае электромагнитного поля Лагранжиан имеет вид:

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^3 \frac{\partial A_m}{\partial x^n} \frac{\partial A^m}{\partial x_n}. \tag{5}$$

Для дальнейших вычислений запишем этот Лагранжиан в виде, который содержит только один тип компонент:

$$A^m = g^{mk} A_k, \tag{6}$$

$$x_n = g_{np} x^p,$$

$$x^q = g^{qs} x_s.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^m}{\partial x_n} &= \sum_{q=0}^3 \frac{\partial A^m}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial x_n} = \\ &= \sum_{q=0}^3 \sum_{k,s=0}^3 \frac{\partial (g^{mk} A_k)}{\partial x^q} \frac{\partial (g^{qs} x_s)}{\partial x_n} = \\ &= \sum_{q=0}^3 \sum_{k,s=0}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \frac{\partial x_s}{\partial x_n} g^{mk} g^{qs} = \\ &= \sum_{q=0}^3 \sum_{k,s=0}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \delta_s^n g^{mk} g^{qs} = \sum_{q=0}^3 \sum_{k=0}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x^q} g^{mk} g^{qn}, \end{aligned} \tag{7}$$

где метрический тензор

$$g_{nm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

определён для 4-мерного расстояния в пространстве Минковского:

$$dS^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{9}$$

С учётом соотношений (6)–(8) получаем

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \sum_{n,m,q,k=0}^3 g^{qn} g^{mk} \left( \frac{\partial A_m}{\partial x^n} \right) \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m,q,k=0}^3 g^{qq} g^{mk} \left( \frac{\partial A_m}{\partial x^q} \right) \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{q,k=0}^3 g^{qq} g^{kk} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \right) \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{q,k=0}^3 g^{qq} g^{kk} \left( \frac{\partial A_k}{\partial x^q} \right)^2. \end{aligned} \tag{10}$$

После преобразований получаем:

$$\begin{aligned} L &= (A_{0;0})^2 - (A_{1;0})^2 - (A_{2;0})^2 - (A_{3;0})^2 - \\ &- (A_{0;1})^2 + (A_{1;1})^2 + (A_{2;1})^2 + (A_{3;1})^2 - \\ &- (A_{0;2})^2 + (A_{1;2})^2 + (A_{2;2})^2 + (A_{3;2})^2 - \\ &- (A_{0;3})^2 + (A_{1;3})^2 + (A_{2;3})^2 + (A_{3;3})^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение Лагранжа–Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial L(A_m(\mathbf{x}), A_{m;n}(\mathbf{x}))}{\partial A_m} - \sum_{n=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^n} \left[ \frac{\partial L(A_m(\mathbf{x}), A_{m;n}(\mathbf{x}))}{\partial A_{m;n}} \right] = 0, \quad m = 0, 3, \tag{12}$$

или в более конкретном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_m} - \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_{m;0}} \right] - \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_{m;1}} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_{m;2}} \right] - \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \frac{\partial L}{\partial A_{m;3}} \right] = 0, \quad m = 0, 3. \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим в (13) отдельно  $m=0$  и, используя (11), получим волновое уравнение для 0-й компоненты:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \frac{\partial A_0}{\partial x^0} \right] + \frac{\partial}{\partial x^1} \left[ \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial A_0}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x^3} \left[ \frac{\partial A_0}{\partial x^3} \right] = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Для  $m = 1, 2, 3$  в (13) с использованием (11) получим волновое уравнение для остальных компонент:

$$\frac{\partial A_{m;0}}{\partial x^0} - \frac{\partial A_{m;1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{m;2}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{m;3}}{\partial x^3} = 0. \tag{15}$$

1.3. Связь решений уравнений для потенциала с решениями уравнений Максвелла

В дальнейшем некоторые динамические инварианты будут записываться с использованием вектора потенциала. Для квантования электромагнитного поля также будем использовать векторный потенциал.

Уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0. \tag{16}$$

Для векторного потенциала выполняется калибровочное условие

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Электрическое и магнитное поле связано с векторным потенциалом следующими уравнениями

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \\ B &= \text{rot}(A). \end{aligned} \tag{18}$$

Перейдем от самих потенциалов к комплексным амплитудам:

$$A(x, y, z, t) = \int_0^\infty \left\{ A^-(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) + A^+(x, y, z, \omega) \exp(i\omega t) \right\} d\omega. \quad (19)$$

Функции  $A^-(x, y, z, \omega)$  и  $A^+(x, y, z, \omega)$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 A^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A^\pm}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^\pm}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A^\pm = 0. \quad (20)$$

Электрическое и магнитное поле выражаются следующим образом

$$E(x, y, z, t) = \int_0^\infty \left\{ A^-(x, y, z, \omega) \left( \frac{i\omega}{c} \right) \exp(-i\omega t) + A^+(x, y, z, \omega) \left( \frac{i\omega}{c} \right) \exp(i\omega t) \right\} d\omega, \quad (21)$$

$$B(x, y, z, t) = \int_0^\infty \left\{ \text{rot} (A^-(x, y, z, \omega)) \left( \frac{i\omega}{c} \right) \exp(-i\omega t) + \text{rot} (A^+(x, y, z, \omega)) \left( \frac{i\omega}{c} \right) \exp(i\omega t) \right\} d\omega.$$

Введём в рассмотрение

$$E^-(x, y, z, \omega) = \left( \frac{i\omega}{c} \right) A^-(x, y, z, \omega), \quad (22)$$

$$B^-(x, y, z, \omega) = \frac{1}{\mu} \text{rot} (A^-(x, y, z, \omega)).$$

Покажем, если  $E^-(x, y, z, \omega)$  и  $B^-(x, y, z, \omega)$  удовлетворяют

$$\text{rot} B^- = -\frac{i\omega \epsilon}{c} E^-, \quad (23)$$

$$\text{rot} E^- = \frac{i\omega \mu}{c} B^-.$$

то  $A^-(x, y, z, \omega)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца.

Действительно, из первого уравнения (23) следует:

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot} A^- = \frac{i\omega}{c} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \epsilon A^-(x, y, z, \omega), \quad (24)$$

$$\text{grad} (\text{div} A^-) - \nabla^2 A^- = -\frac{i\omega}{c} \left( \frac{i\omega}{c} \right) \epsilon \mu A^-(x, y, z, \omega). \quad (25)$$

Накладывая условие

$$\text{div} A^- = 0, \quad (26)$$

$$\nabla^2 A^- + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon \mu A^- = 0, \quad (27)$$

из второго уравнения получаем тождество

$$\text{rot} \left( \frac{i\omega}{c} \right) A^-(x, y, z, \omega) = \frac{i\omega}{c} \mu \left[ \frac{1}{\mu} \text{rot} (A^-(x, y, z, \omega)) \right]. \quad (28)$$

Следует также отметить, что

$$\text{rot} B^+ = \frac{i\omega}{c} E^+, \quad (29)$$

$$\text{rot} E^+ = -\frac{i\omega}{c} B^+,$$

где

$$E^+(x, y, z, \omega) = -\left( \frac{i\omega}{c} \right) A^+(x, y, z, \omega), \quad (30)$$

$$B^+(x, y, z, \omega) = \frac{1}{\mu} \text{rot} (A^+(x, y, z, \omega)).$$

Для того, чтобы векторный потенциал был действительной функцией, должно выполняться условие:

$$A^+(x, y, z, \omega) = [A^-(x, y, z, \omega)]^*. \quad (31)$$

Следует отметить, что система уравнений совпадает с уравнениями Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\text{rot} B^- = -\frac{i\omega}{c} \epsilon E^-, \quad (32)$$

$$\text{rot} E^- = \frac{i\omega \mu}{c} B^-.$$

Таким образом, для того чтобы получить выражение для комплексной амплитуды векторного потенциала, необходимо решить систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд и затем воспользоваться соотношением

$$A^-(x, y, z, \omega) = \left( \frac{c}{i\omega} \right) E^-(x, y, z, \omega). \quad (33)$$

Калибровочное условие

$$\text{div} (A^-(x, y, z, \omega)) = 0 \quad (34)$$

выполняется автоматически

$$\text{div} (A^-(x, y, z, \omega)) = \left( \frac{c}{i\omega} \right) \text{div} (E^-(x, y, z, \omega)) = \left( \frac{c}{i\omega} \right) \left( -\frac{i\omega}{c} \epsilon \right)^{-1} \text{div} (\text{rot} B^-(x, y, z, \omega)) = 0. \quad (35)$$

Используя (19), (31) и (33), запишем

$$A(x, y, z, t) = \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{c}{i\omega} \right) E^-(x, y, z, \omega) \exp(-i\omega t) - \left( \frac{c}{i\omega} \right) E^+(x, y, z, \omega) \exp(i\omega t) \right\} d\omega. \quad (36)$$

**2. Получение динамических инвариантов для электромагнитного поля**

**2.1. Теорема Нётер**

Пусть функция действия инварианта относительно преобразования координат и полей следующего вида:

$$y^k = x^k + \delta x^k, \tag{37}$$

$$\delta x^k = \sum_{1 < n < s} X_{(n)}^k \delta \omega^n, \tag{38}$$

где обозначение для индекса (n) означает «многоиндексность».

$$v_i(y) = u_i(x) + \delta u_i(x), \tag{39}$$

$$\delta u_i(x) = \sum_{1 < n < s} \Psi_{i(n)} \delta \omega^n. \tag{40}$$

Тогда величина

$$\theta_n^k(\mathbf{x}) = - \left[ \sum_{i=0}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial u_{i,k}} \left( \Psi_{i(n)} - \sum_{m=0}^3 u_{i,m} X_{(n)}^m \right) \right] - L(\mathbf{x}) X_n^k \tag{41}$$

удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^k} (\theta_n^k(\mathbf{x})) = \frac{\partial \theta_n^0(\mathbf{x})}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \theta_n^k(\mathbf{x})}{\partial x^k} = 0. \tag{42}$$

Из уравнения непрерывности (42) следует, что величина, пространственная плотность которой задаётся выражением:

$$I_{(n)}(\mathbf{x}) = \theta_n^0(\mathbf{x}) = - \sum_{i=0}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial u_{i,0}} \left( \Psi_{i(n)} - \sum_{m=0}^3 u_{i,m} X_{(n)}^m \right) - L(\mathbf{x}) X_n^0, \tag{43}$$

**сохраняется во времени.**

Это можно доказать следующим образом. Если проинтегрировать (42) по пространству, то получим:

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial \theta_n^0(\mathbf{x})}{\partial x^0} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \theta_n^k(\mathbf{x})}{\partial x^k} \right] dV &= \\ = \int_V \frac{\partial \theta_n^0(\mathbf{x})}{\partial x^0} dV + \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \theta_n^k(\mathbf{x})}{\partial x^k} dV &= \\ = \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \int_V \theta_n^0(\mathbf{x}) dV \right) + \int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \theta_n^k(\mathbf{x})}{\partial x^k} dV &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Применяя ко второму слагаемому теорему Остроградского–Гаусса, получим:

$$\int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \theta_n^k(\mathbf{x})}{\partial x^k} dx = \int_S \theta_n(\mathbf{x}) ds, \tag{45}$$

где

$$\theta_n(\mathbf{x}) = (\theta_n^1(\mathbf{x}), \theta_n^2(\mathbf{x}), \theta_n^3(\mathbf{x})).$$

При увеличении размера области интегрирования до бесконечности и учитывая, что на границе поверхности интегрирования  $\theta_n(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , получаем:

$$\int_V \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \theta_n^k(\mathbf{x})}{\partial x^k} dx = \int_S \theta_n(\mathbf{x}) ds = 0. \tag{46}$$

Тогда из (44) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left( \int_V \theta_n^0(\mathbf{x}) dV \right) = 0. \tag{47}$$

Таким образом,

$$\int_V \theta_n^0(\mathbf{x}) dV = \text{const} \tag{48}$$

не зависит от времени.

**2.2. Вычисление компонент тензора энергии-импульса электромагнитного поля**

В случае параллельного переноса преобразование координаты (38) имеет следующий вид:

$$X_{(n)}^k = \delta_n^k, \tag{49}$$

$\delta_n^k$  – дельта-символ Кронекера. Тогда

$$\delta x^k = \sum_{n=1}^s \delta_n^k \delta \omega^n = \delta \omega^k, \tag{50}$$

и вместо (37) получим:

$$y^k = x^k + \delta \omega^k. \tag{51}$$

Из теоремы Нётер вместо (41) получим:

$$\begin{aligned} \theta_n^k(\mathbf{x}) &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial A_{i,k}} \left[ \sum_{l=0}^3 A_{i,l} \delta_l^n \right] - L(\mathbf{x}) \delta_n^k = \theta_n^k(\mathbf{x}) = \\ &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial A_{i,k}} [A_{i,n}] - L(\mathbf{x}) \delta_n^k = \\ &= \sum_{i=0}^3 A_{i,n} \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial A_{i,k}} - L(\mathbf{x}) \delta_n^k. \end{aligned} \tag{52}$$

Для получения инвариантов рассмотрим Лагранжиан вида:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left\{ (A_{0,1} - A_{1,0})^2 + (A_{0,2} - A_{2,0})^2 + \right. \\ &+ (A_{0,3} - A_{3,0})^2 + (A_{2,3} - A_{3,2})^2 + (A_{1,3} - A_{3,1})^2 + \\ &\left. + (A_{2,1} - A_{1,2})^2 \right\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Лагранжиан (53) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left\{ (F_{10})^2 + (F_{20})^2 + (F_{30})^2 + \right. \\ &\left. + (F_{31})^2 + (F_{21})^2 + (F_{32})^2 \right\}, \end{aligned} \tag{54}$$

где тензор электромагнитного поля имеет вид:

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}. \tag{55}$$

Для лагранжиана (53) получим тензор энергии-импульса, используя выражение (52):

$$T_n^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial A_{i,k}} \frac{\partial A_i}{\partial x^n} - L(\mathbf{x}) \delta_n^k. \tag{56}$$

Нас будут интересовать только компоненты с нулевым верхним индексом, так как они являются инвариантами:

$$T_n^0(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial A_{i,0}} \frac{\partial A_i}{\partial x^n} - L(\mathbf{x}) \delta_n^0. \tag{57}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial L(\mathbf{x})}{\partial A_{i;0}} = (A_{i;0} - A_{0;i}) = F_{0i}, \quad (58)$$

в результате получаем выражение для пространственной плотности вектора энергии-импульса:

$$T_n^0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 F_{0i} A_{i;l}. \quad (59)$$

Нулевая компонента вектора (59) является **плотностью энергии**:

$$T_0^0(\mathbf{x}) = F_{01} A_{1;0} + F_{02} A_{2;0} + F_{03} A_{3;0}, \quad (60)$$

а остальные компоненты – **компоненты плотности импульса**:

$$T_l^0(\mathbf{x}) = P_l(\mathbf{x}) = F_{01} A_{1;l} + F_{02} A_{2;l} + F_{03} A_{3;l}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (61)$$

Для демонстрации связи плотности вектора импульса (61) с вектором Умова–Пойнтинга добавим к выражению (61) дивергенцию от некоторого тензора. Прибавление дивергенции некоторого тензора изменяет вид плотности импульса, но не изменяет величины импульса, так как интеграл от этой добавки по всему пространству равен нулю (плотность импульса сама по себе не имеет смысла, а имеет смысл только сам импульс).

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{T}_l^0 &= T_l^0 - D = \sum_{i=1}^3 F_{0i} \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (A_i F_{0i})}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i=1}^3 F_{0i} \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - A_i \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^3 F_{0i} \frac{\partial A_i}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i=1}^3 F_{0i} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^i} \right) - A_i \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (62)$$

Рассмотрим последний член:

Это же можно было доказать через дивергенцию электрического поля, которая равна нулю из уравнения Максвелла.

Более детально выражение (68) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^0 &= F_{01} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^1} \right) + F_{02} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) + F_{03} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \right) = F_{02} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) + F_{03} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \right), \\ \hat{T}_2^0 &= F_{01} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \right) + F_{02} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^2} \right) + F_{03} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) = F_{01} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \right) + F_{03} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right), \\ \hat{T}_3^0 &= F_{01} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) + F_{02} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} \right) + F_{03} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \right) = F_{01} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) + F_{02} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

С учётом связи компонент тензора с компонентами вектора потенциала и компонентами электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} F_{00} &= 0, \\ F_{01} &= E_x = A_{1;0} - A_{0;1}, \\ F_{02} &= E_y = A_{2;0} - A_{0;2}, \\ F_{03} &= E_z = A_{3;0} - A_{0;3}, \\ F_{21} &= H_z = A_{1;2} - A_{2;1}, \\ F_{13} &= H_y = A_{3;1} - A_{1;3}, \\ F_{32} &= H_x = A_{2;3} - A_{3;2} \end{aligned} \quad (70)$$

получаем следующее выражение для тензора:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (A_{i;0} - A_{0;i})}{\partial x^i} = \\ &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^1 \partial x^0} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2 \partial x^0} - \\ &- \frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^3 \partial x^0} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^3)^2} = \\ &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2 \partial x^0} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x^3 \partial x^0} - \Delta A_0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \right) - \Delta A_0. \end{aligned} \quad (63)$$

Используя волновое уравнение:

$$\Delta A_0 = \frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^0)^2}, \quad (64)$$

выражение (63) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^0)^2}. \quad (65)$$

Далее, учитывая калибровку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial A_0}{\partial x^0} - \frac{\partial A_1}{\partial x^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial A_3}{\partial x^3} &= 0, \end{aligned} \quad (66)$$

вместо (65) получим:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial A_0}{\partial x^0} \right) - \frac{\partial^2 A_0}{\partial (x^0)^2} = 0. \quad (67)$$

Таким образом,

$$\hat{T}_l^0 = T_l^0 - D = \sum_{i=1}^3 F_{0i} \left( \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^i} \right). \quad (68)$$

Компоненты тензора (71) соответствуют компонентам вектора Умова–Пойнтинга [2–4]:

$$\mathbf{S} = - \begin{pmatrix} E_y H_z - E_z H_y \\ E_z H_x - E_x H_z \\ E_x H_y - E_y H_x \end{pmatrix}. \quad (72)$$

2.3. Тензор момента импульса электромагнитного поля

Далее, используя теорему Нётер, получим выражение для **пространственной плотности момента импульса**:

$$M_{nm}^k(\mathbf{x}) = -\sum_{i=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} \left[ \Psi_{i, nm} - \sum_{p=0}^3 A_{i;p} X_{nm}^p \right] - L(\mathbf{x}) X_{nm}^k, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} M_{nm}^k(\mathbf{x}) &= -\sum_{i=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} \left[ \sum_{j=0}^3 K_{i, nm}^j A_j - \sum_{p=0}^3 A_{i;p} (x_n \delta_n^p - x_n \delta_m^p) \right] - L(\mathbf{x}) (x_n \delta_n^k - x_n \delta_m^k) = \\ &= -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} K_{i, nm}^j A_j - \sum_{p=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} A_{i;p} (x_n \delta_n^p - x_n \delta_m^p) \right) - L(\mathbf{x}) (x_n \delta_n^k - x_n \delta_m^k) = \\ &= -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} K_{i, nm}^j A_j - \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} A_{i;n} x_m + \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} A_{i;m} x_n \right) - L(\mathbf{x}) (x_n \delta_n^k - x_n \delta_m^k) = \\ &= M_{nm}^k(\mathbf{x}) = -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m \left[ \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} A_{i;n} \right) - L(\mathbf{x}) \delta_n^k \right] - x_n \left[ \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} A_{i;m} \right) - L(\mathbf{x}) \delta_m^k \right]. \end{aligned}$$

Выражение пространственной плотности тензора момента импульса можно переписать в виде:

$$M_{nm}^k(\mathbf{x}) = -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m T_n^k - x_n T_m^k, \quad (75)$$

где компоненты **тензора энергии-импульса и спинового момента** соответственно:

$$T_n^k = \left[ \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} A_{i;n} \right) - L(\mathbf{x}) \delta_n^k \right], \quad (76)$$

$$S_{nm}^k = -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;k}} K_{i, nm}^j A_j \right). \quad (77)$$

Рассмотрим (75) при  $k=0$ :

$$M_{nm}^0(\mathbf{x}) = -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m T_n^0 - x_n T_m^0. \quad (78)$$

Приведём выражение пространственной плотности тензора момента импульса к виду, который используется в классической механике. Для этого выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} M_{nm}^0(\mathbf{x}) &= -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} K_{i, nm}^j A_j \right) + \\ &+ x_m (T_n^0 - D_n + D_n) - x_n (T_m^0 - D_m + D_m) = \\ &= -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m (T_n^0 - D_n) + \\ &+ x_m D_n - x_n (T_m^0 - D_m) - x_n D_m = \\ &= -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m D_n - x_n D_m + \\ &+ x_m (T_n^0 - D_n) - x_n (T_m^0 - D_m), \end{aligned}$$

где  $X_{nm}^p = x_m \delta_n^p - x_n \delta_m^p$ ,

$$\Psi_{i, nm} = \sum_{j=0}^3 K_{i, nm}^j A_j = g_{in} A_m - g_{im} A_n, \quad (74)$$

$$K_{i, nm}^j = g_{in} \delta_m^j - g_{im} \delta_n^j.$$

Подставляя (74) в (73), получим выражение для пространственной плотности тензора момента импульса (или количества движения) в явном виде:

$$\begin{aligned} \text{где } D_l &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial (A_l F_{0i})}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^3 A_l \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^3 F_{0i} \frac{\partial A_l}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i=1}^3 F_{0i} \frac{\partial A_l}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} = (A_{i;0} - A_{0;i}) = F_{0i}. \end{aligned}$$

Представим в виде:

$$M_{nm}^0(\mathbf{x}) = \left\{ -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m D_n - x_n D_m \right\} + x_m \hat{T}_n^0 - x_n \hat{T}_m^0, \quad (79)$$

где  $\hat{T}_n^0 = (T_n^0 - D_n)$ . Покажем, что выражение в фигурных скобках равно нулю.

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{i;0}} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m D_n - x_n D_m = \\ &= -\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 F_{0i} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial A_n}{\partial x^i} - \\ &- x_n \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial A_m}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (80)$$

Подставим в (80)  $K_{i, nm}^j$  из (74), получим:

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 F_{0i} (g_{in} \delta_m^j - g_{im} \delta_n^j) A_j \right) + x_m \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial A_n}{\partial x^i} - \\ &- x_n \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} = -\sum_{i=0}^3 F_{0i} (g_{in} A_m - g_{im} A_n) + \\ &+ x_m \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial A_n}{\partial x^i} - x_n \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{i=0}^3 F_{0i} \left[ -(g_{in} A_m - g_{im} A_n) + x_m \frac{\partial A_n}{\partial x^i} - x_n \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Из выражения:

$$x_n = g_{np} x^p \tag{82}$$

следует, что

$$g_{ni} = g_{in} = \frac{\partial x_n}{\partial x^i} \tag{83}$$

Подставим (83) в (81), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 F_{0i} \left[ - \left( \frac{\partial x_n}{\partial x^i} A_m - \frac{\partial x_m}{\partial x^i} A_n \right) + x_m \frac{\partial A_n}{\partial x^i} - x_n \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right] = \\ & = \sum_{i=0}^3 F_{0i} \left[ - \frac{\partial (x_n A_m)}{\partial x^i} + \frac{\partial (x_m A_n)}{\partial x^i} \right] = \\ & = \sum_{i=0}^3 F_{0i} \frac{\partial}{\partial x^i} [-x_n A_m + x_m A_n]. \end{aligned} \tag{84}$$

К этому выражению можно прибавить равный нулю член:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} [-x_n A_m + x_m A_n] = \\ & = [-x_n A_m + x_m A_n] \sum_{i=0}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i}, \end{aligned} \tag{85}$$

который равен нулю, так как это дивергенция электрического поля

$$\sum_{i=0}^3 \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 \left\{ F_{0i} \frac{\partial}{\partial x^i} [-x_n A_m + x_m A_n] + \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^i} [-x_n A_m + x_m A_n] \right\} = \\ & = \sum_{i=0}^3 \left\{ \frac{\partial (F_{0i} [-x_n A_m + x_m A_n])}{\partial x^i} \right\}, \end{aligned} \tag{86}$$

это дивергенция некоторой величины, которая при интегрировании по объёму даст нуль.

Перепишем:

$$\begin{aligned} M_{nm}^0(\mathbf{x}) & = \\ & = \left\{ - \sum_{i=0}^3 \left( \sum_{j=0}^3 \frac{\partial L}{\partial A_{r_0}^j} K_{i, nm}^j A_j \right) + x_m D_n - x_n D_m \right\} + \\ & + x_m \hat{T}_n^0 - x_n \hat{T}_m^0 = \\ & = \sum_{i=0}^3 \left\{ \frac{\partial (F_{0i} [-x_n A_m + x_m A_n])}{\partial x^i} \right\} + \hat{M}_{nm}^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{87}$$

где  $\hat{M}_{nm}^0(\mathbf{x}) = x_m \hat{T}_n^0 - x_n \hat{T}_m^0$ .

Первую часть выражения (87) можно не учитывать, так как при интегрировании по объёму оно даст нуль.

В результате выражение для пространственной плотности момента импульса принимает следующий вид:

$$M_{nm}^0(\mathbf{x}) = x_m \hat{T}_n^0 - x_n \hat{T}_m^0 = \hat{M}_{nm}^0(\mathbf{x}). \tag{88}$$

В предыдущем подпараграфе компоненты тензора  $\hat{T}_n^0$  были вычислены и найдена их связь с вектором Умова–Пойнтинга.

Проекции пространственной плотности вектора момента импульса связаны с пространственной плотностью тензора момента импульса следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x & \sim \hat{M}_{23}^0(\mathbf{x}) = x_3 \hat{T}_2^0 - x_2 \hat{T}_3^0, \\ M_y & \sim \hat{M}_{13}^0(\mathbf{x}) = x_3 \hat{T}_1^0 - x_1 \hat{T}_3^0, \\ M_z & \sim \hat{M}_{12}^0(\mathbf{x}) = x_2 \hat{T}_1^0 - x_1 \hat{T}_2^0. \end{aligned} \tag{89}$$

Подставляя выражения для тензоров (71), учитывая  $x_1 = -x^1 = -x, x_2 = -x^2 = -y, x_3 = -x^3 = -z$ , а также

$$\mathbf{S} \sim \mathbf{E} \times \mathbf{H} = - \begin{pmatrix} E_y H_z - E_z H_y \\ E_z H_x - E_x H_z \\ E_x H_y - E_y H_x \end{pmatrix}, \tag{90}$$

запишем в явном виде:

$$\begin{aligned} M_z & \sim \hat{M}_{12}^0(\mathbf{x}) = -y(-E_y H_z + E_z H_y) + \\ & + x(E_x H_z - E_z H_x) = -yS_x + xS_y, \\ M_x & \sim \hat{M}_{23}^0(\mathbf{x}) = -z(E_x H_z - E_z H_x) + \\ & + y(-E_x H_y + E_y H_x) = -zS_y + yS_z, \\ M_y & \sim \hat{M}_{13}^0(\mathbf{x}) = -z(-E_y H_z + E_z H_y) + \\ & + x(-E_x H_y + E_y H_x) = -zS_x + xS_z. \end{aligned} \tag{91}$$

Окончательно получаем выражение для пространственной плотности момента импульса в классическом виде [2–4]:

$$\mathbf{M} \sim \mathbf{r} \times \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{92}$$

### 3. Представление электромагнитного поля по модам волновода с абсолютно проводящими стенками

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд электромагнитных полей в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) & = ik_0 \mu H_r, \\ \left( \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) & = ik_0 \mu H_\varphi, \end{aligned} \tag{93}$$

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = ik_0 \mu H_z,$$

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) = -ik_0 \varepsilon E_r,$$

$$\left( \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) = -ik_0 \varepsilon E_\varphi, \tag{94}$$

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = -ik_0 \varepsilon E_z.$$

Запишем решение в виде

$$E(r, \varphi, z) = E(r, \varphi) \exp(i\gamma z), \quad (95)$$

$$H(r, \varphi, z) = H(r, \varphi) \exp(i\gamma z). \quad (96)$$

Преобразуем системы (93) и (94):

$$k_0 \mu H_r + \gamma E_\varphi = -i \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi}, \quad (97)$$

$$\gamma H_r + k_0 \varepsilon E_\varphi = -i \frac{\partial H_z}{\partial r},$$

$$\gamma E_r - k_0 \mu H_\varphi = -i \frac{\partial E_z}{\partial r}, \quad (98)$$

$$k_0 \varepsilon E_r - \gamma H_\varphi = i \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi}.$$

Разрешая системы (97) и (98) относительно поперечных компонент, получаем их выражения через продольные компоненты (см. Приложение Б):

$$E_r = \frac{i \frac{\partial E_z}{\partial r} \gamma + i \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} k_0 \mu}{-\gamma^2 + k_0^2 \mu \varepsilon}, \quad E_\varphi = \frac{-i \frac{\partial H_z}{\partial r} k_0 \mu + i \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi} \gamma}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2}, \quad (99)$$

$$H_r = \frac{-i \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi} k_0 \varepsilon + i \frac{\partial H_z}{\partial r} \gamma}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2}, \quad H_\varphi = \frac{i \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} \gamma + i \frac{\partial E_z}{\partial r} k_0 \varepsilon}{-\gamma^2 + k_0^2 \mu \varepsilon}.$$

Продольные компоненты, в свою очередь, удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + (k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) E_z = 0, \quad (100)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + (k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) H_z = 0.$$

Представляя решения уравнений (100) в виде линейных комбинаций цилиндрических функций и экспонент, получим следующие выражения [11]:

$$\mathbf{E}(\rho, \theta, z) = \sum_{m,p} a^{mp} \mathbf{e}_{mp,1,1}(\rho) \exp\left(i\left(m\theta + \sqrt{k_0^2 \mu \varepsilon - \alpha_{mp}^2} z\right)\right) + \sum_{m,q} b^{mq} \mathbf{e}_{mp,1,2}(\rho) \exp\left(i\left(m\theta + \sqrt{k_0^2 \mu \varepsilon - \beta_{mq}^2} z\right)\right), \quad (101)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \theta, z) = \sum_{m,p} a^{mp} \mathbf{e}_{mp,2,1}(\rho) \exp\left(i\left(m\theta + \sqrt{k_0^2 \mu \varepsilon - \alpha_{mp}^2} z\right)\right) + \sum_{m,q} b^{mq} \mathbf{e}_{mq,2,2}(\rho) \exp\left(i\left(m\theta + \sqrt{k_0^2 \mu \varepsilon - \beta_{mq}^2} z\right)\right), \quad (102)$$

где

$$\mathbf{e}_{mp,1,1}(\rho) = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mp,TE}^2} \begin{pmatrix} -k_0 \mu \frac{m}{\rho} J_m(\alpha_{mp} \rho) \\ -k_0 \mu i \frac{\partial J_m(\alpha_{mp} \rho)}{\partial \rho} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (103)$$

$$\mathbf{e}_{mq,1,2}(\rho) = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mq,TM}^2} \begin{pmatrix} i \frac{\partial J_m(\beta_{mq} \rho)}{\partial \rho} \gamma_{mq,TM} \\ -\frac{m}{\rho} J_m(\beta_{mq} \rho) \gamma_{mq,TM} \\ \beta_{mq}^2 J_m(\beta_{mq} \rho) \end{pmatrix}, \quad (104)$$

$$\mathbf{e}_{mp,2,1}(\rho) = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mp,TE}^2} \begin{pmatrix} i \frac{\partial J_m(\alpha_{mp} \rho)}{\partial \rho} \gamma_{mp,TE} \\ -\frac{m}{\rho} J_m(\alpha_{mp} \rho) \gamma_{mp,TE} \\ \alpha_{mp}^2 J_m(\alpha_{mp} \rho) \end{pmatrix}, \quad (105)$$

$$\mathbf{e}_{mq,2,2}(\rho) = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mq,TM}^2} \begin{pmatrix} \frac{m}{\rho} J_m(\beta_{mq} \rho) k_0 \varepsilon \\ i \frac{\partial J_m(\beta_{mq} \rho)}{\partial \rho} k_0 \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (106)$$

$$k_0^2 \mu \varepsilon - \alpha_{mp}^2 = \gamma_{mp,TE}^2,$$

$$k_0^2 \mu \varepsilon - \beta_{mq}^2 = \gamma_{mq,TM}^2, \quad (107)$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda_0.$$

Параметры  $\alpha_{mp}$  и  $\beta_{mq}$  находятся из условия:

$$\frac{\partial J_m(\alpha_{mp} R)}{\partial r} = 0, \quad J_m(\beta_{mq} R) = 0. \quad (108)$$

Выражение (108) получено из условия равенства нулю тангенциальных компонент электрического поля на поверхности абсолютного проводника.

Таким образом, любое векторное поле

$$\mathbf{E}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} E_r(r, \varphi) \\ E_\varphi(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

в волноводе с абсолютно проводящими стенками может быть представлено разложением по модам волновода:

$$\mathbf{F}_{mp}^{TE}(r) = \begin{pmatrix} F_{mp,r}^{TE} \\ F_{mp,\varphi}^{TE} \end{pmatrix} = \frac{-k_0 \mu}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mp,TE}^2} \begin{pmatrix} \frac{m}{r} J_m(\alpha_{mp} r) \\ i \frac{\partial J_m(\alpha_{mp} \rho)}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \quad (109)$$

$$\mathbf{F}_{mq}^{TM}(r) = \begin{pmatrix} F_{mq,r}^{TM} \\ F_{mq,\varphi}^{TM} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_{mq,TM}}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mq,TM}^2} \begin{pmatrix} i \frac{\partial J_m(\beta_{mq} r)}{\partial r} \\ -\frac{m}{r} J_m(\beta_{mq} r) \end{pmatrix}.$$

С учётом ортогональности функций (109) коэффициенты разложения поля можно вычислить следующим образом:



$$a^{mp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{A_{mp}^{TE}}} \int_0^R \int_0^{2\pi} [F_{mp,r}^{TE*}(r)E_r(r,\varphi) + F_{mp,\varphi}^{TE*}(r)E_\varphi(r,\varphi)] \exp(-im\varphi) r dr d\varphi, \tag{110}$$

$$b^{mq} = \frac{1}{2\pi\sqrt{A_{mq}^{TM}}} \int_0^R \int_0^{2\pi} [F_{mq,r}^{TM*}(r)E_r(r,\varphi) + F_{mq,\varphi}^{TM*}(r)E_\varphi(r,\varphi)] \exp(-im\varphi) r dr d\varphi,$$

где  $A_{mp}^{TE} = \int_0^R [ |F_{mp,r}^{TE}(r)|^2 + |F_{mp,\varphi}^{TE}(r)|^2 ] r dr,$

$$A_{mq}^{TM} = \int_0^R [ |F_{mq,r}^{TM}(r)|^2 + |F_{mq,\varphi}^{TM}(r)|^2 ] r dr.$$

Используя коэффициенты (110), распространение поля в волноводе можно легко получить на основе выражений (101)–(106).

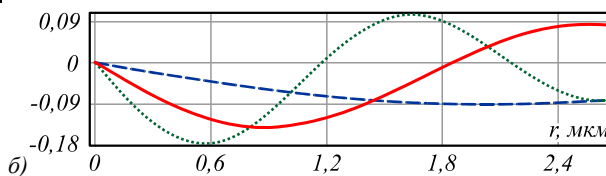
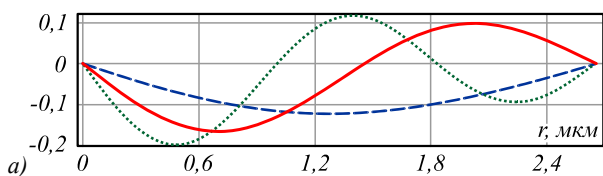


Рис. 1. Радиальные сечения некоторых мод волновода с абсолютно проводящими стенками при  $t=0$ : угловые компоненты ТЕ-мод (а) и радиальные компоненты ТМ-мод (б) ( $p, q=0$  – пунктирная линия,  $p, q=1$  – сплошная линия,  $p, q=2$  – точечная линия)

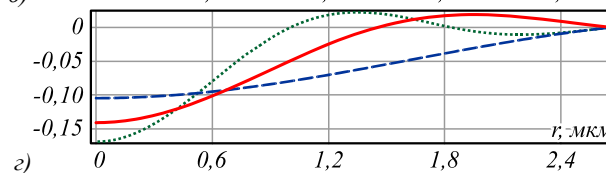
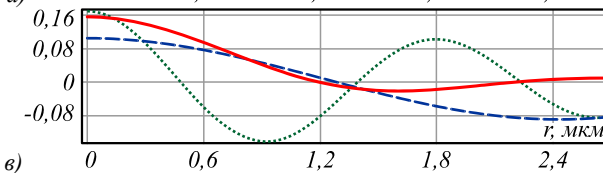
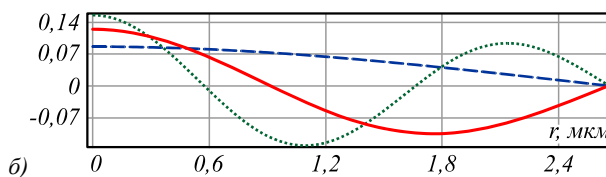
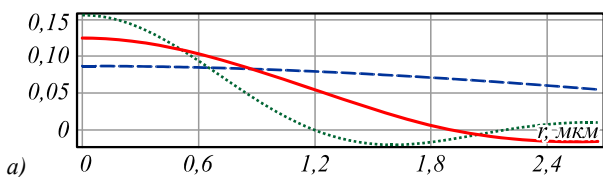


Рис. 2. Радиальные сечения некоторых мод волновода с абсолютно проводящими стенками при  $t=1$ : радиальные компоненты ТЕ-мод (а), угловые компоненты ТЕ-мод (б), радиальные компоненты ТМ-мод (в), угловые компоненты ТМ-мод (г) ( $p, q=0$  – пунктирная линия,  $p, q=1$  – сплошная линия,  $p, q=2$  – точечная линия)

Периодический характер интерференционного взаимодействия двух мод волновода хорошо виден на рис. 3г, д.

Если же подать на вход волновода произвольное поле, то распространяться будет только та часть поля, которая соответствует его аппроксимации на основе разложения (101)–(102), остальная часть отразится. На рис. 4а показано векторное входное поле, заданное в виде радиально-поляризованного Гауссова пучка:

$$\mathbf{E}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \frac{r}{R} \right) \exp\left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right), \tag{111}$$

где  $\sigma$  – радиус перетяжки пучка ( $\sigma=R/2$ ).

В результате разложения (110) входного поля по модам волновода была получена аппроксимация,

На рис. 1, 2 показаны радиальные сечения некоторых мод волновода с абсолютно проводящими стенками, рассчитанных по формулам (109) при следующих параметрах: длина волны лазерного излучения  $\lambda_0=0,532$  мкм, радиус волновода  $R=5\lambda_0$ ,  $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$ .

При  $m=0$  в волноводе формируются поперечные моды, а при  $m \neq 0$  – гибридные [12, 13].

Очевидно, моды волновода будут распространяться в волноводе без изменений только с соответствующим набегом фазы. Суперпозиция хотя бы из двух мод будет менять своё поперечное распределение при распространении, демонстрируя периодическое самовоспроизведение [13, 14].

На рис. 3 показано распространение суперпозиции двух ТЕ-мод с номерами  $(m, p)=(0, 2)+(1, 2)$ . Как видно из представленных результатов расчёта, поперечная картина интенсивности вращается при распространении (рис. 3а–в).

представленная на рис. 4б. Погрешность аппроксимации связана с конечным числом мод волновода. Как видно из результатов моделирования распространения такого поля в волноводе (рис. 5), оно также периодически самовоспроизводится.

#### 4. Расчёт импульса и момента импульса для электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками

Расчёту плотности энергии и вектора Умова–Пойнтинга посвящено множество работ [15], среди которых к рассматриваемой теме наиболее близки публикации, связанные с векторными модами Бесселя [16–19]. Особенно интересным типом электромагнитного поля являются лазерные вихревые пучки, которые обладают ненулевым значением полного момента импульса. Наличие ненулевого момента импульса в электромагнитном поле приводит к вращению захваченных

частиц [20–27]. Как правило, выражения момента импульса приводятся для случая скалярной теории дифракции [28–38]. Рассмотрим выражения для момента

импульса в рамках векторной теории дифракции для электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками.

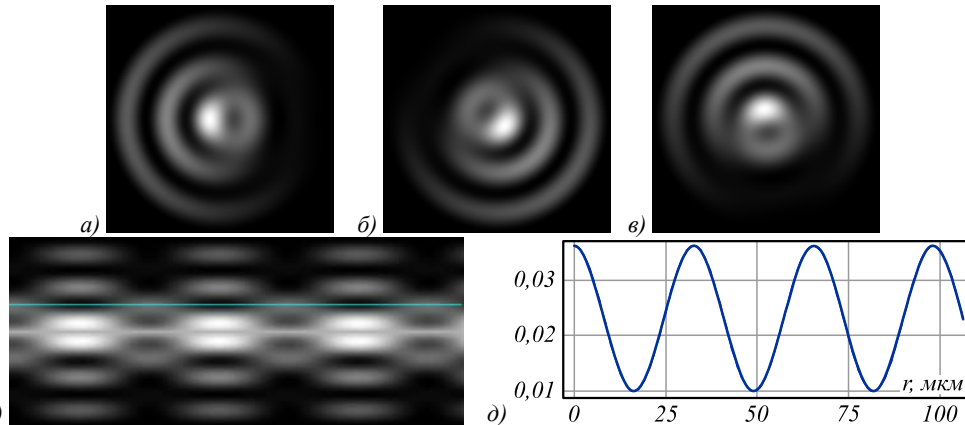


Рис. 3. Распространение суперпозиции двух ТЕ-мод с номерами (0,2)+(1,2): поперечное распределение интенсивности на входе (а) и на расстояниях  $z = 20$  мкм (б) и  $z = 40$  мкм (в), а также продольное распределение интенсивности (г) и его сечение (д)

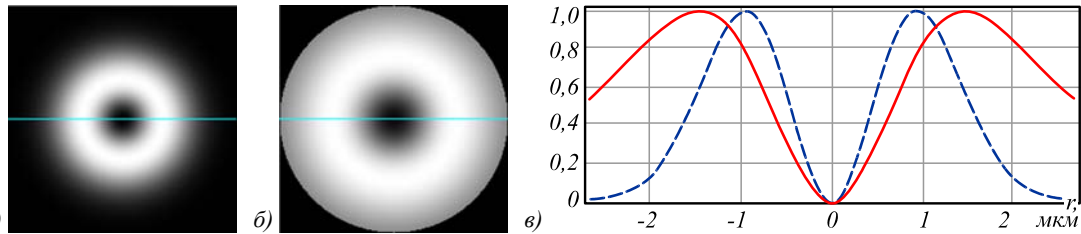


Рис. 4. Интенсивность векторного входного поля (а) и интенсивность его аппроксимации по модам волновода (б), а также их сечения (пунктир – для входного поля, сплошная – для аппроксимации) (в)

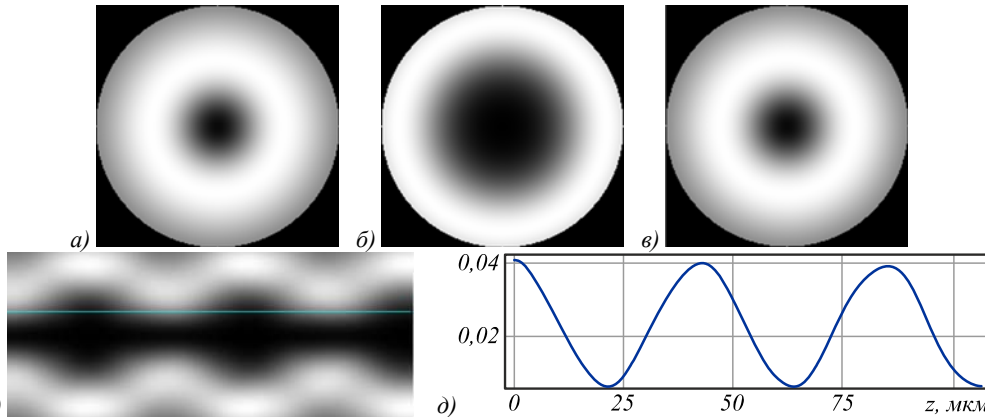


Рис. 5. Распространение аппроксимации входного поля (111): поперечное распределение интенсивности на входе (а) и на расстояниях  $z = 20$  мкм (б) и  $z = 40$  мкм (в), а также продольное распределение интенсивности (г) и его сечение (д)

Запишем выражение для момента импульса (91) в явном виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &\sim \mathbf{r} \times \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \\
 &= \mathbf{E}(\mathbf{rH}) - \mathbf{H}(\mathbf{rE}) = \\
 &= \mathbf{E}((r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z)\mathbf{H}) - \mathbf{H}((r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z)\mathbf{E}) = \\
 &= \mathbf{E}(rH_r + zH_z) - \mathbf{H}(rE_r + zE_z) = \\
 &= \begin{pmatrix} z(E_r H_z - H_r E_z) \\ E_\varphi(rH_r + zH_z) - H_\varphi(rE_r + zE_z) \\ r(E_z H_r - H_z E_r) \end{pmatrix}. \tag{112}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим среднее значение момента импульса поля, заключённого в волноводе длиной  $L$ :

$$M_V = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R M_z r dr d\varphi dz = \tag{113}$$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (E_z H_r - H_z E_r) r^2 dr d\varphi dz.$$

Выразим  $M_V$  через комплексные амплитуды:

$$\begin{aligned}
 E(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} (E(r, \varphi, z, \omega) \exp(-i\omega t) + \\
 &+ E^*(r, \varphi, z, \omega) \exp(i\omega t)), \tag{114}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(r, \varphi, z, t) &= \frac{1}{2} (H(r, \varphi, z, \omega) \exp(-i\omega t) + \\
 &+ H^*(r, \varphi, z, \omega) \exp(i\omega t)).
 \end{aligned}$$

С учётом (114) можно записать:

$$\begin{aligned} (E_z H_r - H_z E_r) = & \\ = \frac{1}{4} [ (E_z H_r \exp(-i2\omega t) + E_z^* H_r + & \\ + E_z H_r^* + E_z^* H_r^* \exp(i2\omega t)) ] - & \quad (115) \\ - \frac{1}{4} [ (H_z E_r \exp(-i2\omega t) + H_z^* E_r + & \\ + H_z E_r^* + H_z^* E_r^* \exp(i2\omega t)) ] . & \end{aligned}$$

При усреднении (115) слагаемые с экспонентой исчезают:

$$\begin{aligned} (E_z H_r - H_z E_r) = \frac{1}{4} (E_z^* H_r + E_z H_r^*) - & \\ - \frac{1}{4} (H_z^* E_r + H_z E_r^*) = & \quad (116) \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_z^* H_r) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} (H_z^* E_r) = & \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_z^* H_r - H_z^* E_r) . & \end{aligned}$$

Тогда момент импульса при гармонической зависимости поля от времени:

$$M_V = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \operatorname{Re} (E_z^* H_r - H_z^* E_r) \rho^2 d\rho d\theta dz . \quad (117)$$

Обозначим компоненты базисных векторов следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{mp,1,1;j}(\rho, \theta, z) = & \\ = \mathbf{e}_{mp,1,1;j}(\rho) \exp(-i(m\theta + \sqrt{k^2 - \alpha_{mp}^2} z)) , & \quad (118) \end{aligned}$$

где  $j=r, \varphi, z$ .

Таким образом, среднее значение момента импульса для электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками можно записать (см. Приложение В) в явном виде через коэффициенты разложения поля по модам волновода:

$$\begin{aligned} M_V = \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 \int_0^R \mathbf{e}_{mq,1,2;z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq,2,2;r}(\rho) \rho^2 d\rho - & \\ - \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 \int_0^R \mathbf{e}_{mp,2,1;z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp,1,1;r}(\rho) \rho^2 d\rho = & \quad (119) \\ = \frac{1}{2} \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 m T_{mq}^{TM} + \frac{1}{2} \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 m T_{mp}^{TE} = & \\ = \frac{1}{2} \sum_m m \left( \sum_p |a^{mp}|^2 T_{mp}^{TE} + \sum_q |b^{mq}|^2 T_{mq}^{TM} \right) . & \end{aligned}$$

Из выражения (119) видно, что среднее значение момента импульса для электромагнитного поля пропорционально сумме, взвешенной на присутствующие порядки вихревой сингулярности.

Выражение, аналогичное (119), было использовано в [31, 32] для измерения орбитального углового момента светового поля с помощью многопорядкового дифракционного оптического элемента [34].

По аналогии, при гармонической зависимости поля от времени продольная проекция вектора Умова–Пойнтинга (пропорциональна импульсу электромагнитного поля):

$$S_z \sim E_r^* H_\varphi - E_\varphi^* H_r . \quad (120)$$

Рассмотрим среднее значение импульса поля, заключённого в волноводе длиной  $L$ :

$$\begin{aligned} S_V = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R S_z r dr d\varphi dz = & \quad (121) \\ = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (E_r^* H_\varphi - E_\varphi^* H_r) r dr d\varphi dz . & \end{aligned}$$

Среднее значение импульса поля можно записать в явном виде (см. Приложение Г):

$$\begin{aligned} S_V = & \\ = \frac{1}{2} \int_0^R \operatorname{Re} (E_r^* H_\varphi - E_\varphi^* H_r) \rho d\rho = & \\ = \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 \left( \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mp,TE}^2} \right)^2 k_0 \mu \gamma_{mp,TE} \times & \\ \times \left[ m^2 \int_0^R \frac{J_m^2(\alpha_{mp} \rho)}{\rho} d\rho + \int_0^R \left( \frac{\partial J_m(\alpha_{mp} \rho)}{\partial \rho} \right)^2 \rho d\rho \right] + & \quad (122) \\ + \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 \left( \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma_{mq,TM}^2} \right)^2 k_0 \varepsilon \gamma_{mq,TM} \times & \\ \times \left[ m^2 \int_0^R \frac{J_m^2(\beta_{mq} \rho)}{\rho} d\rho + \int_0^R \left( \frac{\partial J_m(\beta_{mq} \rho)}{\partial \rho} \right)^2 \rho d\rho \right] . & \end{aligned}$$

Можно видеть, что выражение (122) при  $\mu=1, \varepsilon=1$  представляет собой суммы интегралов от квадратов векторов, взвешенные на квадраты модулей коэффициентов разложения:

$$\begin{aligned} S_V = \frac{1}{2} \int_0^R \operatorname{Re} (E_r^* H_\varphi - E_\varphi^* H_r) \rho d\rho = & \\ = \frac{1}{k_0} \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 \int_0^R (\mathbf{e}_{mp,1,1}(\rho))^2 \rho d\rho + & \quad (123) \\ + \frac{1}{k_0} \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 \int_0^R (\mathbf{e}_{mq,2,2}(\rho))^2 \rho d\rho . & \end{aligned}$$

Полученные выражения полезны для квантования электромагнитного поля в волноводе.

### Заключение

В работе получены явные выражения импульса и момента импульса из теоремы Нётер (*ab initio*), содержащие квадраты модулей коэффициентов разложения по модам волновода, взвешенные на присутствующие порядки вихревой сингулярности.

Полученные выражения полезны для квантования электромагнитного поля в волноводе.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-19-00595) в части теоретических выкладок и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части численного моделирования.

**Литература**

- Боголюбов, Н.Н.** Введение в теорию квантованных полей / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. – 4-е изд. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
- Griffiths, D.J.** Introduction to electrodynamics / D.J. Griffiths. – 3<sup>rd</sup> ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1999. – 600 p. – ISBN: 978-1-108-42041-9.
- Jackson, J.D.** Classical electrodynamics / J.D. Jackson. – New York: John Wiley & Sons, 1999. – P. 350. – ISBN: 978-0-471-30932-1.
- Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
- Lekner, J.** Invariants of electromagnetic beams / J. Lekner // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2004. – Vol. 6, Issue 5. – P. 204-209. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/008.
- Миллер, У.** Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 344 с.
- Котляр, В.В.** Операторное описание парааксиальных световых полей / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, Я. Ванг // Компьютерная оптика. – 2001. – № 21. – С. 45-52.
- Khonina, S.N.** An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Pääkkönen, J. Simonen, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 2001. – Vol. 48, Issue 10. – P. 1543-1557. – DOI: 10.1080/09500340108231783.
- Volke-Sepulveda, K.** General construction and connections of vector propagation invariant optical fields: TE and TM modes and polarization states / K. Volke-Sepulveda, E. Ley-Koo // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2006. – Vol. 8, Issue 10. – P. 867-877. – DOI: 10.1088/1464-4258/8/10/008.
- Казанский, Н.Л.** Совместное решение уравнения Клейна–Гордона и системы уравнений Максвелла / Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2012. – Т. 36, № 4. – С. 518-526.
- Харитонов, С.И.** Преобразование конической волны с круговой поляризацией в вихревой цилиндрически поляризованный пучок в металлическом волноводе / С.И. Харитонов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 2. – С. 197-211. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-197-211.
- Koshiha, M.** Optical waveguide analysis / M. Koshiha. Tokyo: McGraw-Hill, Inc., 1990. – 173 p. – ISBN: 978-0-07-035368-8.
- Khonina, S.N.** Self-reproduction of multimode laser fields in weakly guiding stepped-index fibers / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // Optical Memory & Neural Networks (Information Optics). – 2007. – Vol. 16, Issue 3. – P. 167-177. – DOI: 10.3103/S1060992X07030071.
- Хонина, С.Н.** Саморепродукция многомодовых пучков Гаусса–Эрмита / С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Сойфер // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25, № 12. – С. 62-69.
- Loudon, R.** Contributions of John Henry Poynting to the understanding of radiation pressure / R. Loudon, C. Baxter // Proceedings of the Royal Society A. – 2012. – Vol. 468, Issue 2143. – P. 1825-1838. – DOI: 10.1098/rspa.2011.0573.
- Barnett, S.M.** Optical angular-momentum flux / S.M. Barnett // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. – 2002. – Vol. 4, Issue 2. – P. S7-S16. – DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/361.
- Volke-Sepulveda, K.** Orbital angular momentum of high-order Bessel light beams / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, K. Dholakia // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. – 2002. – Vol. 4, Issue 2. – P. S82-S89. – DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/373.
- Lekner, J.** Invariants of three types of generalized Bessel beams / J. Lekner // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2004. – Vol. 6, Issue 9. – P. 837-843. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/9/004.
- Litvin, I.A.** Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams / I.A. Litvin, A. Dudley, A. Forbes // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, Issue 18. – P. 16760-16771. – DOI: 10.1364/OE.19.016760.
- He, H.** Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity / H. He, M.E.J. Friese, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // Physical Review Letters. – 1995. – Vol. 75, Issue 5. – P. 826-829. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.826.
- He, H.** Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms / H. He, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop // Journal of Modern Optics. – 1995. – Vol. 42, Issue 1. – P. 217-223. – DOI: 10.1080/09500349514550171.
- Friese, M.E.J.** Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles / M.E.J. Friese, J. Enger, H. Rubinsztein-Dunlop, N.R. Heckenberg // Physical Review A. – 1996. – Vol. 54, Issue 2. – P. 1593-1596. – DOI: 10.1103/PhysRevA.54.1593.
- Simpson, N.B.** Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner / N.B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // Optics Letters. – 1997. – Vol. 22, Issue 1. – P. 52-54. – DOI: 10.1364/OL.22.000052.
- Allen, L.** The Poynting vector in Laguerre–Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density / L. Allen, M.J. Padgett // Optics Communications. – 2000. – Vol. 184, Issues 1-4. – P. 67-71. – DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00960-3.
- O’Neil, A.T.** Three-dimensional optical confinement of micron-sized metal particles and the decoupling of the spin and orbital angular momentum within an optical spanner / A.T. O’Neil, M.J. Padgett // Optics Communications. – 2000. – Vol. 185, Issues 1-3. – P. 139-143. – DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00989-5.
- Сойфер, В.А.** Оптическое манипулирование микрообъектами: достижения и новые возможности, порожденные дифракционной оптикой / В.А. Сойфер, В.В. Котляр, С.Н. Хонина // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2004. – Т. 35, № 6. – С. 1368-1432.
- Skidanov, R.V.** Micromanipulation in higher-order Bessel beams / R.V. Skidanov, V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.V. Volkov, V.A. Soifer // Optical Memory & Neural Networks (Information Optics). – 2007. – Vol. 16, Issue 2. – P. 91-98. – DOI: 10.3103/S1060992X07020051.
- Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

29. **Van Enk, S.J.** Spin and orbital angular-momentum of photons / S.J. van Enk, G. Nienhuis // *Europhysics Letters*. – 1994. – Vol. 25, Issue 7. – P. 497-501. – DOI: 10.1209/0295-5075/25/7/004.

30. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vasnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56, Issue 5. – P. 4064-4075. – DOI: 10.1103/PhysRevA.56.4064.

31. **Khonina, S.N.** Measuring the light field orbital angular momentum using DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Turunen // *Optical Memory & Neural Networks (Information Optics)*. – 2001. – Vol. 10, Issue 4. – P. 241-255.

32. **Котляр, В.В.** Измерение орбитального углового момента светового поля с помощью дифракционного оптического элемента / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, В.А. Сойфер, Я. Ванг // *Автометрия*. – 2002. – Т. 38, № 3. – С. 33-44.

33. **Leach, J.** Measuring the orbital angular momentum of a single photon / M.J. Padgett, S.M. Barnett, S. Franke-Arnold, J. Courtial // *Physical Review Letters*. – 2002. – Vol. 88, Issue 25. – 257901 (4 p). – DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.257901.

34. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.

35. **Leach, J.** Direct measurement of the skew angle of the Poynting vector in a helically phased beam / J. Leach, S. Keen, M.J. Padgett, C. Saunter, G.D. Love // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, Issue 25. – P. 11919-11924. – DOI: 10.1364/OE.14.011919.

36. **Franke-Arnold, S.** Advances in optical angular momentum / S. Franke-Arnold, L. Allen, M.J. Padgett // *Laser & Photonics Reviews*. – 2008. – Vol. 2, Issue 4. – P. 299-313. – DOI: 10.1002/lpor.200810007.

37. **Yao, A.M.** Optical angular momentum: origins, behavior, and applications / A.M. Yao, M.J. Padgett // *Advances in Optics and Photonics*. – 2011. – Vol. 3, Issue 2. – P. 161-204. – DOI: 10.1364/AOP.3.000161.

38. **Князев, Б.А.** Пучки фотонов с ненулевой проекцией орбитального момента импульса: новые результаты / Б.А. Князев, В.Г. Сербо // *Успехи физических наук*. – 2018. – Т. 188, № 5. – С. 508-539.

**Приложение А**

**Лагранжев подход к получению уравнений**

Рассмотрим вывод уравнения Лагранжа–Эйлера для простейшего случая, рассмотрев одномерное движение материальной точки вдоль оси X.

Пусть есть система, которая описывается функцией Лагранжа:

$$L(x(t), \dot{x}(t), t). \tag{A1}$$

Запишем функцию действия (функционал):

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt. \tag{A2}$$

Принцип наименьшего действия гласит, что точка будет двигаться по такой траектории, чтобы S было экстремумом (как правило, минимум).

Рассмотрим вариацию функционала (A2):

$$\begin{aligned} \delta S[x(t)] &= \\ &= S[x(t) + \delta x(t)] - S[x(t)] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \{L(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) - \\ &- L(x(t), \dot{x}(t), t)\} dt. \end{aligned} \tag{A3}$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в (A3).

$$\begin{aligned} L(x(t) + \delta x(t), \dot{x}(t) + \delta \dot{x}(t), t) - \\ - L(x(t), \dot{x}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t). \end{aligned} \tag{A4}$$

С учётом соотношений:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} [\delta x(t)], \tag{A5}$$

$$\frac{d}{dt} [\delta x(t)] = \delta \dot{x}(t) \tag{A6}$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) &= \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t). \end{aligned} \tag{A7}$$

Подставим правую часть (A7) в интеграл (A3):

$$\begin{aligned} \delta S[x(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) \right\} dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) \right\} dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \tag{A8}$$

С учётом того, что мы рассматриваем вариации с закреплёнными концами,  $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ .

Тогда вариация функционала с условием экстремальности примет следующий вид:

$$\delta S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \delta x(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] \right\} dt = 0. \tag{A9}$$

Так как  $\delta x(t)$  – произвольная, неравная нулю функция, то для обеспечения выполнения (A9) нужно, чтобы выполнялось следующее уравнение, которое называется уравнением Лагранжа–Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = 0. \tag{A10}$$

**Приложение Б**

**Решение уравнения Максвелла в виде разложения поля по модам цилиндрического волновода**

Рассмотрим ТМ-моды, для этого полагаем в (97) и (98)  $H_z = 0$ :

$$\begin{aligned}
 k_0\mu H_r + \gamma E_\varphi &= -\frac{i}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\
 \gamma H_r + k_0\varepsilon E_\varphi &= 0, \\
 \gamma E_r - k_0\mu H_\varphi &= -i \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\
 k_0\varepsilon E_r - \gamma H_\varphi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{Б1}$$

Перепишем (Б1) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} k_0\mu & \gamma \\ \gamma & k_0\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_r \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -k_0\mu \\ k_0\varepsilon & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(Б2)

Решаем систему (Б2) относительно поперечных компонент:

$$\begin{pmatrix} H_r \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \begin{pmatrix} k_0\varepsilon & -\gamma \\ -\gamma & k_0\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \begin{pmatrix} -\gamma & k_0\mu \\ -k_0\varepsilon & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(Б3)

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 H_r &= -\frac{k_0\varepsilon}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \frac{i}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\
 E_\varphi &= \frac{\gamma}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \frac{i}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\
 E_r &= \frac{\gamma}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} i \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\
 H_\varphi &= \frac{k_0\varepsilon}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} i \frac{\partial E_z}{\partial r}.
 \end{aligned}
 \tag{Б4}$$

Вектора электрического и магнитного поля, выраженные через производные продольной компоненты электрического поля, записываются следующим образом:

$$E = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \begin{pmatrix} i \frac{\partial E_z}{\partial r} \gamma \\ i \frac{\partial E_z}{r \partial \varphi} \gamma \\ (k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) E_z \end{pmatrix},$$

$$H = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \begin{pmatrix} -\frac{i}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} k_0\varepsilon \\ i \frac{\partial E_z}{\partial r} k_0\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$
(Б5)

Рассмотрим также ТЕ-моды, для этого полагаем в (97) и (98)  $E_z = 0$ :

$$\begin{aligned}
 k_0\mu H_r + \gamma E_\varphi &= 0, \\
 \gamma H_r + k_0\varepsilon E_\varphi &= -i \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\
 \gamma E_r - k_0\mu H_\varphi &= 0, \\
 k_0\varepsilon E_r - \gamma H_\varphi &= \frac{i}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{Б6}$$

Перепишем (Б6) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} k_0\mu & \gamma \\ \gamma & k_0\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_r \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -k_0\mu \\ k_0\varepsilon & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$
(Б7)

Решаем систему (Б7) относительно поперечных компонент:

$$\begin{pmatrix} H_r \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \begin{pmatrix} k_0\varepsilon & -\gamma \\ -\gamma & k_0\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \frac{\partial H_z}{\partial r} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r \\ H_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \begin{pmatrix} -\gamma & k_0\mu \\ -k_0\varepsilon & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$
(Б8)

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 H_r &= \frac{\gamma}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} i \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\
 E_\varphi &= -\frac{k_0\mu}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} i \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\
 E_r &= \frac{k_0\mu}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \frac{i}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \\
 H_\varphi &= \frac{\gamma}{(k_0)^2 \varepsilon \mu - \gamma^2} \frac{i}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{Б9}$$

В этом случае вектора электрического и магнитного поля, выраженные через производные продольной компоненты магнитного поля, записываются следующим образом:

$$E = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \begin{pmatrix} \frac{i}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} k_0\mu \\ -i \frac{\partial H_z}{\partial r} k_0\mu \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \frac{1}{k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2} \begin{pmatrix} i \frac{\partial H_z}{\partial r} \gamma \\ i \frac{\partial H_z}{r \partial \varphi} \gamma \\ (k_0^2 \mu \varepsilon - \gamma^2) H_z \end{pmatrix}.$$
(Б10)

**Приложение В**

**Вычисление среднего значения момента импульса при гармонической зависимости поля от времени**

Чтобы вычислить выражение (116), выпишем сначала первое произведение:

$$\begin{aligned}
 E_z^*(\rho, \theta, z) H_r(\rho, \theta, z) &= \\
 &= \left[ \sum_{m_1, p_1} (a^{m_1 p_1} \mathbf{e}_{m_1 p_1, 1, 1; z}(\rho, \theta, z))^* + \sum_{m_1, q_1} (b^{m_1 q_1} \mathbf{e}_{m_1 q_1, 1, 2; z}(\rho, \theta, z))^* \right] \times \\
 &\times \left[ \sum_{m_2, p_2} a^{m_2 p_2} \mathbf{e}_{m_2 p_2, 2, 1; r}(\rho, \theta, z) + \sum_{m_2, q_2} b^{m_2 q_2} \mathbf{e}_{m_2 q_2, 2, 2; r}(\rho, \theta, z) \right] = \\
 &= \sum_{m_1, p_1, m_2, p_2} a^{m_1 p_1} a^{m_2 p_2} \mathbf{e}_{m_1 p_1, 1, 1; z}(\rho, \theta, z)^* \mathbf{e}_{m_2 p_2, 2, 1; r}(\rho, \theta, z) + \sum_{m_1, p_1, m_2, q_2} a^{m_1 p_1} b^{m_2 q_2} \mathbf{e}_{m_1 p_1, 1, 1; z}(\rho, \theta, z)^* \mathbf{e}_{m_2 q_2, 2, 2; r}(\rho, \theta, z) + \\
 &+ \sum_{m_1, q_1, m_2, p_2} b^{m_1 q_1} a^{m_2 p_2} \mathbf{e}_{m_1 q_1, 1, 2; z}(\rho, \theta, z)^* \mathbf{e}_{m_2 p_2, 2, 1; r}(\rho, \theta, z) + \sum_{m_1, q_1, m_2, q_2} b^{m_1 q_1} b^{m_2 q_2} \mathbf{e}_{m_1 q_1, 1, 2; z}(\rho, \theta, z)^* \mathbf{e}_{m_2 q_2, 2, 2; r}(\rho, \theta, z).
 \end{aligned}
 \tag{B1}$$

Т.к. при интегрировании в (117) по углу будет  $2\pi\delta_{m_1, m_2}$ , то останутся суммы только при  $m_1 = m_2 = m$ . Также при интегрировании по  $z$  (при достаточно большом  $L$ ) останутся суммы только с одинаковыми параметрами  $\alpha_{mp}$  и  $\beta_{mq}$  (появится коэффициент, пропорциональный  $L$ , имеющий размерность единиц длины).

С учётом приведённых выше соображений перепишем выражение (B1):

$$\begin{aligned}
 E_z^* H_r &\sim \sum_{m, p} |a^{mp}|^2 \mathbf{e}_{mp, 1, 1; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 2, 1; r}(\rho) + \\
 &+ \sum_{m, q} |b^{mq}|^2 \mathbf{e}_{mq, 1, 2; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 2, 2; r}(\rho).
 \end{aligned}
 \tag{B2}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 H_z^* E_r &\sim \sum_{m, p} |a^{mp}|^2 \mathbf{e}_{mp, 2, 1; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 1, 1; r}(\rho) + \\
 &+ \sum_{m, q} |b^{mq}|^2 \mathbf{e}_{mq, 2, 2; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 1, 2; r}(\rho).
 \end{aligned}
 \tag{B3}$$

Для вычисления интегралов в (117) по радиусу понадобятся следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 E_r^* H_\phi &\sim \sum_{m, p} |a^{mp}|^2 \mathbf{e}_{mp, 1, 1; \phi}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 2, 1; \phi}(\rho) + \sum_{m, q} |b^{mq}|^2 \mathbf{e}_{mq, 1, 2; \phi}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 2, 2; \phi}(\rho), \\
 E_\phi^* H_r &\sim \sum_{m, p} |a^{mp}|^2 \mathbf{e}_{mp, 1, 1; \phi}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 2, 1; r}(\rho) + \sum_{m, q} |b^{mq}|^2 \mathbf{e}_{mq, 1, 2; \phi}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 2, 2; r}(\rho).
 \end{aligned}
 \tag{Г1}$$

Для вычисления интегралов по радиусу понадобятся:

$$\begin{aligned}
 \int_0^R \mathbf{e}_{mp, 1, 1; r}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 2, 1; r}(\rho) \rho d\rho &= \left( \frac{1}{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma_{mp, TE}^2} \right)^2 k_0 \mu \gamma_{mp, TE} m^2 \int_0^R \frac{J_m^2(\alpha_{mp} \rho)}{\rho} d\rho = k_0 \mu \gamma_{mp, TE} m^2 I_{mp, 1}, \\
 \int_0^R \mathbf{e}_{mq, 1, 2; r}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 2, 2; \phi}(\rho) \rho d\rho &= \left( \frac{1}{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma_{mq, TM}^2} \right)^2 k_0 \epsilon \gamma_{mq, TM} \int_0^R \left( \frac{\partial J_m(\beta_{mq} \rho)}{\partial \rho} \right)^2 \rho d\rho = k_0 \epsilon \gamma_{mq, TM} I_{mq, 2}, \\
 \int_0^R \mathbf{e}_{mp, 1, 1; \phi}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 2, 1; r}(\rho) \rho d\rho &= - \left( \frac{1}{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma_{mp, TE}^2} \right)^2 \gamma_{mp, TE} k_0 \mu \int_0^R \left( \frac{\partial J_m(\alpha_{mp} \rho)}{\partial \rho} \right)^2 \rho d\rho = k_0 \mu \gamma_{mp, TE} I_{mp, 2}, \\
 \int_0^R \mathbf{e}_{mq, 1, 2; \phi}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 2, 2; r}(\rho) \rho d\rho &= - \left( \frac{1}{k_0^2 \mu \epsilon - \gamma_{mq, TM}^2} \right)^2 k_0 \epsilon m^2 \gamma_{mq, TM} \int_0^R \frac{J_m^2(\beta_{mq} \rho)}{\rho} d\rho = k_0 \epsilon \gamma_{mq, TM} m^2 I_{mq, 1}.
 \end{aligned}
 \tag{Г2}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \int_0^R \mathbf{e}_{mp, 1, 1; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 2, 1; r}(\rho) \rho^2 d\rho &= 0, \\
 \int_0^R \mathbf{e}_{mq, 1, 2; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 2, 2; r}(\rho) \rho^2 d\rho &= \\
 &= \frac{k_0 \epsilon}{\beta_{mq}^2} m \int_0^R J_m^2(\beta_{mq} \rho) \rho d\rho = m T_{mq}^{TM}, \\
 \int_0^R \mathbf{e}_{mp, 2, 1; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mp, 1, 1; r}(\rho) \rho^2 d\rho &= \\
 &= i \frac{k_0 \mu}{\alpha_{mq}^2} m \int_0^R J_m^2(\alpha_{mq} \rho)^2 \rho d\rho = m T_{mp}^{TE}, \\
 \int_0^R \mathbf{e}_{mq, 2, 2; z}(\rho)^* \mathbf{e}_{mq, 1, 2; r}(\rho) \rho^2 d\rho &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{B4}$$

**Приложение Г**

**Вычисление среднего значения импульса при гармонической зависимости поля от времени**

С учётом ранее сделанных рассуждений (см. Приложение В) можно записать:

$$\begin{aligned}
S_V &= \frac{1}{2} \int_0^R \operatorname{Re} (E_r^* H_\phi - E_\phi^* H_r) \rho d\rho = \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 k_0 \mu \gamma_{mp,TE} m^2 I_{mp,1} + \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 k_0 \varepsilon \gamma_{mq,TM} I_{mq,2} + \\
&+ \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 k_0 \mu \gamma_{mp,TE} I_{mp,2} + \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 k_0 \varepsilon \gamma_{mq,TM} m^2 I_{mq,1} = \\
&= \sum_{m,p} |a^{mp}|^2 k_0 \mu \gamma_{mp,TE} [m^2 I_{mp,1} + I_{mp,2}] + \sum_{m,q} |b^{mq}|^2 k_0 \varepsilon \gamma_{mq,TM} [m^2 I_{mq,1} + I_{mq,2}].
\end{aligned} \tag{Г3}$$

### Сведения об авторах

Сведения об авторе **Харитонов Сергей Иванович** см. стр. 585 этого номера.

**Волотовский Сергей Геннадьевич**, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

ГРПТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 6 июля 2018 г.

## CALCULATION OF THE ANGULAR MOMENTUM OF AN ELECTROMAGNETIC FIELD INSIDE A WAVEGUIDE WITH ABSOLUTELY CONDUCTING WALLS

S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, S.G. Volotovskiy<sup>1,2</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse 34

### Abstract

In this paper, explicit expressions for the momentum and angular momentum from the Noether's theorem (ab initio) are obtained. These expressions contain squared modules of the coefficients of a guided mode expansion, weighted by the phase singularity orders present. The expressions obtained are useful for quantizing the electromagnetic field in a waveguide.

**Keywords:** angular momentum, Noether's theorem, Lagrange-Euler equation, Umov-Poynting vector, modes of a cylindrical metal waveguide.

**Citation:** Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of the angular momentum of an electromagnetic field inside a waveguide with absolutely conducting walls. *Computer Optics* 2018; 42(4): 588-605. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Science Foundation (grant No. 18-19-00595) in part of theoretical investigations and by the Ministry of Science and Higher Education within the State assignment FSRC «Crystallography and Photonics» RAS (No. 007-GZ/ch3363-26) in part of computer simulations.

### References

- |   |  |
|---|--|
| <p>[1] Bogoliubov NN, Shirkov DV. Introduction to the theory of quantized fields. 3<sup>rd</sup> ed. New York: John Wiley &amp; Sons Inc; 1980. ISBN: 978-0-471-04223-5.</p> <p>[2] Griffiths DJ. Introduction to Electrodynamics. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc; 1999. ISBN: 978-1-108-42041-9.</p> <p>[3] Jackson JD. Classical electrodynamics. New York: John Wiley &amp; Sons; 1999: 350. ISBN: 978-0-471-30932-1.</p> <p>[4] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 6<sup>th</sup> ed. Oxford, New York, Beijing, Frankfurt, São Paulo, Syd-</p> | <p>ney, Tokyo, Toronto: Pergamon Press; 1980. ISBN: 978-0-08-026482-0.</p> <p>[5] Lekner J. Invariants of electromagnetic beams. <i>J Opt A: Pure Appl Opt</i> 2004; 6(5): 204-209. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/008.</p> <p>[6] Miller W. Symmetry and separation of variables. Cambridge: Cambridge University Press; 1984. ISBN: 978-0-521-30224-1.</p> <p>[7] Kotlyar VV, Khonina SN, Wang Ya. Operator description of paraxial light fields [In Russian]. <i>Computer Optics</i> 2001; 21: 45-52.</p> <p>[8] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Simonen J, Turunen J. An analysis of the angular momentum of a</p> |
|---|--|



- light field in terms of angular harmonics. *J Mod Opt* 2001; 48(10): 1543-1557. DOI: 10.1080/09500340108231783.
- [9] Volke-Sepulveda K, Ley-Koo E. General construction and connections of vector propagation invariant optical fields: TE and TM modes and polarization states. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2006; 8(10): 867-877. DOI: 10.1088/1464-4258/8/10/008.
- [10] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Khonina SN. Joint solution of the Klein-Gordon and Maxwell's equations [In Russian]. *Computer Optics* 2012; 36(4): 518-526.
- [11] Kharitonov SI, Khonina SN. Conversion of a conical wave with circular polarization into a vortex cylindrically polarized beam in a metal waveguide [In Russian]. *Computer Optics* 2018; 42(2): 197-211. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-197-211.
- [12] Koshiha M. *Optical waveguide analysis*. Tokyo: McGraw-Hill Inc; 1990. ISBN: 978-0-07-035368-8.
- [13] Khonina SN, Volotovskiy SG. Self-reproduction of multimode laser fields in weakly guiding stepped-index fibers. *Optical Memory & Neural Networks* 2007; 16(3): 167-177. DOI: 10.3103/S1060992X07030071.
- [14] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Self-reproduction of multimode Hermite–Gaussian beams. *Technical Physics Letters* 1999; 25(6): 489-491. DOI: 10.1134/1.1262525.
- [15] Loudon R, Baxter C. Contributions of John Henry Poynting to the understanding of radiation pressure. *Proc R Soc A* 2012; 468(2143): 1825-1838. DOI: 10.1098/rspa.2011.0573.
- [16] Barnett SM. Optical angular-momentum flux. *J Opt B Quantum Semiclass Opt* 2002; 4(2): S7-S16. DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/361.
- [17] Volke-Sepulveda K, Garcés-Chávez V, Chávez-Cerda S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of high-order Bessel light beams. *J Opt B Quantum Semiclass Opt* 2002; 4(2): S82-S89. DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/373.
- [18] Lekner J. Invariants of three types of generalized Bessel beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(9): 837-843. DOI: 10.1088/1464-4258/6/9/004.
- [19] Litvin IA, Dudley A, Forbes A. Poynting vector and orbital angular momentum density of superpositions of Bessel beams. *Opt Express* 2011; 19(18): 16760-16771. DOI: 10.1364/OE.19.016760.
- [20] He H, Friese MEJ, Heckenberg NR, Rubinsztein-Dunlop H. Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity. *Phys Rev Lett* 1995; 75(5): 826-829. DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.826.
- [21] He H, Heckenberg NR, Rubinsztein-Dunlop H. Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms. *J Mod Opt* 1995; 42(1): 217-223. DOI: 10.1080/09500349514550171.
- [22] Friese MEJ, Enger J, Rubinsztein-Dunlop H, Heckenberg NR. Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles. *Phys Rev A* 1996; 54(2): 1593-1596. DOI: 10.1103/PhysRevA.54.1593.
- [23] Simpson NB, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner. *Opt Lett* 1997; 22(1): 52-54. DOI: 10.1364/OL.22.000052.
- [24] Allen L, Padgett MJ. The Poynting vector in Laguerre–Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. *Opt Commun* 2000; 184(1-4): 67-71. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00960-3.
- [25] O’Neil AT, Padgett MJ. Three-dimensional optical confinement of micron-sized metal particles and the decoupling of the spin and orbital angular momentum within an optical spanner. *Opt Commun* 2000; 185(1-3): 139-143. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00989-5.
- [26] Soifer VA, Kotlyar VV, Khonina SN. Optical microparticle manipulation: Advances and new possibilities created by diffractive optics. *Physics of Particles and Nuclei* 2004; 35(6): 733-766.
- [27] Skidanov RV, Kotlyar VV, Khonina SN, Volkov AV, Soifer VA. Micromanipulation in higher-order Bessel beams. *Optical Memory & Neural Networks* 2007; 16(2): 91-98. DOI: 10.3103/S1060992X07020051.
- [28] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [29] Van Enk SJ, Nienhuis G. Spin and orbital angular-momentum of photons. *Europhys Lett* 1994; 25(7): 497-501. DOI: 10.1209/0295-5075/25/7/004.
- [30] Soskin MS, Gorshkov VN, Vasnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. *Phys Rev A* 1997; 56(5): 4064-4075. DOI: 10.1103/PhysRevA.56.4064.
- [31] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE. *Optical Memory and Neural Networks* 2001; 10(4): 241-255.
- [32] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA, Wang Ya. Light field orbital angular moment measurement with the help of diffractive optical element [In Russian]. *Avtometriya* 2002; 38(3): 33-44.
- [33] Leach J, Padgett MJ, Barnett SM, Franke-Arnold S, Courtial J. Measuring the orbital angular momentum of a single photon. *Phys Rev Lett* 2002; 88(25): 257901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.257901.
- [34] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. *J Mod Opt* 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
- [35] Leach J, Keen S, Padgett MJ, Saunter C, Love GD. Direct measurement of the skew angle of the Poynting vector in a helically phased beam. *Opt Express* 2006; 14(25): 11919-11924. DOI: 10.1364/OE.14.011919.
- [36] Franke-Arnold S, Allen L, Padgett MJ. Advances in optical angular momentum. *Laser Photon Rev* 2008; 2(4): 299-313. DOI: 10.1002/lpor.200810007.
- [37] Yao AM, Padgett MJ. Optical angular momentum: origins, behavior, and applications. *Adv Opt Photon* 2011; 3(2): 161-204. DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
- [38] Knyazev BA, Serbo VG. Beams of photons with nonzero orbital angular momentum projection: New results. *Phys Usp* 2018; 61(5). DOI: 10.3367/UFNe.2018.02.038306.

#### Author’s information

The information about authors **Sergey Ivanovich Kharitonov** you can find on page 586 of this issue.

**Sergey Gennadjevich Volotovskiy** (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics”, works as the leading programmer in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru) .

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru) .

---

*Received July 6, 2018.*

---