

## ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ФАЗЕ

Е.А. Павельева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия

### Аннотация

В работе представлены основные подходы к использованию фазовой информации в задачах анализа, обработки и восстановления изображений. Приведены описания фазовых алгоритмов и примеры результатов их работы. Предложена методика применения фазовой информации на основе проекционного метода Эрмита.

**Ключевые слова:** фаза, преобразование Фурье, восстановление изображений, фазовая корреляция, фазовая когерентность, проекционный метод Эрмита.

**Цитирование:** Павельева, Е.А. Обработка и анализ изображений на основе использования информации о фазе / Е.А. Павельева // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 6. – С. 1022-1034. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-1022-1034.

### Введение

Фазовая информация используется во многих задачах анализа и обработки сигналов [1–51]. Под фазовой информацией подразумевают фазу преобразования Фурье (ПФ) исследуемого изображения (*global phase*) либо фазу некоторого локального преобразования (оконного преобразования Фурье, вейвлет-преобразования и т.п.), примененного к изображению (*local phase*) [2].

Фаза содержит больше информации об изображении, чем амплитуда [3–5]. Важность фазовой информации можно обосновать на примере задачи синтеза фазы и амплитуды ПФ различных изображений [3]. Результат синтеза имеет сходство с тем изображением, чья фаза ПФ была использована.

В случае, когда известна только фаза ПФ, изображение можно восстановить [52, 53]. При восстановлении изображений возникает вопрос об единственности восстановленного изображения, а также об оценке меры близости между исходным и восстановленным изображениями. В работах [3, 54, 55] представлены теоремы единственности восстановления сигнала по фазе его преобразования Фурье, а в работах [3, 54, 56, 57] предложены итерационные алгоритмы восстановления сигналов по фазе ПФ. В работе [58] представлены условия единственности восстановления сигнала по фазе биспектра, а в работе [59] – по фазе комплексного вейвлет-преобразования.

Информация о фазе используется в задачах выделения контуров и угловых точек на изображениях [6–8], в задачах анализа качества изображений [9–12], интеллектуального слияния изображений (*image fusion*) [13–15], совмещения изображений (*image registration*) [16–21], в задачах оценки движения (*motion estimation*) [22, 23], восстановления испорченных частей изображений (*image inpainting*) [24], в задачах биометрии [25–32], обнаружения подделок биометрических данных [33, 34], а также для определения уровня размытия и оценки резкости изображений [35–39], для шумоподавления [40, 41], сегментации [42, 43] изображений, для сопоставления изображений (*image matching*) [44–47], для построения составного изображения (*image mosaicing*) [48],

для построения дескрипторов текстур [49], для определения меры близости изображений [50, 51] и т.п.

В работах [60–62] предложена методика использования фазы аппроксимации преобразования Фурье, полученной в результате применения проекционного метода Эрмита [63]. Эффективность использования проекционного метода Эрмита обусловлена тем, что функции Эрмита являются собственными функциями преобразования Фурье. Данный подход применяется в задачах синтеза [60], восстановления [61] изображений и в задаче биометрической идентификации человека по радужной оболочке глаза [62, 64, 65].

### 1. Метод фазовой корреляции (*Phase correlation*)

Метод фазовой корреляции применяют для поиска соответствия между смещенными, повернутыми и разномасштабными изображениями [19, 22]. Рассмотрим две функции  $f(x)$  и  $g(x)$ . Пусть  $F(\lambda) = A_F(\lambda)e^{i\phi_F(\lambda)}$  и  $G(\lambda) = A_G(\lambda)e^{i\phi_G(\lambda)}$  – их преобразования Фурье,  $A_F$  и  $A_G$  – модули ПФ,  $\phi_F$  и  $\phi_G$  – фазы ПФ. Взаимным фазовым спектром двух спектральных функций  $F(\lambda)$  и  $G(\lambda)$  называется спектральная функция  $R_{FG}(\lambda)$  с единичной амплитудой, фаза которой равна разности фаз функций  $F(\lambda)$  и  $G(\lambda)$ :

$$R_{FG}(\lambda) = \frac{F(\lambda) \overline{G(\lambda)}}{|F(\lambda) \overline{G(\lambda)}|} = e^{i(\phi_F(\lambda) - \phi_G(\lambda))}.$$

Применив к этой функции обратное преобразование Фурье, получим РОС-функцию – функцию фазовой корреляции (*Phase-Only Correlation function*):

$$POC_{f,g}(x) = FT^{-1}[R_{FG}(\lambda)].$$

Если  $g(x) = f(x - a)$ , т.е. одна функция сдвинута относительно другой, то РОС-функция является дельта-функцией с пиком в точке  $x = a$ . Поэтому для функции фазовой корреляции выполняется следующее свойство: если две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  «похожи», то РОС-функция имеет четкий пик, если же функции «не похожи», то РОС-функция не имеет четкого пика. Наибольшее значение РОС-функции определяет меру близости функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , а при наличии четкого пика РОС-функции его положение соответствует смещению одной функции относительно другой.

Аналогично определяется РОС-функция в двумерном случае для двух изображений  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ . Если  $g(x, y) = f(x - a, y - b)$ , т.е. одна функция сдвинута относительно другой, то РОС-функция является дельта-функцией с пиком в точке с координатами  $(a, b)$ . Если одна функция повернута относительно другой на некоторый угол  $\theta$ , т.е.

$$g(x, y) = f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta),$$

то амплитуды преобразований Фурье-функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  совпадают с точностью до угла поворота  $\theta$ . Записав амплитуды ПФ в полярных координатах, получим, что  $A_G(\rho, \phi - \theta) = A_F(\rho, \phi)$ , т.е. амплитуда ПФ одной функции сдвинута относительно амплитуды ПФ другой функции. Для нахождения угла  $\theta$  можно применить метод фазовой корреляции к функциям  $A_F(\rho, \phi)$  и  $A_G(\rho, \phi)$ . Если же  $g(x, y) = f(ax, by)$ , то

$$G(\lambda, \mu) = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{\lambda}{a}, \frac{\mu}{b}\right).$$

Перейдя к логарифмическим координатам  $\xi = \lg \lambda$ ,  $\eta = \lg \mu$ , получим

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{|ab|} F(\xi - \lg a, \eta - \lg b),$$

и задача сведётся к применению метода фазовой корреляции к функциям  $F(\xi, \eta)$  и  $G(\xi, \eta)$ .

С учётом описанных свойств метод фазовой корреляции активно применяется в задачах совмещения изображений (рис. 1) [19, 21], при поиске смещения изображений [22], для оценки движения объектов на изображениях [23], для поиска соответствий на изображениях (рис. 2) [46, 47], для построения составного изображения [48] (рис. 3), а также для решения биометрических задач [28, 29, 32] и для обнаружения подделок биометрических данных [33].

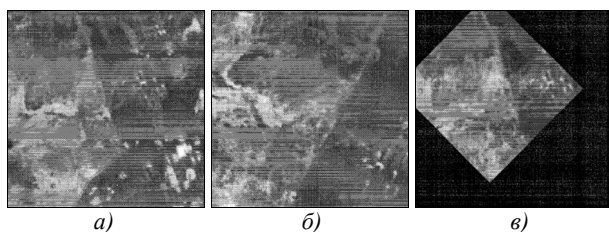


Рис. 1. Применение метода фазовой корреляции в задаче совмещения изображений аэрофотосъемки [19]: исходные изображения (а – б); результат совмещения изображения «б» с изображением «а» (в)

В работах [27, 28] вводится понятие ВЛРОС-функции (*Band-Limited Phase-Only Correlation function*) – функции, являющейся обратным преобразованием Фурье от функции взаимного фазового спектра в области, соответствующей низким частотам. Показано, что пик ВЛРОС-функции является более чётким и устойчивым. Пример РОС- и ВЛРОС-функций для двух нормализованных изображений радужных оболочек глаза одного человека приведён на рис. 4.

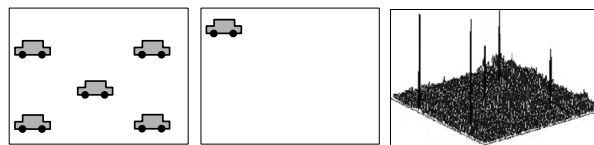


Рис. 2. Применение метода фазовой корреляции в задаче поиска соответствий на изображениях [47]. РОС-функция имеет пять чётких пиков

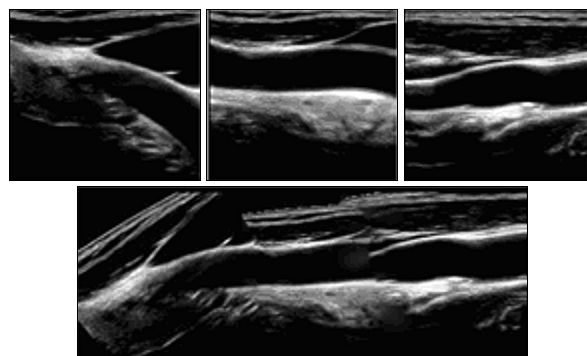


Рис. 3. Применение метода фазовой корреляции в задаче построения составного изображения [48]. Сверху – исходные изображения разных частей сонной артерии, снизу – составное изображение

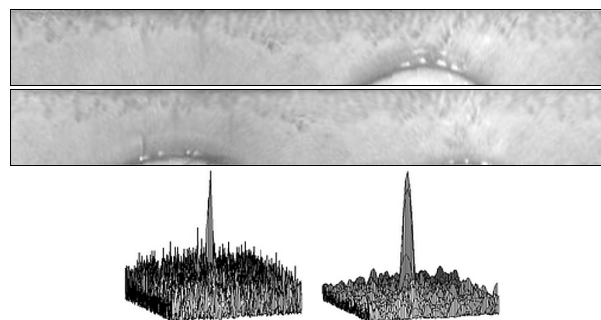


Рис. 4. Нормализованные изображения радужных оболочек глаз и их РОС-функция (слева) и ВЛРОС-функция (справа)

## 2. Метод фазовой конгруэнтности (Phase congruency)

Идея метода фазовой конгруэнтности основана на разложении функции  $F(x) \in L_2[-\pi, \pi]$  в ряд Фурье:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx + \xi_n), \quad A_n \geq 0.$$

В работах [8, 66–68] показано, что если у сигнала присутствует особенность, то в точке особенности все синусоидальные компоненты разложения имеют одинаковую фазу (рис. 5а). Данное свойство называется фазовой конгруэнтностью (или фазовой когерентностью). Предложена мера фазовой конгруэнтности [68, 66, 67]:

$$PC(x) = \max_{\bar{\varphi} \in [0, 2\pi]} \frac{\sum_n A_n \cos(nx + \xi_n - \bar{\varphi}(x))}{\sum_n A_n},$$

$PC(x) \in [0, 1]$ .  $PC(x) = 1$  тогда и только тогда, когда все компоненты разложения функции в точке  $x$  имеют одинаковую фазу  $\bar{\varphi}(x)$ . Чем больше значение меры

$PC(x)$ , тем более вероятно, что в данной точке сигнал имеет особенность (типы особенностей приведены в работе [68]). В работах [8, 66] предложена геометрическая интерпретация меры фазовой конгруэнтности (рис. 5б). В ней каждая компонента разложения в ряд Фурье представляется в виде вектора, длина которого равна  $A_n$ , а угол наклона относительно положительного направления оси  $OX$  равен значению фазы  $\varphi_n(x) = nx + \xi_n \pmod{2\pi}$ . Тогда  $E(x)$  – суммарный вектор,

$$|E(x)| = \sum_n A_n \cos(\varphi_n(x) - \bar{\varphi}(x)) -$$

его длина [8, 68],  $\bar{\varphi}(x)$  – усреднённое значение фазы и

$$PC(x) = \frac{|E(x)|}{\sum_n A_n}.$$

Мера фазовой конгруэнтности инвариантна к изменению освещённости и контрастности изображения [8].

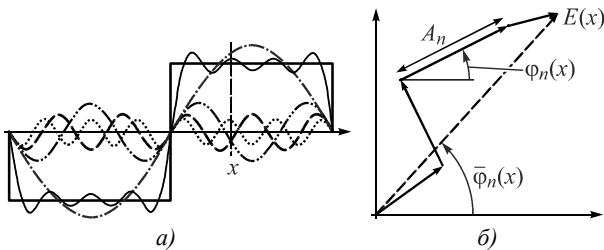


Рис. 5. Четыре первых компоненты разложения ступенчатого контура в ряд Фурье (а); геометрическая интерпретация меры фазовой конгруэнтности в точке  $x$ , отмеченной на рис. 5а [8] (б)

В работе [66] предложен метод вычисления фазовой конгруэнтности с помощью вейвлет-преобразования. В качестве материнского вейвлета используется функция Габора  $g(x)e^{i\omega_c x}$ , где  $g(x)$  – функция Гаусса. Вейвлет-преобразование функции  $f(x)$  вычисляется по формуле:

$$F(s, p) = \left[ f(x) * \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{x}{s}\right) e^{i\omega_c x/s} \right]_{x=p},$$

где  $s \in R^+$  (*scale*) – параметр растяжения (параметр масштаба),  $p \in R$  (*position*) – параметр сдвига, символ  $*$  обозначает свёртку двух функций. Пусть  $\Phi(F(s, p))$  – фаза  $F(s, p)$ . В точках, где функция имеет особенность (скачок), т.е. в точках с высокой мерой фазовой конгруэнтности, фаза вейвлет-преобразования не изменяется с изменением параметра масштаба  $s$  (рис. 6, рис. 7) [66].

Обозначим

$$A_s(p) = \sqrt{\text{Re}^2 F(s, p) + \text{Im}^2 F(s, p)},$$

$$F(p) = \sum_s \text{Re} F(s, p),$$

$$H(p) = \sum_s \text{Im} F(s, p),$$

$$E(p) = \sqrt{F^2(p) + H^2(p)}.$$

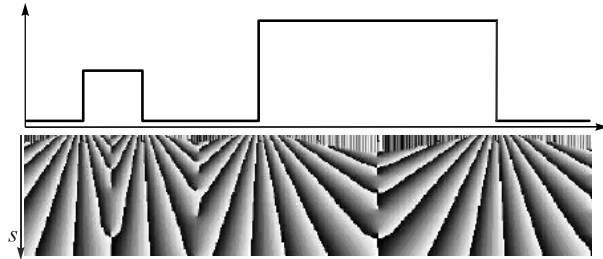


Рис. 6. Одномерный сигнал со ступенчатыми контурами и скейлограмма фазы его вейвлет-преобразования [69] (графическое представление функции  $\Phi(F(s, p))$ ): одинаковыми цветами обозначены одинаковые значения фазы)

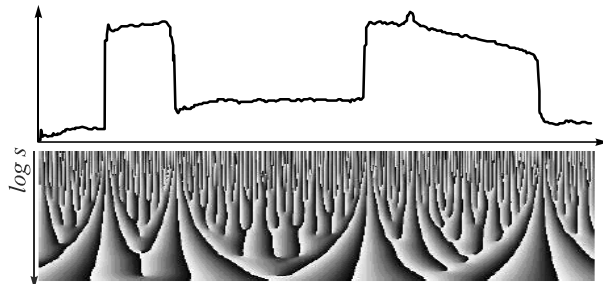


Рис. 7. Одномерный сигнал с зашумлёнными ступенчатыми контурами и скейлограмма фазы его вейвлет-преобразования [66]

Тогда мера фазовой конгруэнтности вычисляется по формуле:

$$PC(p) = \frac{E(p)}{\sum_s A_s(p)}.$$

Геометрическая интерпретация меры фазовой конгруэнтности  $PC(p)$  представлена на рис. 8, где для фиксированной точки  $p$  каждая свертка  $F(s, p)$  представляется в виде вектора, длина которого равна  $A_s(p)$ , а угол наклона относительно положительного направления оси  $OX$  равен значению фазы  $\varphi_s(p) = \Phi(F(s, p))$ .

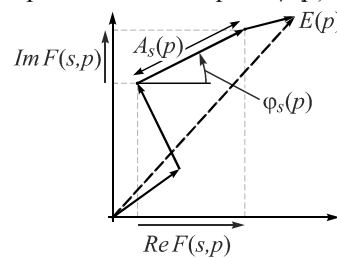


Рис. 8. Геометрическая интерпретация меры фазовой конгруэнтности

В работах [66, 8] предложен метод вычисления фазовой конгруэнтности для двумерных сигналов на основе двумерного вейвлет-преобразования.

Метод фазовой конгруэнтности применяется для выделения контуров и угловых точек на изображениях [8, 66] (рис. 9). Также метод фазовой конгруэнтности применяется в задачах биометрии [31], совмещения [20], сегментации [43], шумоподавления [40, 41] (рис. 10), интеллектуального слияния [15] изображений, определения уровня размытия на изображениях [39] и меры близости изображений [51].

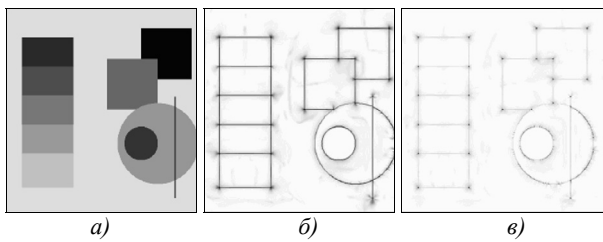


Рис. 9. Исходное изображение (а); изображение с выделенными контурами (б); изображение с выделенными угловыми точками [8] (в)



Рис. 10. Использование свойства фазовой конгруэнтности в методе билатеральной фильтрации для шумоподавления изображений [41]

### 3. Метод локальной фазовой когерентности (Local phase coherence)

В методе локальной фазовой когерентности [35, 36] для исследования сигнала  $f(x)$ ,  $x \in R$  используется фаза вейвлет-преобразования. В работе [35] показано, что если сигнал имеет особенность (рис. 11) в точке  $x_0$ , то

$$\Phi(F(s, p)) = \Phi\left(F\left(1, x_0 + \frac{p-x_0}{s}\right)\right).$$

Данное соотношение показывает, что на линиях  $x_0 + (p-x_0)/s = C$ ,  $\forall C = \text{const}$  в плоскости  $(s, p)$  фаза сохраняет постоянное значение, что определяет взаимосвязь между параметрами  $s$  и  $p$  вблизи точки  $x_0$  (рис. 11, рис. 6). В работе [35] также показано, что если в точке особенности  $x_0$  имеет место размытие, то данное соотношение не выполняется (рис. 12).

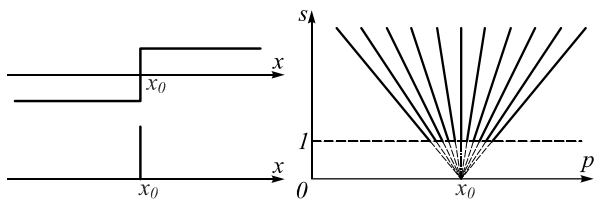


Рис. 11. Одномерные сигналы с особенностью и линии постоянства фазы вейвлет-преобразования [35]

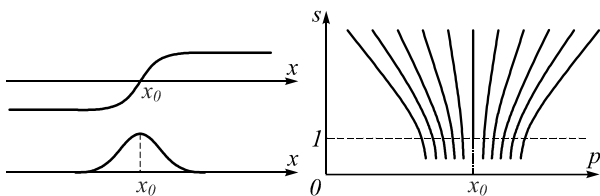


Рис. 12. Одномерные сигналы с размытой особенностью и линии постоянства фазы вейвлет-преобразования [35]

В работе [35] предложен метод предсказания фазы вейвлет-преобразования. Пусть  $a, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4$  –

результаты вейвлет-преобразования при  $s=4, s=2$  и  $s=1$  соответственно (рис. 13),  $a^*$  – число, сопряжённое числу  $a$ .

Значения фазы  $\hat{\Phi}(c_1), \hat{\Phi}(c_2), \hat{\Phi}(c_3)$  и  $\hat{\Phi}(c_4)$  при  $s=1$  предсказываются на основе информации о фазе  $\Phi(b_1)$  и  $\Phi(b_2)$  при  $s=2$  и  $\Phi(a)$  при  $s=4$  по формуле:

$$\hat{\Phi} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \Phi \left( a^* \cdot \begin{pmatrix} b_1^3 \\ b_1^2 b_2 \\ b_1 b_2^2 \\ b_2^3 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\Phi}(c_1) = -2\Phi(a) + 3\Phi(b_1), \\ \hat{\Phi}(c_2) = -2\Phi(a) + 2\Phi(b_1) + \Phi(b_2), \\ \hat{\Phi}(c_3) = -2\Phi(a) + \Phi(b_1) + 2\Phi(b_2), \\ \hat{\Phi}(c_4) = -2\Phi(a) + 3\Phi(b_2). \end{cases}$$

В точках особенностей сигнала значения предсказанной фазы  $\hat{\Phi}(c_i)$  будут близки к значениям фазы  $\Phi(c_i)$  вейвлет-преобразования.

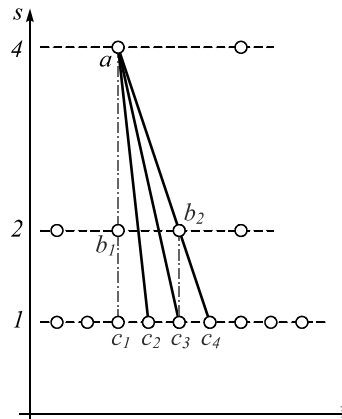


Рис. 13. Геометрическая интерпретация формулы предсказания фазы вейвлет-преобразования [35]

Аналогичная формула предсказания фазы предложена в работах [35, 36] для двумерного случая, в работе [36] также предложены другие формулы для предсказания фазы. Мера локальной фазовой когерентности в точке  $i$  вычисляется по формуле [36, 14]:

$$LPC(i) = \frac{\sum |c_i| \cos(\Phi(c_i) - \hat{\Phi}(c_i))}{\sum |c_i|},$$

где  $c_i$  – результат вейвлет-преобразования,  $\Phi(c_i)$  – фаза вейвлет-преобразования в точке  $i$ ,  $\hat{\Phi}(c_i)$  – предсказанная фаза в точке  $i$ ,  $\theta$  определяет ориентацию вейвлета (в двумерном случае). Отметим, что в двумерном случае  $c_i$  зависит также от  $\theta$ . В одномерном случае  $c_i = F(1, i)$  и суммирование отсутствует. Чем больше значение меры локальной фазовой когерентности, тем более вероятно, что в данной точке сигнал имеет особенность. Мера локальной фазовой когерентности устойчива к сдвигам, поворотам, масштабам

бированию изображений, а также к присутствию белого шума на изображении [14].

Отличие метода локальной фазовой когерентности (LPC) от метода фазовой конгруэнтности (PC) состоит в том, что в методе LPC происходит предсказание фазы вейвлет-преобразования в исследуемой точке на основе информации о фазе вейвлет-преобразования в окрестных точках (для других параметров масштаба), а в методе PC используется информация о фазе вейвлет-преобразования только в исследуемой точке, на разных уровнях масштаба [36].

Метод локальной фазовой когерентности применяется для определения уровня размытия изображений [35], для оценки резкости изображений [36] (рис. 14), в задачах интеллектуального слияния изображений различной резкости, фокусировки и контрастности [14, 69], совмещения изображений [17, 69].

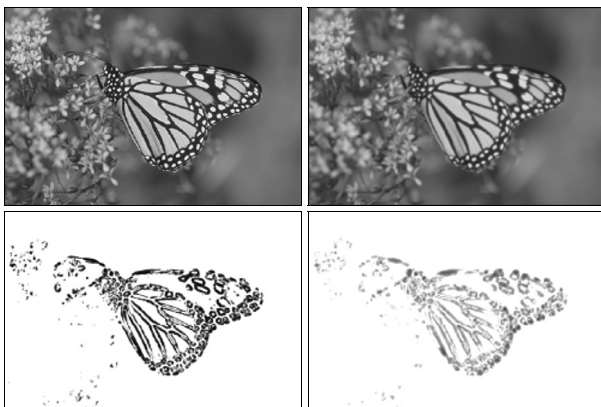


Рис. 14. Сверху слева – изображение с резкими контурами, сверху справа – размытое изображение. Снизу – визуализация их меры локальной фазовой когерентности LPC [36] (приведены негативы полученных изображений)

**4. Метод локального фазового квантования (Local phase quantization)**

В методе фазового квантования происходит квантование фазы комплексной функции, полученной в результате преобразования Фурье [70] либо некоторого локального преобразования [6, 49]. Квантование может происходить по схемам, представленным на рис. 15: значения фазы заменяются на другие значения из заданного конечного множества [6, 70] либо в зависимости от значения фазы происходит кодирование информации [25, 49]. В некоторых алгоритмах кодирование информации происходит на основе метода локальных бинарных шаблонов (Local Binary Patterns, LBP) [49, 71–73].

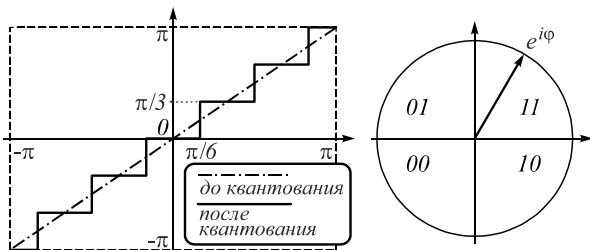


Рис. 15. Примеры квантования фазы

Метод локального фазового квантования часто применяется при решении биометрических задач (рис. 16) [25, 26, 30, 72–74], а также для нахождения контуров на изображениях [6, 75] (рис. 17), для построения дескрипторов текстур, устойчивых к наличию размытия на изображениях [49, 76], для оценки качества изображений [11].



Рис. 16. Пример квантования фазы оконного преобразования Фурье изображения лица [73]

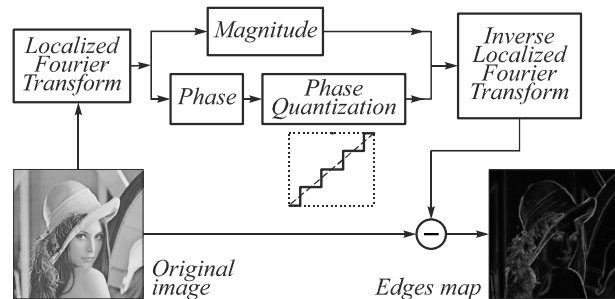


Рис. 17. Схема применения метода локального фазового квантования для нахождения контуров на изображении [75]

**5. Метод глобальной фазовой когерентности (Global phase coherence)**

В методе глобальной фазовой когерентности [37] вычисляется вероятность того, что изображение  $u_\psi$  с измененной фазой будет более правдоподобным, чем заданное изображение  $u$ . Изображение  $u_\psi$  считается более правдоподобным, чем заданное изображение  $u$  (рис. 18), если его полная вариация ( $TV$ ) [77] меньше полной вариации заданного изображения:  $TV(u_\psi) < TV(u)$ . Для заданного изображения вычисляется амплитуда и фаза преобразования Фурье. Далее рассматриваются всевозможные изображения с заданной (фиксированной) амплитудой ПФ и вычисляется отношение количества изображений, не менее правдоподобных, чем заданное изображение, к общему числу изображений:

$$GPC(u) = -\lg \left( \frac{|\{\psi \in P : TV(u_\psi) \leq TV(u)\}|}{|P|} \right),$$

где  $P$  – множество всех нечётных фазовых функций (фаза ПФ вещественной функции – нечётная), для любого множества  $S$  символом  $|S|$  обозначается мощность данного множества.

Метод глобальной фазовой когерентности (GPC) используется в задачах определения резкости изображений (рис. 19) [37], «слепого» обращения свёртки

(*blind deconvolution*) [38], а также для определения меры близости изображений [10].

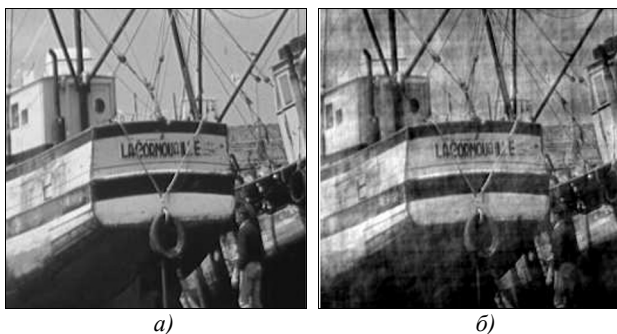


Рис. 18. Изображения с одинаковой амплитудой ПФ [37]:  $TV = 19,76$  (а);  $TV = 22,47$  (б)

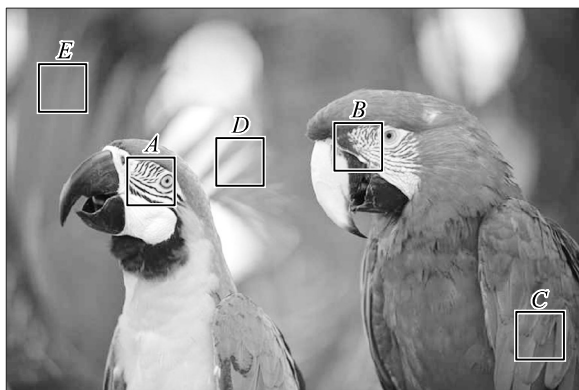


Рис. 19. Пример применения метода глобальной фазовой когерентности [37]. В выделенных областях А, В и С метод GPC определил резкие контуры, а в областях D и E определил размытие

**6. Восстановление изображений по фазе**

В работах [3, 54] представлены теоремы единственности восстановления дискретного сигнала по фазе его преобразования Фурье. Условия этих теорем основаны на информации о нулях  $z$ -преобразования дискретного сигнала. Эти условия являются трудно-проверяемыми на практике, поскольку поиск нулей  $z$ -преобразования является вычислительно трудоёмкой задачей. Другой критерий единственности восстановления функции по фазе её преобразования Фурье предложен в работе [55]. Для функции  $f(n)$  аргумента  $n = 0, 1, \dots, N-1$  строится матрица размера  $(N-1) \times (N-1)$  и доказывается, что условие невырожденности этой матрицы является необходимым и достаточным условием единственности восстановления функции по фазе её преобразования Фурье. Вычисление определителя матрицы размера  $(N-1) \times (N-1)$  при больших  $N$  также является вычислительно трудоёмкой задачей и не применяется на практике для проверки возможности восстановления функции по фазе.

В работах [3, 54, 56, 57] предложены итерационные алгоритмы восстановления функции по фазе. Наиболее часто на практике применяется итерационный алгоритм [54], в котором на первом шаге каждой итерации к функции применяются ограничения в частотной области, а на втором шаге – в пространственной (рис. 20). Также в работе [54] доказано, что

погрешность после каждой итерации не увеличивается, а в работе [78] доказано, что данный итерационный алгоритм сходится. Восстановление дискретной функции  $f(n), n = 0, 1, \dots, N-1$  происходит по фазе дискретного преобразования Фурье другой функции, совпадающей с  $f(n)$  в  $N$  точках и продолженной по длине нулями не менее чем в два раза (до длины  $M \geq 2N$ ) [54]. В работах [56, 57] предложена модификация этого алгоритма, основанная на методе проекций на выпуклые множества. Также в работах [54, 55] предложены аналитические методы восстановления сигналов по фазе.

В работе [59] представлены условия единственности восстановления изображений по фазе комплексного вейвлет-преобразования, а в работе [24] предложен итерационный алгоритм восстановления испорченных частей изображений на основе интерполирования фазы и амплитуды комплексного вейвлет-преобразования (рис. 21).

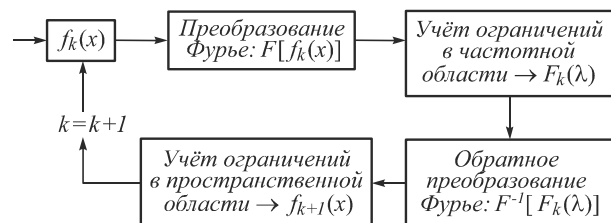


Рис. 20. Схема итерационного алгоритма восстановления сигналов по фазе преобразования Фурье

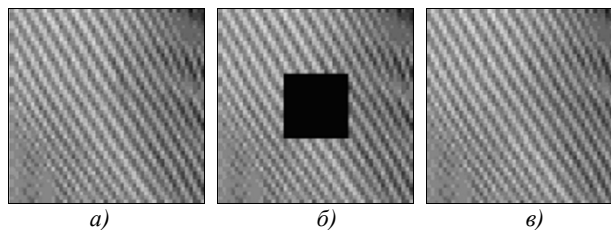


Рис. 21. Исходное изображение (а); изображение с испорченной частью (б); результат работы алгоритма восстановления испорченных частей изображений [24] (в)

**7. Фаза аппроксимации преобразования Фурье с использованием функций Эрмита**

В работах [60, 61] предлагается использовать фазовую информацию, полученную на основе проекционного метода Эрмита. В проекционном методе Эрмита [63, 79] вычисляется аппроксимация

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(x)$$

разложения функции  $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  в ряд Фурье по функциям Эрмита  $\psi_k(x)$ . Эффективность использования проекционного метода Эрмита обусловлена тем, что функции Эрмита [80] являются собственными функциями преобразования Фурье:  $F[\psi_k] = (-i)^k \psi_k$ ; образуют полную ортонормированную систему функций в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$ ; являются локализованными с вычислительной точки зрения на конечном отрезке как в пространственной, так и в частотной областях.

Выражение

$$HFT_{f,n}(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k (-i)^k \psi_k(\lambda) = A_{f,n}(\lambda) \cdot e^{i\phi_{f,n}(\lambda)}$$

называется аппроксимацией преобразования Фурье с использованием функций Эрмита (АПФЭ) функции  $f(x)$ , а  $A_{f,n}(\lambda)$  и  $\phi_{f,n}(\lambda)$  – амплитудой и фазой АПФЭ соответственно [60].

В работе [60] показано, что фаза АПФЭ содержит больше информации об изображении, чем амплитуда АПФЭ (рис. 22). Исследована однозначность восстановления функции по фазе АПФЭ и предложен итерационный алгоритм восстановления функции по фазе АПФЭ (рис. 23). При этом в задаче восстановления [61] используется фаза АПФЭ исходного сигнала без добавления нулей. Фаза АПФЭ является фазой преобразования Фурье локализованного с вычислительной точки зрения и сглаженного сигнала (аппроксимации  $f_n(x)$ ), поэтому результат работы алгоритма с использованием фазы АПФЭ может оказаться лучше, чем при использовании фазы преобразования Фурье (рис. 22, рис. 24).



Рис. 22. Сверху – изображения «Lena» и «Peppers»; снизу слева – синтез фазы ПФ «Lena» и амплитуды ПФ «Peppers»; снизу справа – синтез фазы АПФЭ «Lena» и амплитуды АПФЭ «Peppers»



Рис. 23. Аппроксимация исходного изображения (а); результат восстановления изображения по фазе АПФЭ после 100 итераций (б); после 2000 итераций (в)

На основе фазы АПФЭ в работах [62, 64] предложен метод проекционной фазовой корреляции (НРРОС – *Hermite Projection Phase-Only Correlation*) для определения меры близости двух функций. Метод НРРОС можно применять для поиска соответствий между изображениями, в частности, данный метод применяется для поиска соответствий между ключевыми точками изображений радужной оболоч-

ки глаза. При этом показано [64], что в случае изображений небольшого размера метод проекционной фазовой корреляции даёт более точные результаты, чем метод фазовой корреляции (рис. 24).

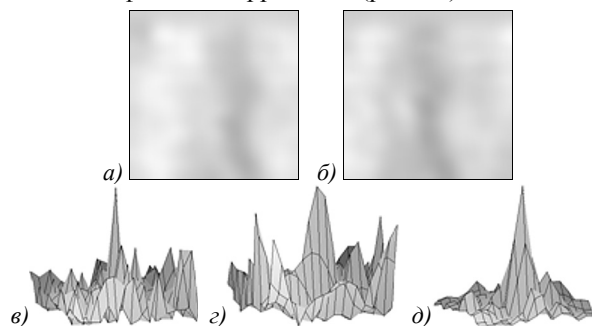


Рис. 24. Соответствующие друг другу части изображений радужной оболочки одного глаза размера  $16 \times 16$  пикселей (а, б); РОС-функция (в); ВЛРОС-функция (г); НРРОС-функция (д)

### Заключение

В работе представлен обзор алгоритмов обработки, анализа и восстановления изображений, использующих информацию о фазе. Предложено перспективное направление применения фазовой информации на основе проекционного метода Эрмита.

### Литература

1. Павельева, Е.А. Использование фазовой информации в обработке изображений / Е.А. Павельева // Труды международной конференции по компьютерной графике и зрению GraphiCon2016. – 2016. – С. 476-483.
2. Bonnet, N. Image analysis: Is the Fourier transform becoming obsolete? / N. Bonnet, P. Vautrot // Microscopy Microanalysis Microstructures. – 1997. – Vol. 8, Issue 1. – P. 59-75. – DOI: 10.1051/mmm:1997106.
3. Oppenheim, A.V. The importance of phase in signals / A.V. Oppenheim, J.S. Lim // Proceedings of the IEEE. – 1981. – Vol. 69, Issue 5. – P. 529-541. – DOI: 10.1109/PROC.1981.12022.
4. Ni, X. Statistical interpretation of the importance of phase information in signal and image reconstruction / X. Ni, X. Huo // Statistics and Probability Letters. – 2007. – Vol. 77, Issue 4. – P. 447-454. – DOI: 10.1016/j.spl.2006.08.025.
5. Guo, C. Spatio-temporal Saliency detection using phase spectrum of quaternion Fourier transform / C. Guo, Q. Ma, L. Zhang // 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2008. – P. 1-8. – DOI: 10.1109/CVPR.2008.4587715.
6. Skarbnik, N. Edge detection and skeletonization using quantized localized phase / N. Skarbnik, C. Sagiv, Y.Y. Zeevi // 2009 17th European Signal Processing Conference. – 2009. – P. 1542-1546.
7. Asghari, M.H. Edge detection in digital images using dispersive phase stretch transform / M.H. Asghari, B. Jalali // International Journal of Biomedical Imaging. – 2015. – Vol. 2015. – 687819 (6 p.). – DOI: 10.1155/2015/687819.
8. Kovese, P. Phase congruency detects corners and edges / P. Kovese // Proceedings of the Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA). – 2003. – P. 309-318.
9. Narwaria, M. Fourier transform-based scalable image quality measure / M. Narwaria, W. Lin, I.V. McLoughlin,

- S. Emmanuel, L.-T. Chia // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2012. – Vol. 21, Issue 8. – P. 3364-3377. – DOI: 10.1109/TIP.2012.2197010.
10. **Wang, D.** A joint image quality assessment method based on global phase coherence and structural similarity / D. Wang, W. Ding, Y. Man, L. Cui // 2010 3<sup>rd</sup> International Congress on Image and Signal Processing. – 2010. – Vol. 5. – P. 2307-2311. – DOI: 10.1109/CISP.2010.5647786.
  11. **Kim, D.-O.** Image quality measure using the phase quantization code / D.-O. Kim, R.-H. Park // *IEEE Transactions on Consumer Electronics*. – 2010. – Vol. 56, Issue 2. – P. 937-945. – DOI: 10.1109/TCE.2010.5506023.
  12. **Zhai, G.** LGPS: Phase based image quality assessment metric / G. Zhai, W. Zhang, Y. Xu, W. Lin // *IEEE Workshop on Signal Processing Systems*. – 2007. – P. 605-609. – DOI: 10.1109/SIPS.2007.4387618.
  13. **Li, L.** Image fusion based on fractional Fourier domain phase and amplitude / L. Li, Q. Zou, Q. Huang, Y. Zhang, F. Wang // *Proceedings of SPIE*. – 2015. – Vol. 9443. – 94431B. – DOI: 10.1117/12.2179513.
  14. **Hassen, R.** Multifocus image fusion using local phase coherence measurement / R. Hassen, Z. Wang, M. Salama. – In: *Image Analysis and Recognition* / ed. by M. Kamel, A. Campilho. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. – P. 54-63. – DOI: 10.1007/978-3-642-02611-9\_6.
  15. **Zhan, K.** Multifocus image fusion using phase congruency / K. Zhan, Q. Li, J. Teng, M. Wang, J. Shi // *Journal of Electronic Imaging*. – 2015. – Vol. 24, Issue 3. – 033014. – DOI: 10.1117/1.JEI.24.3.033014.
  16. **Woo, J.** Non-rigid ultrasound image registration based on intensity and local phase information / J. Woo, B.-W. Hong, C.-H. Hu, K.K. Shung, C.-C.J. Kuo, P.J. Slomka // *Journal of Signal Processing Systems*. – 2009. – Vol. 54, Issues 1-3. – P. 33-43. – DOI: 10.1007/s11265-008-0218-2.
  17. **Hassen, R.** Multi-sensor image registration based-on local phase coherence / R. Hassen, Z. Wang, M. Salama // 16<sup>th</sup> IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). – 2009. – P. 181-184. – DOI: 10.1109/ICIP.2009.5414187.
  18. **Mellor, M.** Non-rigid multimodal image registration using local phase / M. Mellor, M. Brady. – In: *Medical image computing and computer-assisted intervention (MICCAI '2004)* / ed. by Ch. Barillot, D.R. Haynor, P. Hellier. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – P. 789-796. – DOI: 10.1007/978-3-540-30135-6\_96.
  19. **Reddy, B.S.** An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration / B.S. Reddy, B.N. Chatterji // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 1996. – Vol. 5, Issue 8. – P. 1266-1271. – DOI: 10.1109/83.506761.
  20. **Wong, A.** Robust multimodal registration using local phase-coherence representations / A. Wong, J. Orchard // *Journal of Signal Processing Systems*. – 2009. – Vol. 54, Issues 1-3. – P. 89-100. – DOI: 10.1007/s11265-008-0202-x.
  21. **Foroosh, H.** Extension of phase correlation to subpixel registration / H. Foroosh, J.B. Zerubia, M. Berthod // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2002. – Vol. 11, Issue 3. – P. 188-200. – DOI: 10.1109/83.988953.
  22. **Lai, L.** Global motion estimation based on Fourier Mellin and phase correlation / L. Lai, Z. Xu // 2<sup>nd</sup> International Conference on Civil, Materials and Environmental Sciences (CMES 2015). – 2015. – P. 636-639. – DOI: 10.2991/cmcs-15.2015.173.
  23. **Alexiadis, D.S.** Motion estimation, segmentation and separation, using hypercomplex phase correlation, clustering techniques and graph-based optimization / D.S. Alexiadis, G.D. Sergiadis // *Computer Vision and Image Understanding*. – 2009. – Vol. 113, Issue 2. – P. 212-234. – DOI: 10.1016/j.cviu.2008.08.013.
  24. **Hua, G.** Image inpainting based on geometrical modeling of complex wavelet coefficients / G. Hua, M.T. Orchard // *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. – 2007. – Vol. 1. – P. 553-556. – DOI: 10.1109/ICIP.2007.4379014.
  25. **Daugman, J.G.** High confidence visual recognition of persons by a test of statistical independence / J.G. Daugman // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. – 1993. – Vol. 15, Issue 11. – P. 1148-1161. – DOI: 10.1109/34.244676.
  26. **Daugman, J.** How iris recognition works / J. Daugman // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. – 2004. – Vol. 14, Issue 1. – P. 21-30. – DOI: 10.1109/TCSVT.2003.818350.
  27. **Ito, K.** Phase-based image matching and its application to biometric recognition / K. Ito, T. Aoki // *Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA)*. – 2013. – P. 1-7. – DOI: 10.1109/APSIPA.2013.6694297.
  28. **Miyazawa, K.** A phase-based iris recognition algorithm / K. Miyazawa, K. Ito, T. Aoki, K. Kobayashi, H. Nakajima. – In: *Advances in biometrics* / ed. by D. Zhang, A.K. Jain. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. – P. 356-365. – DOI: 10.1007/11608288\_48.
  29. **Asaari, M.S.M.** Fusion of band limited phase only correlation and width centroid contour distance for finger based biometrics / M.S.M. Asaari, S.A. Suandi, B.A. Rosdi // *Expert Systems with Applications*. – 2014. – Vol. 41, Issue 7. – P. 3367-3382. – DOI: 10.1016/j.eswa.2013.11.033.
  30. **Chan, C.H.** Multiscale local phase quantization for robust component-based face recognition using kernel fusion of multiple descriptors / C.H. Chan, M.A. Tahir, J. Kittler, M. Pietikainen // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. – 2013. – Vol. 35, Issue 5. – P. 1164-1177. – DOI: 10.1109/TPAMI.2012.199.
  31. **Punsawad, Y.** Palmprint image enhancement using phase congruency / Y. Punsawad, Y. Wongsawat // *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. – 2009. – P. 1643-1646. – DOI: 10.1109/ROBIO.2009.4913247.
  32. **Rida, I.** Gait recognition based on modified phase-only correlation / I. Rida, S. Almaadeed, A. Bouridane // *Signal, Image and Video Processing*. – 2016. – Vol. 10, Issue 3. – P. 463-470. – DOI: 10.1007/s11760-015-0766-4.
  33. **Raja, K.B.** Video presentation attack detection in visible spectrum iris recognition using magnified phase information / K.B. Raja, R. Raghavendra, C. Busch // *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*. – 2015. – Vol. 10, Issue 10. – P. 2048-2056. – DOI: 10.1109/TIFS.2015.2440188.
  34. **Saratxaga, I.** Synthetic speech detection using phase information / I. Saratxaga, J. Sanchez, Z. Wu, I. Hernaez, E. Navas // *Speech Communication*. – 2016. – Vol. 81, Issue C. – P. 30-41. – DOI: 10.1016/j.specom.2016.04.001.
  35. **Wang, Z.** Local phase coherence and the perception of blur / Z. Wang, E.P. Simoncelli // *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Neural Information Processing Systems*. – 2004. – P. 1435-1442.
  36. **Hassen, R.** Image sharpness assessment based on local phase coherence / R. Hassen, Z. Wang, M.M. Salama // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2013. – Vol. 22, Issue 7. – P. 2798-2810. – DOI: 10.1109/TIP.2013.2251643.
  37. **Blanchet, G.** Measuring the global phase coherence of an image / G. Blanchet, L. Moisan, B. Rougé // 15<sup>th</sup> IEEE In-



- ternational Conference on Image Processing. – 2008. – P. 1176-1179. – DOI: 10.1109/ICIP.2008.4711970.
38. **Blanchet, G.** An explicit sharpness index related to global phase coherence / G. Blanchet, L. Moisan // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). – 2012. – P. 1065-1068. – DOI: 10.1109/ICASSP.2012.6288070.
  39. **Tiwari, S.** A blind blur detection scheme using statistical features of phase congruency and gradient magnitude / S. Tiwari, V.P. Shukla, S.R. Biradar, A.K. Singh // Advances in Electrical Engineering. – 2014. – Vol. 2014. – 521027 (10 p.). – DOI: 10.1155/2014/521027.
  40. **Kovesi, P.** Phase preserving denoising of images / P. Kovesi // Proceedings of the digital image computing: Techniques and applications (DICTA). – 1999. – P. 212-217.
  41. **Wong, A.** Adaptive bilateral filtering of image signals using local phase characteristics / A. Wong // Signal Processing. – 2008. – Vol. 88, Issue 6. – P. 1615-1619. – DOI: 10.1016/j.sigpro.2008.01.002.
  42. **Belaid, A.** Phase-based level set segmentation of ultrasound images / A. Belaid, D. Boukerroui, Y. Maingourd, J.-F. Lerallut // IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine. – 2011. – Vol. 15, Issue 1. – P. 138-147. – DOI: 10.1109/TITB.2010.2090889.
  43. **Hacihaliloglu, I.** Bone segmentation and fracture detection in ultrasound using 3D local phase features / I. Hacihaliloglu, R. Abugharbieh, A. Hodgson, R. Rohling. – In: Medical image computing and computer-assisted intervention (MICCAI 2008) / ed. by D. Metaxas, L. Axel, G. Fichtinger, G. Székely. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – P. 287-295. – DOI: 10.1007/978-3-540-85988-8\_35.
  44. **Weng, J.J.** Image matching using the windowed Fourier phase / J.J. Weng // International Journal of Computer Vision. – 1993. – Vol. 11, Issue 3. – P. 211-236. – DOI: 10.1007/BF01469343.
  45. **Zhou, J.** Quaternion wavelet phase based stereo matching for uncalibrated images / J. Zhou, Y. Xu, X. Yang // Pattern Recognition Letter. – 2007. – Vol. 28, Issue 12. – P. 1509-1522. – DOI: 10.1016/j.patrec.2007.03.009.
  46. **Nagashima, S.** A subpixel image matching technique using phase-only correlation / S. Nagashima, T. Aoki, T. Higuchi, K. Kobayashi // International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communications (ISPACS'06). – 2006. – P. 701-704. – DOI: 10.1109/ISPACS.2006.364751.
  47. **Reddy, V.** Color image registration and template matching using quaternion phase correlation / V. Reddy, J. Talari // Ubiquitous Computing and Communication. – 2011. – Vol. 6, Issue 1. – P. 714-721.
  48. **Jing, X.** Medical image mosaic technology based on image phase correlation / X. Jing, Y.X. Hong, S.X. Xin, M.X. Ying // IEEE 4<sup>th</sup> International Conference on Digital Home (ICDH). – 2012. – P. 274-277. – DOI: 10.1109/ICDH.2012.51.
  49. **Rahtu, E.** Local phase quantization for blur-insensitive image analysis / E. Rahtu, J. Heikkilä, V. Ojansivu, T. Ahonen // Image and Vision Computing. – 2012. – Vol. 30, Issue 8. – P. 501-512. – DOI: 10.1016/j.imavis.2012.04.001.
  50. **Wang, Z.** Translation insensitive image similarity in complex wavelet domain / Z. Wang, E.P. Simoncelli // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP). – 2005. – P. 573-576. – DOI: 10.1109/ICASSP.2005.1415469.
  51. **Liu, Z.** On the use of phase congruency to evaluate image similarity / Z. Liu, R. Laganier // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). – 2006. – P. 937-940. – DOI: 10.1109/ICASSP.2006.1660498.
  52. Восстановление изображений / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
  53. Реконструкция изображений / под ред. Г. Старка, пер. с англ. – М.: Мир, 1992. – 636 с.
  54. **Hayes, M.H.** Signal reconstruction from phase or magnitude / M.H. Hayes, J.S. Lim, A.V. Oppenheim // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1980. – Vol. 28, Issue 6. – P. 672-680. – DOI: 10.1109/TASSP.1980.1163463.
  55. **Ma, C.** Novel criteria of uniqueness for signal reconstruction from phase / C. Ma // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1991. – Vol. 39, Issue 4. – P. 989-992. – DOI: 10.1109/78.80933.
  56. **Levi, A.** Signal restoration from phase by projections onto convex sets / A. Levi, H. Stark // Journal of the Optical Society of America. – 1983. – Vol. 73, Issue 6. – P. 810-822. – DOI: 10.1364/JOSA.73.000810.
  57. **Urieli, S.** Optimal reconstruction of images from localized phase / S. Urieli, M. Porat, N. Cohen // IEEE Transactions on Image Processing. – 1998. – Vol. 7, Issue 6. – P. 838-853. – DOI: 10.1109/83.679428.
  58. **Petropulu, A.P.** Signal reconstruction from the phase of the bispectrum / A.P. Petropulu, C.L. Nikias // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1992. – Vol. 40, Issue 3. – P. 601-610. – DOI: 10.1109/78.120803.
  59. **Hua, G.** Image reconstruction from the phase or magnitude of its complex wavelet transform / G. Hua, M.T. Orchard // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). – 2008. – P. 3261-3264. – DOI: 10.1109/ICASSP.2008.4518346.
  60. **Pavelyeva, E.A.** Synthesis of phase and magnitude of images by Hermite projection method / E.A. Pavelyeva, A.S. Krylov // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2015. – Vol. 25, Issue 2. – P. 187-192. – DOI: 10.1134/S1054661815020200.
  61. **Павельева, Е.А.** Аппроксимация фазы проекционным методом Эрмита при восстановлении изображения по фазе / Е.А. Павельева, А.С. Крылов // Труды международной конференции GraphiCon. – 2014. – С. 131-134.
  62. **Павельева, Е.А.** Поиск соответствий между ключевыми точками изображений радужных оболочек глаз с помощью метода проекционной фазовой корреляции / Е.А. Павельева // Системы и средства информатики. – 2013. – Т. 23, № 2. – С. 74-88. – DOI: 10.14357/08696527130206.
  63. **Korchagine, D.N.** Projection filtering in image processing / D.N. Korchagine, A.S. Krylov // Proceedings of the International Conference GraphiCon. – 2000. – P. 42-45.
  64. **Павельева, Е.А.** Определение локальных сдвигов изображений радужных оболочек глаз методом проекционной фазовой корреляции / Е.А. Павельева, А.С. Крылов // Труды международной конференции GraphiCon. – 2011. – С. 188-191.
  65. **Pavelyeva, E.A.** An adaptive algorithm of iris image key points detection / E.A. Pavelyeva, A.S. Krylov // Proceedings of the International Conference GraphiCon. – 2010. – P. 320-323.
  66. **Kovesi, P.** Image features from phase congruency / P. Kovesi // Videre: Journal of Computer Vision Research. – 1999. – Vol. 1, Issue 3. – P. 1-26.
  67. **Morrone, M.C.** Feature detection from local energy / M.C. Morrone, R.A. Owens // Pattern Recognition Letters. – 1987. – Vol. 6, Issue 5. – P. 303-313. – DOI: 10.1016/0167-8655(87)90013-4.

68. Venkatesh, S. On the classification of image features / S. Venkatesh, R.A. Owens // Pattern Recognition Letters. – 1990. – Vol. 11, Issue 5. – P. 339-349. – DOI: 10.1016/0167-8655(90)90043-2.
69. Hassen, R.K.M. Local phase coherence measurement for image analysis and processing : Ph. D. thesis / R.K.M. Hassen. – Waterloo, Ontario, Canada; 2013. – 99 p.
70. Goodman, J.W. Some effects of Fourier-domain phase quantization / J.W. Goodman, A.M. Silvestri // IBM Journal of Research and Development. – 1970. – Vol. 14, Issue 5. – P. 478-484. – DOI: 10.1147/rd.145.0478.
71. Zhang, B. Histogram of gabor phase patterns (HGPP): A novel object representation approach for face recognition / B. Zhang, S. Shan, X. Chen, W. Gao // IEEE Transactions on Image Processing. – 2007. – Vol. 16, Issue 1. – P. 57-68. – DOI: 10.1109/TIP.2006.884956.
72. Xie, S. Fusing local patterns of gabor magnitude and phase for face recognition / S. Xie, S. Shan, X. Chen, J. Chen // IEEE Transactions on Image Processing. – 2010. – Vol. 19, Issue 5. – P. 1349-1361. – DOI: 10.1109/TIP.2010.2041397.
73. Zhou, S.-R. Local binary pattern (LBP) and local phase quantization (LBQ) based on Gabor filter for face representation / S.-R. Zhou, J. Yin, J.-M. Zhang // Neurocomputing. – 2013. – Vol. 116. – P. 260-264. – DOI: 10.1016/j.neucom.2012.05.036.
74. Lei, Z. Fast multi-scale local phase quantization histogram for face recognition / Z. Lei, S.Z. Li // Pattern Recognition Letters. – 2012. – Vol. 33, Issue 13. – P. 1761-1767. – DOI: 10.1016/j.patrec.2012.06.005.
75. Skarbnik, N. The importance of phase in image processing / N. Skarbnik, Y.Y. Zeevi, C. Sagiv. – CCIT Technical Report #773. – Haifa, Israel: Department of Electrical Engineering, Israel Institute of Technology, 2010. – 30 p.
76. Ojansivu, V. Blur insensitive texture classification using local phase quantization / V. Ojansivu, J. Heikkilä. – In: Image and Signal Processing / ed. by A. Elmoataz, O. Lezoray, F. Nouboud, D. Mammass. – 2008. – P. 236-243. – DOI: 10.1007/978-3-540-69905-7\_27.
77. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла, пер. с англ. – М: Мир, 2005. – 671 с.
78. Tom, V. Convergence of iterative nonexpansive signal reconstruction algorithms / V. Tom, T.F. Quatieri, M.H. Hayes, J.H. McClellan // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 1981. – Vol. 29, Issue 5. – P. 1052-1058. – DOI: 10.1109/TASSP.1981.1163681.
79. Krylov, A.S. Fast Hermite projection method / A.S. Krylov, D.N. Korchagin. – In: Image Analysis and Recognition / ed. by A. Campilho, M.S. Kamel. – 2006. – P. 329-338. – DOI: 10.1007/11867586\_31.
80. Титчмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш, пер. с англ. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. – 479 с.

#### Сведения об авторе

**Павельева Елена Александровна**, 1986 года рождения, в 2008 году окончила Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова по специальности «Прикладная математика и информатика», к.ф.-м.н., ассистент кафедры математической физики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов: математические методы обработки изображений и компьютерного зрения, биометрия. E-mail: [paveljeva@yandex.ru](mailto:paveljeva@yandex.ru).

ГРПТИ: 28.23.15

Поступила в редакцию 6 декабря 2017 г. Окончательный вариант – 3 октября 2018 г.

## IMAGE PROCESSING AND ANALYSIS BASED ON THE USE OF PHASE INFORMATION

E.A. Pavelyeva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, Russia

### Abstract

The paper provides a review of main approaches to the use of phase information in image analysis, processing and reconstruction. The description of phase algorithms and examples of their use are given. A technique of the use of phase information based on the Hermite projection method is proposed.

**Keywords:** phase, Fourier transform, image reconstruction, phase correlation, phase congruency, Hermite projection method.

**Citation:** Pavelyeva EA. Image processing and analysis based on the use of phase information. Computer Optics 2018; 42(6): 1022-1034. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-1022-1034.

### References

- [1] Pavelyeva EA. The use of phase information in image processing [In Russian]. Proceedings of the International Conference GraphiCon2016 2016; 476-483.
- [2] Bonnet N, Vautrot P. Image analysis: Is the Fourier transform becoming obsolete? Microsc Microanal Microstruct 1997; 8(1): 59-75. DOI: 10.1051/mm:1997106.
- [3] Oppenheim AV, Lim JS. The importance of phase in signals. Proceedings of the IEEE 1981; 69(5): 529-541. DOI: 10.1109/PROC.1981.12022.
- [4] Ni X, Huo X. Statistical interpretation of the importance of phase information in signal and image reconstruction. Statistics & Probability Letters 2007; 77(4): 447-454. DOI: 10.1016/j.spl.2006.08.025.
- [5] Guo C, Ma Q, Zhang L. Spatio-temporal Saliency detection using phase spectrum of quaternion Fourier transform. 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition 2008: 1-8. DOI: 10.1109/CVPR.2008.4587715.
- [6] Skarbnik N, Sagiv C, Zeevi YY. Edge detection and skeletonization using quantized localized phase. 17th European Signal Processing Conference 2009; 1542-1546.
- [7] Asghari MH, Jalali B. Edge detection in digital images using dispersive phase stretch transform. International Jour-

- nal of Biomedical Imaging 2015; 2015: 687819. DOI: 10.1155/2015/687819.
- [8] Kovesi P. Phase congruency detects corners and edges. *Proc Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA) 2003*; 309-318.
- [9] Narwaria M, Lin W, McLoughlin IV, Emmanuel S, Chia L-T. Fourier transform-based scalable image quality measure. *IEEE Transactions on Image Processing* 2012; 21(8): 3364-3377. DOI: 10.1109/TIP.2012.2197010.
- [10] Wang D, Ding W, Man Y, Cui L. A joint image quality assessment method based on global phase coherence and structural similarity. *2010 3<sup>rd</sup> International Congress on Image and Signal Processing 2010*; 5: 2307-2311. DOI: 10.1109/CISP.2010.5647786.
- [11] Kim D-O, Park R-H. Image quality measure using the phase quantization code. *IEEE Transactions on Consumer Electronics* 2010; 56(2): 937-945. DOI: 10.1109/TCE.2010.5506023.
- [12] Zhai G, Zhang W, Xu Y, Lin W. LGPS: Phase based image quality assessment metric. *IEEE Workshop on Signal Processing Systems* 2007; 605-609. DOI: 10.1109/SIPS.2007.4387618.
- [13] Li L, Zou Q, Huang Q, Zhang Y, Wang F. Image fusion based on fractional Fourier domain phase and amplitude. *Proc SPIE* 2015; 9443: 94431B. DOI: 10.1117/12.2179513.
- [14] Hassen R, Wang Z, Salama M. Multifocus image fusion using local phase coherence measurement. In: Kamel M, Campilho A, eds. *Image Analysis and Recognition*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2009: 54-63. DOI: 10.1007/978-3-642-02611-9\_6.
- [15] Zhan K, Li Q, Teng J, Wang M, Shi J. Multifocus image fusion using phase congruency. *J Electron Imag* 2015; 24(3): 033014. DOI: 10.1117/1.JEI.24.3.033014.
- [16] Woo J, Hong B-W, Hu C-H, Shung KK, Kuo C-CJ, Slomka PJ. Non-rigid ultrasound image registration based on intensity and local phase information. *Journal of Signal Processing Systems* 2009; 54(1-3): 33-43. DOI: 10.1007/s11265-008-0218-2.
- [17] Hassen R, Wang Z, Salama M. Multi-sensor image registration based on local phase coherence. *16<sup>th</sup> IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) 2009*; 181-184. DOI: 10.1109/ICIP.2009.5414187.
- [18] Mellor M, Brady M. Non-rigid multimodal image registration using local phase. In Book: Barillot Ch, Haynor DR, Hellier P, eds. *Medical image computing and computer-assisted intervention (MICCAI '2004)*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2004: 789-796. DOI: 10.1007/978-3-540-30135-6\_96.
- [19] Reddy BS, Chatterji BN. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration. *IEEE Transactions on Image Processing* 1996; 5(8): 1266-1271. DOI: 10.1109/83.506761.
- [20] Wong A, Orchard J. Robust multimodal registration using local phase-coherence representations. *J Sign Process Syst* 2009; 54(1-3): 89-100. DOI: 10.1007/s11265-008-0202-x.
- [21] Foroosh H, Zerubia JB, Berthod M. Extension of phase correlation to subpixel registration. *IEEE Transactions on Image Processing* 2002; 11(3): 188-200. DOI: 10.1109/83.988953.
- [22] Lai L, Xu Z. Global motion estimation based on Fourier Mellin and phase correlation. *2<sup>nd</sup> International Conference on Civil, Materials and Environmental Sciences (CMES 2015) 2015*; 636-639. DOI: 10.2991/cmcs-15.2015.173.
- [23] Alexiadis DS, Sergiadis GD. Motion estimation, segmentation and separation, using hypercomplex phase correlation, clustering techniques and graph-based optimization. *Computer Vision and Image Understanding* 2009; 113(2): 212-234. DOI: 10.1016/j.cviu.2008.08.013.
- [24] Hua G, Orchard MT. Image inpainting based on geometrical modeling of complex wavelet coefficients. *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP) 2007*; 1: 553-556. DOI: 10.1109/ICIP.2007.4379014.
- [25] Daugman JG. High confidence visual recognition of persons by a test of statistical independence. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 1993; 15(11): 1148-1161. DOI: 10.1109/34.244676.
- [26] Daugman J. How iris recognition works. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology* 2004; 14(1): 21-30. DOI: 10.1109/TCSVT.2003.818350.
- [27] Ito K, Aoki T. Phase-based image matching and its application to biometric recognition. *Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA) 2013*: 1-7. DOI: 10.1109/APSIPA.2013.6694297.
- [28] Miyazawa K, Ito K, Aoki T, Kobayashi K, Nakajima H. A phase-based iris recognition algorithm. In Book: Zhang D, Jain AK, eds. *Advances in biometrics*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2006; 3832: 356-365. DOI: 10.1007/11608288\_48.
- [29] Asaari MSM, Suandi SA, Rosdi BA. Fusion of band limited phase only correlation and width centroid contour distance for finger based biometrics. *Expert Systems with Applications* 2014; 41(7): 3367-3382. DOI: 10.1016/j.eswa.2013.11.033.
- [30] Chan CH, Tahir MA, Kittler J, Pietikainen M. Multiscale local phase quantization for robust component-based face recognition using kernel fusion of multiple descriptors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 2013; 35(5): 1164-1177. DOI: 10.1109/TPAMI.2012.199.
- [31] Punsawad Y, Wongsawat Y. Palmprint image enhancement using phase congruency. *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics 2009*; 1643-1646. DOI: 10.1109/ROBIO.2009.4913247.
- [32] Rida I, Almaadeed S, Bouridane A. Gait recognition based on modified phase-only correlation. *Signal, Image and Video Processing* 2016; 10(3): 463-470. DOI: 10.1007/s11760-015-0766-4.
- [33] Raja KB, Raghavendra R, Busch C. Video presentation attack detection in visible spectrum iris recognition using magnified phase information. *IEEE Transactions on Information Forensics and Security* 2015; 10(10): 2048-2056. DOI: 10.1109/TIFS.2015.2440188.
- [34] Saratxaga I, Sanchez J, Wu Z, Hernaez I, Navas E. Synthetic speech detection using phase information. *Speech Communication* 2016; 81(C): 30-41. DOI: 10.1016/j.specom.2016.04.001.
- [35] Wang Z, Simoncelli EP. Local phase coherence and the perception of blur. *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Neural Information Processing Systems 2004*: 1435-1442.
- [36] Hassen R, Wang Z, Salama MM. Image sharpness assessment based on local phase coherence. *IEEE Transactions on Image Processing* 2013; 22(7): 2798-2810. DOI: 10.1109/TIP.2013.2251643.
- [37] Blanchet G, Moisan L, Rougé B. Measuring the global phase coherence of an image. *15<sup>th</sup> IEEE International Conference on Image Processing 2008*; 1176-1179. DOI: 10.1109/ICIP.2008.4711970.
- [38] Blanchet G, Moisan L. An explicit sharpness index related to global phase coherence. *IEEE International Conference*

- on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2012: 1065-1068. DOI: 10.1109/ICASSP.2012.6288070.
- [39] Tiwari S, Shukla VP, Biradar SR, Singh AK. A blind blur detection scheme using statistical features of phase congruency and gradient magnitude. *Advances in Electrical Engineering* 2014; 2014: 521027. DOI: 10.1155/2014/521027.
- [40] Kovesi P. Phase preserving denoising of images. *Proceedings of the digital image computing: Techniques and applications (DICTA) 1999*: 212-217.
- [41] Wong A. Adaptive bilateral filtering of image signals using local phase characteristics. *Signal Processing* 2008; 88(6): 1615-1619. DOI: 10.1016/j.sigpro.2008.01.002.
- [42] Belaid A, Boukerroui D, Maingourd Y, Lerallut J-F. Phase-based level set segmentation of ultrasound images. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine* 2011; 15(1): 138-147. DOI: 10.1109/TITB.2010.2090889.
- [43] Hacihaliloglu I, Abugharbieh R, Hodgson A, Rohling R. Bone segmentation and fracture detection in ultrasound using 3D local phase features. In Book: D. Metaxas, L. Axel, G. Fichtinger, G. Székely, eds. *Medical image computing and computer-assisted intervention (MICCAI 2008)*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2008: 287-295. DOI: 10.1007/978-3-540-85988-8\_35.
- [44] Weng JJ. Image matching using the windowed Fourier phase. *International Journal of Computer Vision* 1993; 11(3): 211-236. DOI: 10.1007/BF01469343.
- [45] Zhou J, Xu Y, Yang X. Quaternion wavelet phase based stereo matching for uncalibrated images. *Pattern Recogn Lett* 2007; 28(12): 1509-1522. DOI: 10.1016/j.patrec.2007.03.009.
- [46] Nagashima S, Aoki T, Higuchi T, Kobayashi K. A sub-pixel image matching technique using phase-only correlation. *International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communications (ISPACS'06) 2006*: 701-704. DOI: 10.1109/ISPACS.2006.364751.
- [47] Reddy V, Talari J. Color image registration and template matching using quaternion phase correlation. *Ubiquitous Computing and Communication* 2011; 6(1): 714-721.
- [48] Jing X, Hong YX, Xin SX, Ying MX. Medical image mosaic technology based on image phase correlation. *IEEE International Conference on Digital Home (ICDH) 2012*: 274-277. DOI: 10.1109/ICDH.2012.51.
- [49] Rahtu E, Heikkilä J, Ojansivu V, Ahonen T. Local phase quantization for blur-insensitive image analysis. *Image and Vision Computing* 2012; 30(8): 501-512. DOI: 10.1016/j.imavis.2012.04.001.
- [50] Wang Z, Simoncelli EP. Translation insensitive image similarity in complex wavelet domain. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP) 2005*; 573-576. DOI: 10.1109/ICASSP.2005.1415469.
- [51] Liu Z, Laganier R. On the use of phase congruency to evaluate image similarity. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2006*: 937-940. DOI: 10.1109/ICASSP.2006.1660498.
- [52] Vasilenko GI, Taratorin AM. *Image reconstruction [In Russian]*. Moscow: "Radio i Svyaz" Publisher; 1986.
- [53] Stark H, ed. *Image recovery: Theory and application*. Orlando, FL: Academic Press; 1987. ISBN: 978-0-12-414281-7.
- [54] Hayes MH, Lim JS, Oppenheim AV. Signal reconstruction from phase or magnitude. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 1980; 28(6): 672-680. DOI: 10.1109/TASSP.1980.1163463.
- [55] Ma C. Novel criteria of uniqueness for signal reconstruction from phase. *IEEE Transactions on Signal Processing* 1991; 39(4): 989-992. DOI: 10.1109/78.80933.
- [56] Levi A, Stark H. Signal restoration from phase by projections onto convex sets. *Journal of the Optical Society of America* 1983; 73(6): 810-822. DOI: 10.1364/JOSA.73.000810.
- [57] Urieli S, Porat M, Cohen N. Optimal reconstruction of images from localized phase. *IEEE Transactions on Image Processing* 1998; 7(6): 838-853. DOI: 10.1109/83.679428.
- [58] Petropulu AP, Nikias CL. Signal reconstruction from the phase of the bispectrum. *IEEE Transactions on Signal Processing* 1992; 40(3): 601-610. DOI: 10.1109/78.120803.
- [59] Hua G, Orchard MT. Image reconstruction from the phase or magnitude of its complex wavelet transform. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2008*: 3261-3264. DOI: 10.1109/ICASSP.2008.4518346.
- [60] Pavelyeva EA, Krylov AS. Synthesis of phase and magnitude of images by Hermite projection method. *Pattern Recognition and Image Analysis* 2015; 25(2): 187-192. DOI: 10.1134/S1054661815020200.
- [61] Pavelyeva EA, Krylov AS. The approximation of phase by Hermite projection method in image reconstruction from phase [In Russian]. *Proceedings of the International Conference GraphiCon 2014*: 131-134.
- [62] Pavelyeva EA. The search for matches between the iris key points using Hermite projection phase-only correlation method [In Russian]. *Systems and Means of Informatics* 2013; 23(2): 74-88. DOI: 10.14357/08696527130206.
- [63] Korchagine DN, Krylov AS. Projection filtering in image processing. *Proceedings of the International Conference GraphiCon 2000*: 42-45.
- [64] Pavelyeva EA, Krylov AS. Detection of local shifts in iris image by Hermite projection phase-only correlation method [In Russian]. *Proceedings of the International Conference GraphiCon 2011*: 188-191.
- [65] Pavelyeva EA, Krylov AS. An adaptive algorithm of iris image key points detection. *Proceedings of the International Conference GraphiCon 2010*: 320-323.
- [66] Kovesi P. Image features from phase congruency. *Videre: Journal of Computer Vision Research* 1999; 1(3): 1-26.
- [67] Morrone MC, Owens RA. Feature detection from local energy. *Pattern Recognition Letters* 1987; 6(5): 303-313. DOI: 10.1016/0167-8655(87)90013-4.
- [68] Venkatesh S, Owens RA. On the classification of image features. *Pattern Recognition Letters* 1990; 11(5): 339-349. DOI: 10.1016/0167-8655(90)90043-2.
- [69] Hassen RKM. *Local phase coherence measurement for image analysis and processing*. Ph. D. thesis, Waterloo, Ontario, Canada; 2013.
- [70] Goodman JW, Silvestri AM. Some effects of Fourier-domain phase quantization. *IBM Journal of Research and Development* 1970; 14(5): 478-484. DOI: 10.1147/rd.145.0478.
- [71] Zhang B, Shan S, Chen X, Gao W. Histogram of gabor phase patterns (HGPP): A novel object representation approach for face recognition. *IEEE Transactions on Image Processing* 2007; 16(1): 57-68. DOI: 10.1109/TIP.2006.884956.
- [72] Xie S, Shan S, Chen X, Chen J. Fusing local patterns of gabor magnitude and phase for face recognition. *IEEE Transactions on Image Processing* 2010; 19(5): 1349-1361. DOI: 10.1109/TIP.2010.2041397.

- [73] Zhou S-R, Yin J, Zhang J-M. Local binary pattern (LBP) and local phase quantization (LBQ) based on Gabor filter for face representation. *Neurocomputing* 2013; 116: 260-264. DOI: 10.1016/j.neucom.2012.05.036.
- [74] Lei Z, Li SZ. Fast multi-scale local phase quantization histogram for face recognition. *Pattern Recognition Letters* 2012; 33(13): 1761-1767. DOI: 10.1016/j.patrec.2012.06.005.
- [75] Skarbnik N, Zeevi YY, Sagiv C. The Importance of phase in image processing. CCIT Technical Report #773. Haifa, Israel: Department of Electrical Engineering, Israel Institute of Technology; 2010.
- [76] Ojansivu V, Heikkilä J. Blur insensitive texture classification using local phase quantization. In Book: Elmoataz A, Lezoray O, Nouboud F, Mammass D, eds. *Image and Signal Processing* 2008: 236-243. DOI: 10.1007/978-3-540-69905-7\_27.
- [77] Mallat S. *A wavelet tour of signal processing*. 2<sup>nd</sup> ed. London: Academic Press; 1999. ISBN: 978-0-12-466606-1.
- [78] Tom V, Quatieri TF, Hayes MH, McClellan JH. Convergence of iterative nonexpansive signal reconstruction algorithms. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 1981; 29(5): 1052-1058. DOI: 10.1109/TASSP.1981.1163681.
- [79] Krylov AS, Korchagin DN. Fast Hermite projection method. In Book: Campilho A, Kamel MS, eds. *Image Analysis and Recognition* 2006: 329-338. DOI: 10.1007/11867586\_31.
- [80] Titchmarsh EC. *Introduction to the theory of Fourier integrals*. 2<sup>nd</sup> ed. Oxford: Clarendon Press; 1948.

---

#### *Author's information*

**Elena Alexandrovna Pavelyeva** (b. 1986) graduated from Lomonosov Moscow State University in 2008, Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Currently she works as the assistant professor at the Lomonosov Moscow State University, faculty of Computational Mathematics and Cybernetics. Research interests are mathematical methods of image processing and computer vision, biometrics. E-mail: [paveljeva@yandex.ru](mailto:paveljeva@yandex.ru).

---

*Received December 6, 2017. The final version – October 3, 2018.*

---