

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

### Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента

А.В. Волярь<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, Ю.А. Егоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Республика Крым, проспект Академика Вернадского, 4, Симферополь, Россия

#### Аннотация

В работе представлен новый метод измерения вырожденных спектров оптических вихрей и орбитального углового момента сингулярных пучков. Метод основан на измерении моментов интенсивности высших порядков пучка, содержащих вихри как с положительными, так и отрицательными топологическими зарядами. Соответствующий выбор амплитуд вихревых мод комбинированного пучка формирует в спектре орбитального углового момента аномальные зоны в виде резонансных провалов и всплесков. Поскольку моменты интенсивности для вихрей с положительными и отрицательными топологическими зарядами одинаковы для осесимметричного пучка, то симметрию пучка потребовалось нарушить, так что измерения проводились в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Калибровочные измерения показали, что погрешность эксперимента не выше 4,5%. При измерении вырожденных спектров вихрей комбинированного сингулярного пучка было обнаружено, что провалы и всплески в спектре орбитального углового момента вызваны лавиной вихрей, индуцированной слабыми возмущениями голографической решётки, ответственной за формирование пучка. Возникновение провалов или всплесков орбитального углового момента регулируется соотношением между потоками энергии в лавине вихрей с положительными или отрицательными топологическими зарядами.

**Ключевые слова:** дифракционная оптика, обработка изображения, лавина оптических вихрей, орбитальный угловой момент, моменты интенсивности.

**Цитирование:** Волярь, А.В. Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента / А.В. Волярь, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 517-527. – 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.

#### Введение

Реальный сингулярный пучок, как правило, содержит множество оптических вихрей, даже если он сформирован специальным голографическим фильтром [1]. Вопрос только в том, как световой поток распределяется среди множества мод, переносящих единичные оптические вихри [2]. Существует множество способов измерения вихревого состава параксиальных пучков. Основное внимание уделяется измерению спектра орбитального углового момента (ОУМ), который непосредственно связан со спектром оптических вихрей. Действительно, если комплексную амплитуду  $\Psi(x, y, z)$  сложного пучка представить в виде суперпозиции комплексных амплитуд  $\Psi_m(x, y, z)$  вихревых мод в виде

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{m=-N}^N C_m \Psi_m(x, y, z), \quad (1)$$

где  $2N$  – полное число мод в пучке,  $C_m$  – амплитуды мод и  $\sum_{m=-N}^N C_m^2 = 1$ , то ОУМ на фотон  $\ell_z$  вдоль направления распространения  $z$  задается простой формулой [3]

$$\ell_z = \sum_{m=-N}^N m |C_m|^2. \quad (2)$$

В выражении (2) в неявной форме содержится условие численного равенства топологического заряда  $m$  оптического вихря в моде и ОУМ:  $\ell_z^{(m)} = m$ .

Методы измерения спектра ОУМ можно условно разделить на три большие группы по способу влияния на структуру пучка в процессе эксперимента. К первой группе следует отнести методы голографической фильтрации вихревых мод, впервые детально рассмотренные в работах [4–6]. В основу метода положена голографическая фильтрация сложного пучка, представленного в базисе пучков Лагерра–Гаусса  $LG_m^n$  таким образом, чтобы моды с орбитальным индексом (топологическим зарядом)  $m$  рассеивались по направлению азимутального угла  $\varphi_m$ . Радиальный индекс  $n$  отвечает за рассеяние вдоль полярного угла  $\theta_n$ . Второй способ предполагает использование специального рефракционного элемента и диафрагмы [7–9], которые осуществляют так называемое log-polar преобразование, при этом каждому значению топологического заряда  $m$  соответствует максимум интенсивности в горизонтальном (или вертикальном) направлении вдоль угла  $\alpha_m$ . К третьей группе можно отнести метод, основанный на анализе преобразования Фурье с помощью сферической [10] или цилиндрической линзы [11–13]. В работах [11, 12] рассмотрен метод

измерения поля пучка с дробным ОУМ в фокальной плоскости цилиндрической линзы. Для измерения дробного ОУМ использовался подход, основанный на анализе перекрёстных элементов  $J_{xy}$  или  $J_{yx}$  матрицы интенсивности второго порядка [14]. Однако такой подход можно использовать, только если моды сложного пучка обладают осевой симметрией. Авторы работы [13] усовершенствовали метод за счет использования двух цилиндрических линз, оси которых повернуты на угол  $90^\circ$  относительно друг друга. Это позволило измерять дробный ОУМ пучков с любым типом симметрии.

Вместе с тем измерение дробного ОУМ не дает полной информации о состоянии сингулярного пучка. Как видно из выражения (2), одному и тому же значению ОУМ может соответствовать различный состав оптических вихрей с квадратами амплитуд  $C_m^2$ . Например, в слаботурбулентной среде [15] или оптических волокнах [16] имеет место интенсивный обмен энергией между оптическими вихрями сингулярного пучка и среды. При этом изменяется как величина  $\ell_z$ , так и спектр вихрей  $C_m^2(m)$ . Для измерения спектра оптических вихрей был разработан специальный метод, основанный на анализе моментов интенсивности высших порядков [10] в фокальной плоскости сферической линзы. Характерной особенностью этого метода является возможность измерять как амплитуды, так и начальные фазы мод. Однако указанный подход имеет существенное ограничение. Метод позволяет измерять спектры вихрей только с одинаковыми знаками топологических зарядов. Дело в том, что моменты интенсивности в фокальной плоскости сферической линзы вырождены относительно знака топологического заряда. Поэтому авторы работы [10] отмечают, что метод применим только для невырожденных спектров сложных сингулярных пучков. Таким образом, целью данной статьи явилась демонстрация метода моментов интенсивности высших порядков для измерения вырожденных спектров вихрей и ОУМ сложных сингулярных пучков с действительными амплитудами.

**1. Теоретическое обоснование**

Представим комплексную амплитуду сложного сингулярного пучка в виде разложения по неполному базису мод Лагерра–Гаусса ( $LG_{0m}$ ) с радиальным индексом  $n = 0$  [10]

$$\Psi(R, \varphi, z) = \sum_{m=-N}^N C_m LG_0^{(m)}(R, \varphi, z) = \sum_{m=-N}^N \frac{C_m R^{|m|} e^{im\varphi} G(R)}{M_m \sigma^{|m|+1}(z)}, \tag{3}$$

где  $G = \exp(-R^2)$ ,  $R = r/w_0$ ,  $r, \varphi$  – радиальные и азимутальные координаты соответственно,  $\sigma(z) = 1 - iz/z_0$ ,  $z_0 = k w_0^2 / 2$ ,  $w_0$  – радиус перетяжки каждой моды в сечении  $z = 0$ ,  $M_m = \sqrt{2^{-|m|-1} |m|! \pi}$  – нормировочный

множитель,  $m$  – топологический заряд оптического вихря моды,  $2N+1$  – число мод в сингулярном пучке.

Основой наших исследований явилось измерение квадратов амплитуд мод  $C_m^2$  без разрушения структуры сингулярного пучка с помощью анализа момента интенсивности

$$J_{p,q} = \frac{\iint_S M_{p,q}(x, y) \Im(x, y) dx dy}{\iint_S \Im(x, y) dx dy}, \tag{4}$$

где  $\Im(x, y)$  – распределение интенсивности поля (3) в плоскости  $z = 0$ ,  $M_{p,q}(x, y)$  – функция момента интенсивности (см., например, [14] и ссылки на литературу), вид которой выбирается в зависимости от конкретных условий эксперимента (см. следующий раздел),  $p, q = 0, 1, 2, \dots$  Как отмечалось в работе [10], моменты интенсивности  $J_{p,q}$  вырождены относительно знака топологического заряда оптических вихрей  $m$  в случае осевой симметрии мод в выражении (3). Чтобы снять вырождение, требуется изменить симметрию пучка без разрушения его сингулярной структуры таким образом, чтобы моды с противоположными знаками топологических зарядов имели отличительные признаки. Этому требованию отвечает астигматичное преобразование пучка Лагерра–Гаусса цилиндрической линзой, подробно рассмотренное в работе [17] (общую теорию параксиальных астигматичных преобразований можно найти в работе [18]).

Считаем, что цилиндрическая линза с фокусным расстоянием  $f$  расположена в плоскости  $z = 0$ . Рабочая ось линзы ориентирована вдоль оси  $y$  лабораторной системы координат. На вход линзы падает параксиальный монохроматический пучок с комплексной амплитудой (3). Плоскость перетяжки пучка совмещена с плоскостью линзы. Кроме того, ограничим наше исследование отсутствием начальных фаз модовых пучков, т.е. амплитуды  $C_m$  являются действительными величинами. Тогда, следуя работе [17], запишем комплексную амплитуду  $\Psi(x, y, z, f)$  сложного пучка в волновой зоне дифракции в виде

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{m=-N}^N C_m A_m H_m(F) \exp(\Phi), \tag{5}$$

где  $A_m = -i \frac{z_0}{z} \frac{1}{qq_0} \left( -\frac{w_0}{q_0} \right)^m \left( 1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right)$ ,

$$\Phi = i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) - \left( \frac{z_0}{zw_0q} \right)^2 x^2 - \left( \frac{z_0}{zw_0q_0} \right)^2 y^2,$$

$$F_\mu = e^{i\mu\pi/4} \frac{\sqrt{z_0 f} \left( 1 - i\mu \frac{z_0}{z} \right) \frac{x}{w_0} - \mu \left( 1 + i\mu \frac{z_0}{z_1} \right) \frac{y}{w_0}}{z \sqrt{\left( 1 - i \frac{z_0}{z} \right) \left( 1 + i \frac{z_0}{z_1} \right)}},$$

$$q_0^2 = 1 - i \frac{z_0}{z}, q^2 = 1 + i \frac{z_0}{z_1}, z_1 = \frac{z f}{z - f}.$$

Здесь  $H_m(F_\mu)$  – полиномы Эрмита;  $\mu = \pm 1$  – знак топологического заряда вихрей.

Введём новые нормированные координаты, оси которых ориентированы под углом  $\pi/4$  относительно осей линзы:  $u = x/w_0 + y/w_0$ ,  $v = x/w_0 - y/w_0$ . Будем рассматривать поле пучка в плоскости двойного фокуса  $z = 2f$ , а также потребуем, чтобы

$$z_0 / 2f = 1. \tag{6}$$

Тогда распределение интенсивности запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} = & \left\{ \sum_{m,n=0}^N C_{-n} C_{-m} \frac{A_{m,n}}{N_{m,n}} H_n \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) H_m \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + \right. \\ & + \sum_{m,n=1}^N C_n C_m \frac{A_{m,n}}{N_{m,n}} H_n \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + \sum_{\substack{n=0, \\ m=1}}^N C_{-n} C_m \frac{A_{m,n}}{N_{m,n}} H_n \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) + \\ & \left. + \sum_{\substack{n=1, \\ m=0}}^N C_n C_{-m} \frac{A_{m,n}}{N_{m,n}} H_n \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) H_m \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right\} \times \\ & \times \exp \left( -\frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \\ & = \mathfrak{I}_{-m,-n} + \mathfrak{I}_{m,n} + \mathfrak{I}_{m,-n} + \mathfrak{I}_{-m,n}, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $A_{m,n} = (-1)^{|n|+|m|} e^{i \frac{|m|-|n|}{4} \pi}$ ,

$$N_{n,m}^2 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{w_0}{2} \right)^{n+m} 2^{n+m+1} n! m!.$$

Как видно из соотношения (7), члены, соответствующие оптическим вихрям с положительными и отрицательными топологическими зарядами, только частично разделились. Последние два члена характеризуют перекрёстные амплитуды  $C_{-n} C_m$  и  $C_n C_{-m}$ . Кроме того, первые два члена также содержат перекрёстные амплитуды  $C_{-n} C_{-m}$  и  $C_n C_m$  ( $|n| \neq |m|$ ). С другой стороны, наша задача – измерить только квадраты амплитуд модовых пучков  $C_{\pm m}^2$ . Заметим, что при разности индексов  $|m - n| = 2$  множитель  $A_{m,n} = -A_{n,m} = i$  мнимый в (7) и, следовательно, перекрёстные члены с такой разностью индексов исчезают.

На первый взгляд, кажется, что для решения этой задачи целесообразно выбрать в качестве функции моментов интенсивности в выражении (4) многочлены Эрмита  $M_p(u) = H_p(u/\sqrt{2})$ .

Далее можно воспользоваться условием ортогональности в (4) и записать систему линейных уравнений, число которых равно числу переменных, как это делалось в работе [10] для невырожденного массива вихрей. Однако, как показали оценочные расчёты, по мере увеличения индексов  $p$  и  $q$ , наряду с  $2N$  неизвестными, для переменных  $C_{\pm m}^2$  добавляется ещё  $2N - 6$  перекрёстных членов  $C_{\pm n} C_{\pm m}$  и  $C_{\pm n} C_{\mp m}$ . Систему уравнений невозможно замкнуть. Однако можно поступить иначе. Сначала сделаем два Фурье-преобразования распределения интенсивности  $\mathfrak{I}(u, v)$  в виде

$$\mathfrak{I}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \xi \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \mathfrak{I}(x, y) dx dy, \tag{8}$$

$$\mathfrak{I}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \eta \frac{v}{\sqrt{2}} \right) \mathfrak{I}(x, y) dx dy.$$

Вид подынтегральных множителей в (8) показывает, что это преобразование уничтожает все перекрёстные члены в распределении интенсивности (7) с нечётной разностью индексов  $|m| - |n|$ . Значения интегралов в (8) найдем в работе [19]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \omega \frac{u}{\sqrt{2}} \right) H_n \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) H_{n+2m} \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) e^{-(u^2/2)} du = \tag{9}$$

$$= (-1)^m 2^{n+1/2} \sqrt{\pi} \omega^{2m} \exp \left( -\frac{\omega^2}{4} \right) L_n^{2m} \left( \frac{\omega^2}{2} \right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \omega \frac{u}{\sqrt{2}} \right) H_n^2 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \tag{10}$$

$$= 2^{n+1/2} \sqrt{\pi} \exp \left( -\frac{\omega^2}{4} \right) L_n \left( \frac{\omega^2}{2} \right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \omega \frac{u}{\sqrt{2}} \right) H_{2n} \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du = \tag{11}$$

$$= (-1)^n 2^{n+1/2} \omega^{2n} \exp \left( -\frac{\omega^2}{2} \right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(v) e^{-v^2} dv = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}, \quad \omega = \xi, \eta. \tag{12}$$

В частности, члены в распределении интенсивности имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{-m,-n}(\xi) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \xi \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \mathfrak{I}(x, y) dx dy = \\ & = \sum_{n=0}^N C_{-n}^2 \frac{2^{n+1/2}}{N_{n,n}} \xi^{2n} L_n \left( \frac{\xi^2}{2} \right) e^{-\frac{\xi^2}{4}} + \end{aligned} \tag{13}$$

$$+ \sum_{\substack{m,n=0, \\ |m-n| \neq 0,2}}^N C_{-n} C_{-(n+2m)} \frac{(-1)^{n+2m} 2^{n+1/2}}{N_{m,n}} \times$$

$$\times \xi^{2m} L_n^{2m} \left( \frac{\xi^2}{2} \right) e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

$$\mathfrak{I}_{-n,m}(\xi) = \sum_{\substack{n=0, \\ m=1}}^N C_{-n} C_{n+2m} \frac{(-1)^{n+2m} 2^{n+1/2}}{N_{n+2m,n}} \xi^{2m} \times \tag{14}$$

$$\times L_n^{2m} \left( \frac{\xi^2}{2} \right) e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} H_m \left( \frac{v}{\sqrt{2}} \right) e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 0.$$

Таким образом, распределение интенсивности  $\mathfrak{I}(\xi, \eta)$  после Фурье-преобразования содержит все квадраты амплитуд, и перекрёстные члены с разностью индексов  $|m| - |n| = 4$ . Перекрёстные члены  $\mathfrak{I}_{-m,m}$  и  $\mathfrak{I}_{m,-n}$ , ответственные за вихри с положительными и отрицательными зарядами, исчезают. Причем члены  $\mathfrak{I}_{-m, -(n+2m)}(\xi)$  содержат амплитуды  $C_{-n}^2$  с одинаковыми коэффициентами, а члены  $\mathfrak{I}_{m, (n+2m)}(\xi)$  содержат амплитуды  $C_n^2$  с различными коэффициентами. Аналогичные выражения получаем для членов  $\mathfrak{I}_{-m, -(n+2m)}(\eta)$  и  $\mathfrak{I}_{m, (n+2m)}(\eta)$ , если поменять знаки индексов.

Чтобы найти уравнения для квадратов амплитуд, воспользуемся разложением моментов интенсивности по полному базису многочленов Лагерра:

$$J_{p,2q}^{(+)} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi L_p^{2q} \left( \frac{\xi^2}{2} \right) \mathfrak{I}(\xi) d\xi / J_{00}, \tag{15}$$

$$J_{p,2q}^{(-)} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} L_p^q \left( \frac{\eta^2}{2} \right) \mathfrak{I}(\eta) d\eta / J_{00},$$

где  $J_{00}$  – полная интенсивность пучка. Дополним эти уравнения интегралами [19]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m+1} L_n^{2m} (cx^2) L_k^{2m} (cx^2) e^{-cx^2} dx = \frac{(2m+n)!}{n! c^{2m+1}} \delta_{n,k}, \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m+\lambda} L_n^{2m} (cx^2) L_k^{\lambda} (cx^2) e^{-cx^2} dx = \frac{(-1)^{2m+\lambda}}{c^{2m+\lambda+1}} \binom{2m+\lambda}{n} \binom{n+\lambda}{2m} (2m+\lambda)!. \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2q+1} e^{-ax^2} L_p^q (cx) dx = \frac{(2q+p)!(1/2)^p}{p! 4^{-(2q+p+1)}}. \tag{18}$$

С учётом интегралов (16)–(18) уравнения для амплитуд мод (15)  $C_n$  запишутся в виде

$$J_{p,q}^{-} = \frac{\left( \sum_{n=1}^N C_n^{-2} + \frac{(2q+p)!(1/2)^p}{p! 4^{-(2q+p+1)}} \times \right.}{J_{00}} \times \left. \sum_{m,n=1}^N \frac{(2m+n)!(1/2)^n}{n! 4^{-(2m+n+1)}} N_{nm} C_n C_m \right), \tag{19}$$

$$J_{p,q}^{+} = \frac{\left( \sum_{n=0}^N C_n^{-2} + \frac{(2q+p)!(1/2)^p}{p! 4^{-(2q+p+1)}} \times \right.}{J_{00}} \times \left. \sum_{m,n=1}^N \frac{(2m+n)!(1/2)^n}{n! 4^{-(2m+n+1)}} N_{nm} C_{-n} C_{-m} \right). \tag{20}$$

Система уравнений (19) и (20) позволяет найти значения квадратов амплитуд  $C_{\pm n}^2$  по измеряемым значениям моментов интенсивностей  $J_{p,q}^{\pm}$ . Каждое уравнение содержит  $N$  членов для амплитуд  $C_{\pm n}^2$  и  $N-3$  перекрёстных членов. Изменение индексов  $p$  и  $q$  не увеличивает число переменных. Полное число уравнений равно  $4N-6$ . Систему уравнений легко решить и найти амплитуды модовых пучков в реальном масштабе времени с помощью современного компьютерного обеспечения.

## 2. Эксперимент и обсуждение результатов

### 2.1. Экспериментальная установка и калибровочные измерения

Для решения системы линейных уравнений (19) и (20) относительно амплитуд  $C_{\pm m}^2$  требуется измерить моменты интенсивности  $J_{pq}$  высших порядков [10, 14].

Для этого использовалась экспериментальная установка, схема которой приведена на рис. 1.

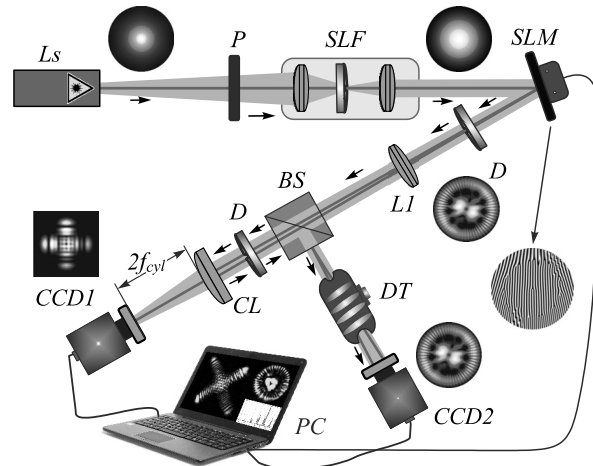


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.  $L_s$  – He-Ne лазер,  $P$  – поляризатор,  $SLF$  – пространственный фильтр пучка,  $SLM$  – пространственный модулятор пучка,  $L1$  – сферическая линза,  $BS$  – делительный кубик,  $CL$  – цилиндрическая линза,  $DT$  – диоптрийная трубка,  $CCD1$ ,  $CCD2$  – CCD-камеры

Свет от He-Ne лазера ( $\lambda=0,63$  мкм) на основной продольной моде  $TEM_{00}$  проходит поляризатор  $P$  и пространственный фильтр пучка  $SLF$ . Затем свет направляется на пространственный модулятор пучка  $SLM$  (Thorlabs EXULUS-4K1), на ПЗС-матрице которого формировалась цифровая голографическая решетка, сформированная компьютером в соответствии с комплексной амплитудой (3). Кроме того,  $SLF$  система совместно со сферической линзой  $L1$  позволяла получить требуемый радиус перетяжки  $w_0$  в плоскости цилиндрической линзы  $CL$ . Восстановленный пучок разделялся на два плеча. В первом плече линза  $L1$  преобразовывала пучок таким образом, чтобы его плоскость перетяжки совпадала с плоскостью цилиндрической линзы  $CL$ . Фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f_{cyl}$  и длина Релея пучка  $z_0 = kw_0^2 / 2$  соответствовали условию (6)  $z_0/2f=1$ . Измерение моментов интенсивности  $J_{pq}$  осуществлялось  $CCD1$  камерой (Thorlabs DCC1645), расположенной в плоскости  $z=2f_{cyl}$ . Контроль формы перетяжки пучка осуществлялся во втором плече, оптическая схема которого построена по принципу микроскопа бокового вида. Радиус перетяжки пучка в плоскости цилиндрической линзы вычислялся посредством измерения моментов интенсивности второго порядка  $J_{02} = w_y^2$  и  $J_{20} = w_x^2$  и  $w_0^2 = (w_x^2 + w_y^2) / 2$  [10, 20] на  $CCD2$ .

Измерение квадратов амплитуд  $C_m^2$  проводилось следующим образом. Сначала на  $CCD1$  камере регистрировалось распределение интенсивности  $\mathfrak{I}(x,y)$ , а массив данных заносился в память компьютера. Затем компьютер производил преобразования (8), и записывался массив  $\{\mathfrak{I}_{\pm m, \pm n}(\xi), \mathfrak{I}_{\pm m, \pm n}(\eta)\}$ . Далее над этим массивом производились преобразования (15). Результаты компьютерной обработки информации в виде моментов интенсивности  $J_{p,q}^{\pm}$  подставлялись в

левую часть уравнений (19) и (20). Решение уравнений выводилось на монитор в виде спектра вихрей  $C_m^2(m)$  и спектра ОУМ  $\ell_z$ .

Калибровочные измерения проводились в два этапа. На первом этапе оценивалась точность измерений единичных оптических вихрей высших порядков. На втором этапе измерялся спектр вихрей  $C_m^2(m)$  сложного вихревого пучка, при этом параметры спектра выбирал компьютер.

**Калибровочные измерения 1.** Сначала отметим, что в общем случае аргумент многочлена Эрмита в (7) является комплексным за исключением плоскости  $z = 2f_{cyl}$  и выполнения условия (6). Это значит, что такой пучок переносит оптический вихрь и обладает ОУМ. Аналогичный вопрос о суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса уже рассматривался в работе [23]. Погрешность измерений спектра вихря при небольшом отклонении от плоскости измерений  $z = 2f_{cyl}$  и при нарушении условия  $z_0 = 2f_{cyl}$  можно оценить, измеряя отклонение ОУМ единичных модовых пучков Лагерра–Гаусса от целочисленных значений. Для этого предположим, что величина отклонения  $\Delta z$  очень мала, т.е.  $Z = z_0/2f_{cyl} = 1 + \Delta z$ ,  $\Delta z \ll 1$ . Тогда, используя соотношение

$$H_m\left(\frac{tx+y}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} t^j H_k(x) H_{m-k}(y) \quad (21)$$

и уравнение (5), ограничиваясь только членами первого порядка малости  $\Delta z$ , получаем для ОАМ простое соотношение  $\ell_z \sim \Delta z m$ . Следовательно, можно ожидать возрастание погрешности измерений спектра вихрей по мере увеличения топологического заряда вихря  $m$  в модовом пучке (3). Таким образом, на SLM модуляторе формировалась дифракционная решётка мод Лагерра–Гаусса высших порядков, входящих в сумму в исходном выражении (3), с распределением интенсивности, представленным на рис. 2. Поскольку отклонение  $\Delta z$  вызывает появление  $m$  мод для каждого  $LG_{0,m}$  пучка, измерялся весь спектр вихрей для используемых в эксперименте пучков.

Измерительный процесс начинался с формирования Гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы CL с заданным радиусом перетяжки  $w_0$ , который удовлетворяет условию (6):  $w_0 = 2\sqrt{f/k}$ . В нашем случае фокусное расстояние цилиндрической линзы есть  $f_{cyl} = 3,5$  см, что соответствует радиусу перетяжки  $w_0 = 37,4$  мкм. На эксперименте радиус перетяжки регулировался с помощью пространственного фильтра SLF и микроскопа бокового вида на рис. 1 и измерялся в соответствии с методом, описанным в работе [10]. Нам удалось установить диаметр перетяжки равным  $2w_0 \approx 78 \pm 1,5$  мкм с оптимальной точностью для данного эксперимента. Следующим шагом явилось измерение спектра вихрей и ОУМ для каждого модового пучка последовательности на рис. 2. Ре-

зультаты измерений представлены на рис. 3. Хотя при измерениях вклад сателлитов в спектрах составляет доли процента, погрешность измерений ОУМ вихрей высших порядков может быстро возрастать с увеличением индекса  $m$ . В нашем эксперименте максимальная ошибка не превышала  $\Delta \ell_z / \ell_z \sim 2\%$ .

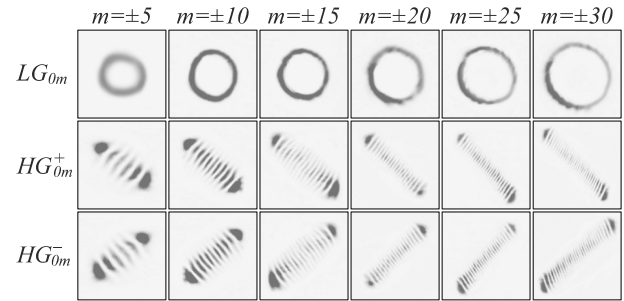


Рис. 2. Распределение интенсивности (инверсия)  $LG_{0,m}$  моды с топологическим зарядом вихря  $\pm m$  после SLM модулятора (левый столбец) и  $HG_m^\pm$  моды в двойном фокусе  $z = 2f$  цилиндрической линзы CL на входном окне CCD1 камеры (средний и правый столбцы)

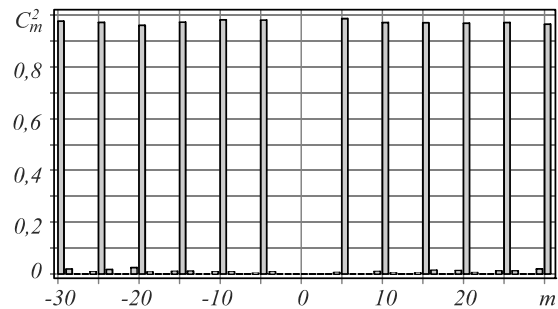


Рис. 3. Спектры вихрей  $|C_m(m)|^2$  единичных  $LG_{0,m}$  модовых пучков, измеренных в ходе калибровочного эксперимента

**Калибровочные измерения 2.** Вторая серия контрольных экспериментов предполагала измерение сложных спектров вихрей со случайным выбором амплитуд мод в соответствии с выражением

$$C_m^2(m) = \frac{\left( \cos^{2p}(am+c) O^{2|m|} \times \exp(-b(m+c)^2) \right)}{\left( \sum_{n=-N}^N \cos^{2p}(an+c) O^{2|n|} \times \exp(-b(n+c)^2) \right)}, \quad (22)$$

где  $O, a, b, c$  – параметры пучка. Небольшие изменения индекса  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$  и управляющих параметров  $\{a, b, c\}$  вызывают резкие изменения вида спектра вихрей (22). Параметры спектра выбирались так, чтобы охватить область как положительных, так и отрицательных топологических зарядов. Для определения квадратов амплитуд в каждом спектре потребовалось провести 60 измерений, составить и решить 60 линейных уравнений (19) и (20). Оптимальные результаты измерений представлены спектром  $C_{\pm m}^2(m)$  на рис. 4.

Заметим, что для выбора оптимальных результатов потребовалось проводить контроль степени корреля-

ции исходного распределения интенсивности  $\mathfrak{I}(r, \varphi)$  и интенсивности  $\mathfrak{I}_c(r, \varphi)$ , восстановленной в соответствии с измеренным спектром  $C_{\pm m}^2(m)$  на рис. 4:

$$K = \iint_S \mathfrak{I}_m(r, \varphi) \mathfrak{I}_c(r, \varphi) dS / J_{00}^m J_{00}^c, \quad (23)$$

где  $J_{00}^m$  и  $J_{00}^c$  – полные интенсивности исходного и восстановленного пучков. Если степень корреляции была ниже  $K=0,9$ , то узлы экспериментальной установки подвергались дополнительной юстировке. В данном случае степень корреляции составила  $K=0,93$ , а погрешность измерения квадратов амплитуд  $C_m^2(m)$  была не хуже 4,5%.

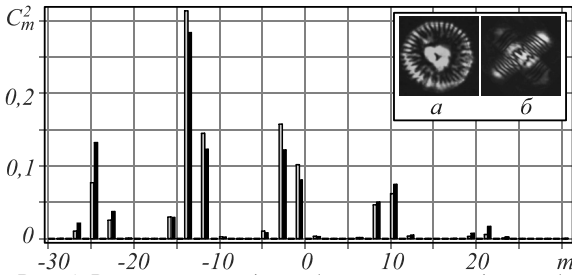


Рис. 4. Рассчитанные (серый) и измеренные (чёрный) спектры вихрей  $|C_m^2|$  для выражения (23):  $a = 14, b = 0,004, c = -5, p = 20, O = 1,05, N = 30$ .  
Выводка: распределения интенсивности  $\mathfrak{I}_c(r, \varphi)$ : в фокальной плоскости сферической линзы (а), после цилиндрической линзы в плоскости  $z = 2f$  (б)

### 2.2. Срыв лавины вихрей при слабом возмущении голографической решётки

В этом подпараграфе мы применим метод измерения спектра вихрей и ОУМ в новом типе комбинированных пучков с выраженными провалами в спектре ОУМ. Свойства такого пучка невозможно было исследовать методом, предложенным в работе [10]. Действительно, в работах [10, 21, 22] было показано, что при соответствующем выборе амплитуд  $C_m$  вихревых мод  $LG_{0,m}$  в спектре ОУМ возникают глубокие резонансные всплески и провалы при условии совпадения целочисленного значения параметра возмущения  $p$  с топологическим зарядом  $m$  одной из вихревых мод:  $p = m$ . Чтобы понять физический механизм возникновения резонансов, в работе [21] было показано, что при малых локальных возмущениях  $\delta p$  рельефа голографической решётки, настроенной на формирование  $m$  порядка вихря, возникает лавина оптических вихрей с широким спектром как положительных, так и отрицательных топологических зарядов. В области провалов ОУМ вклад вихрей с  $m < 0$  и  $m > 0$  при  $p > 0$  был сравним между ними, в то время как в области всплесков ОУМ вклад вихрей с  $m > 0$  был существенно большим.

Поэтому можно было использовать метод измерения в работе [10] только для исследования всплесков ОУМ. В этом подпараграфе мы сфокусируем внимание на теоретическом и экспериментальном исследовании физического механизма провалов в спектре ОУМ. Для анализа структуры возмущенного пучка удобно ввести параметр слабого возмущения  $\delta p$  рельефа

голографической решетки как отклонение целочисленного индекса числа ветвей вилочной дислокации  $M$ :  $p = M + \delta p$ , где  $p$  – параметр возмущения голографической решетки. Тогда комплексная амплитуда пучка, восстановленного голографической решеткой, запишется в виде

$$\Psi(r, \varphi, z) = \sin(p\pi) e^{i p \pi} \sum_{m=-N}^N \left[ \begin{matrix} \cos(m\pi/2) \\ \sin(m\pi/2) \end{matrix} \right] \times \left[ \frac{\Omega^{|m|}}{|m|!(M-m+\delta p)} \frac{R^{|m|} e^{i m \varphi}}{\sigma(z)^{|m|+1}} \exp(-R^2) \right], \quad (24)$$

где  $\Omega$  – масштабный параметр пучка; множители  $\cos(m\pi/2)$  или  $\sin(m\pi/2)$  прореживают спектр вихрей, оставляя моды либо с чётными, либо с нечётными индексами  $m$ .

При этом провалы в спектре ОУМ становятся более отчётливыми. Комплексной амплитуде (24) соответствует ОУМ в виде

$$\ell_z = \frac{\sum_{m=-N}^N m \left( \frac{\cos^2(m\pi/2)}{\sin^2(m\pi/2)} \right) \frac{\Omega^{2|m|}}{|m|^2 (M-m+\delta p)^2}}{\sum_{m=-N}^N \left( \frac{\cos^2(m\pi/2)}{\sin^2(m\pi/2)} \right) \frac{\Omega^{2|m|}}{|m|^2 (M-m+\delta p)^2}}. \quad (25)$$

На рис. 5 представлены спектральные кривые  $\ell_z(m)$  для случая чётных топологических зарядов. Спектр ОУМ на рис. 5а описывает общий вид областей резонансных всплесков и провалов, соответствующих параметру  $M$ . Масштабный параметр  $\Omega$  позволяет сдвигать резонансные области вдоль оси  $p = M + \delta p$ . Их характерный вид иллюстрируют кривые 1 и 2 на рис. 5б. Все резонансные провалы локализуются вблизи чётных топологических зарядов вихревых мод. Замена косинуса на синус в выражении (25) сдвигает резонансы на единицу вдоль ось  $p$ . Уменьшение индекса  $M$  сопровождается резким сжатием резонансов, при этом их глубина составляет примерно  $2M$  при  $\Omega = 14$  и  $p < 6$ . При больших значениях параметров  $\Omega \gg 20$  наблюдается удвоение ОУМ  $\ell_z = 2M$  в широком интервале исходных значений топологического заряда  $M$ .

Как было показано в работе [21], возмущение  $\delta p$  вносит локальное искажение структуры вилочного дефекта при больших значениях параметра  $p$ . В рассматриваемом случае, как показывает форма голографических решёток на рис. 6, состояния с малыми значениями  $M$  подвержены существенным искажениям всего рельефа голограммы даже при возмущении  $\delta p = -0,0001$  (см. рис. 6б). Такое различие в рельефе решёток неизбежно сказывается на форме спектра вихрей  $C_{\pm m}^2(m)$ .

Действительно, спектр вихрей  $C_m^2(m)$  комбинированных пучков, рассмотренных в работе [21], содержит сателлиты в области как положительных, так и отрицательных топологических зарядов. Однако в данном случае перекачка энергии из основного со-

стояния осуществляется в сателлиты с меньшими топологическими зарядами, что и вызывает провалы в спектре ОУМ. Перестройка спектра  $C_{\pm m}^2(m)$  показана на рис. 7.

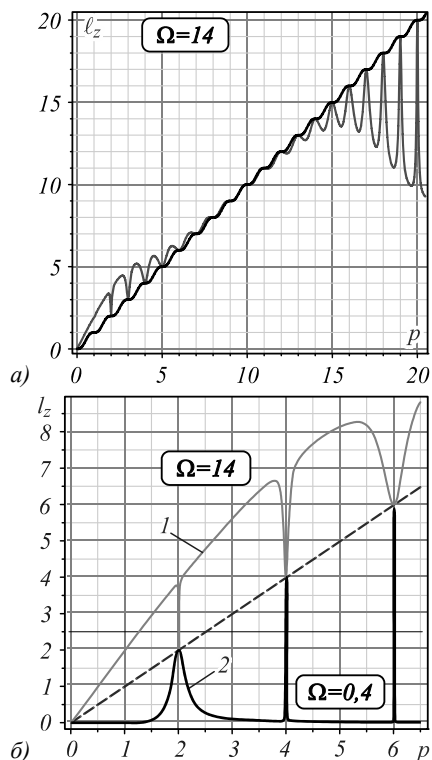


Рис. 5. Теоретические спектральные кривые ОУМ  $l_z(m)$  комбинированных пучков с комплексной амплитудой (3): общий вид спектра при  $\Omega=14$  (а); характерные участки спектра: кривая 1 – всплески ОУМ ( $\Omega=14$ ); кривая 2 – провалы ОУМ ( $\Omega=0,4$ ) (б)

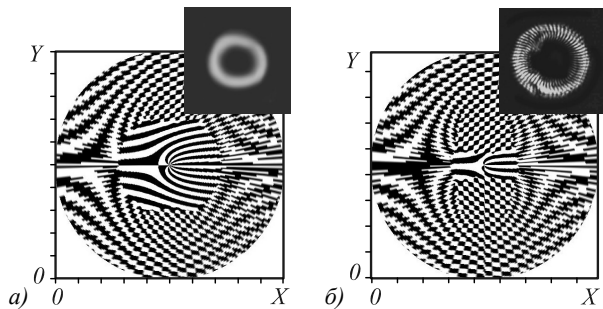


Рис. 6. Возмущение винтового дефекта голографической решётки с  $M=4$  и  $\Omega=14$ :  $\delta p = -0,0001$  (а),  $\delta p = -0,5$  (б),  $\Omega=14$ . Выводка: распределения интенсивности в пучках, восстановленных соответствующими голограммами

Уже малые возмущения голографической решётки (см. рис. 7а) вызывает срыв лавины вихрей как с положительными, так и отрицательными зарядами таким образом, что перекачка энергии осуществляется в сателлиты с более высокими топологическими зарядами, чем заряд исходного пучка. По мере роста возмущения  $\delta p$  вклад сателлитов в ОУМ справа от исходной моды (рис. 7б) становится значительно больше, чем от сателлитов с отрицательными топологическими зарядами. Такая перекачка энергии формирует глубокие провалы в спектре ОУМ  $l_z(z)$ , показанные на рис. 8.

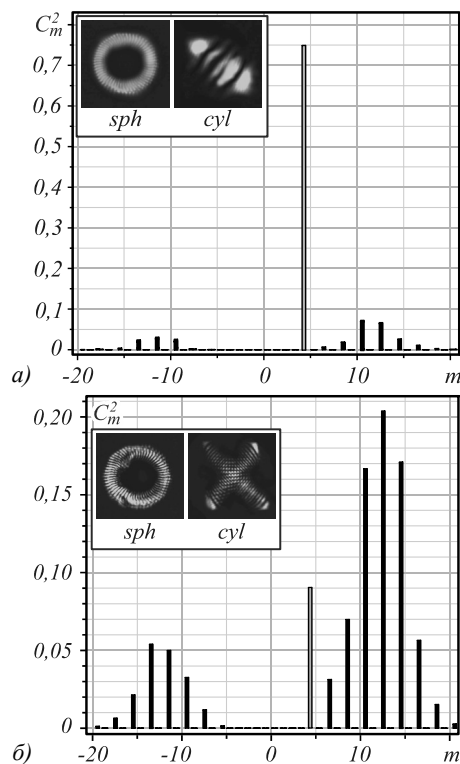


Рис. 7. Экспериментальные спектры вихрей  $C_m^2$  возмущённого пучка с топологическим зарядом  $M=4$ : (а)  $\delta p = -0,03$ , (б)  $\delta p = -0,5$ ,  $\Omega=14$ ; исходное состояние (серый), возмущённое состояние (чёрный).

Вставки: распределение интенсивности в фокальной плоскости сферической линзы (sph) и в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы (cyl)

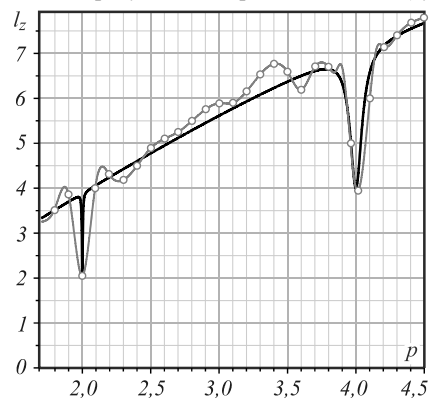


Рис. 8. Спектр ОУМ  $l_z(p)$  комбинированного пучка с масштабным параметром  $\Omega=14$ : теория (чёрный), эксперимент (серый)

В области топологического заряда моды  $m=2$  глубина провала происходит от  $l_z=4$  до  $l_z=2$ , а в области  $m=4$  провал составляет  $l_z = l_z(6,8) - l_z(4) \approx -2,8$ . Дальнейшее возрастание параметра  $p$  сопровождается сглаживанием провалов  $\Delta l_z \rightarrow 0$ , а затем провалы сменяются резкими всплесками ОУМ.

### Заключение

Мы предложили и применили новый метод изменения спектров оптических вихрей и ОУМ комбини-

рованных сингулярных пучков, содержащих вихри как с положительными, так и отрицательными топологическими зарядами. Метод основан на измерении моментов интенсивности высших порядков комбинированного пучка в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы при условии равенства длины Релея исходного Гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы удвоенному фокусному расстоянию этой линзы. На основании измерений составлялось  $4N-6$  линейных уравнений (где  $2N$  – число вихревых мод в пучке) и строились спектры квадратов амплитуд мод и ОУМ. Предварительные калибровочные измерения показали, что точность измерений не превышает 4,5 %, а степень корреляции исходного и восстановленного пучков не ниже  $K=0,93$ .

Указанный метод был применён для измерения спектров вихрей в комбинированных сингулярных пучках с выраженными аномалиями в спектре ОУМ. Аномальные зоны разделены на две большие группы с резкими всплесками и провалами ОУМ, вызванными слабыми возмущениями рельефа голографической решетки. Аномальные зоны разделены широким участком регулярного изменения ОУМ. Мы обнаружили, что резонансные провалы и всплески орбитального момента связаны с изменениями в спектре вихрей в пучке. Всплеск ОУМ характерен для вихревых пучков с большими значениями топологического заряда. Малые возмущения голографической решетки, настроенной на формирование единичного оптического вихря, вызывают лавину вихрей как с положительными, так и отрицательными топологическими зарядами, абсолютная величина которых меньше заряда исходного вихря. Провалы в спектре ОУМ характерны для исходных пучков с малыми значениями топологического заряда. Малые возмущения голографической решетки, настроенной на генерацию единичного вихря, также вызывают лавину вихрей. Но абсолютная величина топологических зарядов вихрей в лавине может значительно превышать топологические заряд исходного вихря. Возникает провал в спектре ОУМ.

### Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-01233; Грант №ВГ24/2018 «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского».

### Литература

1. **Soifer, V.A.** Laser beam mode selection by computer-generated holograms / V.A. Soifer, M.A. Golub. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 215 p. – ISBN: 978-0-8493-2476-5.
2. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2018. – 404 p. – ISBN: 978-1-138-54211-2.
3. **Berry, M.V.** Paraxial beams of spinning light. Proceedings of SPIE. – 1998. – Vol. 3487. – P. 6-11. – DOI: 10.1117/12.317704.
4. **Khonina, S.N.** Measuring the light field orbital angular momentum using DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Turunen // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). – 2001. – Vol. 10, Issue 4. – P. 241-255.
5. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.
6. **Khonina, S.N.** Optical vortices in a fiber: mode division multiplexing and multimode selfimaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer. – In: Recent progress in optical fiber research / ed. by M. Yasin, S.W. Harun, H. Arof. – Chap. 15. – Rijeka, Croatia: InTech Open, 2012. – P. 327-352. – DOI: 10.5772/28067.
7. **Gbur, G.J.** Singular optics / G.J. Gbur. – New York: CRC Press, 2016. – 545 p. – ISBN: 978-1-4665-8077-0.
8. **Lavery, M.P.J.** Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation / M.P.J. Lavery, G.C.G. Berkhout, J. Courtial, M.J. Padgett // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13, Issue 6. – 064006.
9. **Berkhout, G.C.G.** Efficient sorting of orbital angular momentum states of light / G.C.G. Berkhout, M.P.J. Lavery, J. Courtial, M.W. Beijersbergen, M.J. Padgett // Physical Review Letters. – 2010. – Vol. 105. – 153601.
10. **Vol'yar, A.V.** Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Vol'yar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 22. – P. 5635-5638. – DOI: 10.1364/OL.43.005635.
11. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederiter, J.T. Gopinath, K.E. Siemets // Optics Letters. – 2016. – Vol. 41, Issue 21. – P. 5019-5022. – DOI: 10.1364/OL.41.005019.
12. **Alperin, S.N.** Angular momentum of topologically structured darkness / S.N. Alperin, K.E. Siemets // Physical Review Letters. – 2017. – Vol. 119. – 203902.
13. **Котляр, В.В.** Методы определения орбитального углового момента лазерного пучка / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 42-53. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
14. **Flusser, J.** Moments and moment invariants in pattern recognition / J. Flusser, S. Tomáš, B. Zitová. – New York: John Wiley & Sons, 2009.
15. **Fu, S.** Influences of atmospheric turbulence effects on the orbital angular momentum spectra of vortex beams / S. Fu, Ch. Gao // Photonics Research. – 2016. – Vol. 4, Issue 5. – P. B1-B4.
16. **Kaiser, T.** Complete modal decomposition for optical fibers using CGH-based correlation filters / T. Kaiser, D. Flamm, S. Schröter, M. Duparré // Opt Express. – 2009. – Vol. 17. – 9347-9356.
17. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Applied Optics. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4110. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
18. **Abramochkin, E.** General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams / E. Abramochkin, E. Razuveva, V. Volostnikov // Journal of the Optical Society of America A. – 2010. – Vol. 27, Issue 11. – P. 2506-2513.
19. **Prudnikov, A.P.** Integrals and series, elementary functions / A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. – New York: Gordon and Breach, 1986. – 708 p.
20. **Воляр, А.В.** По ту сторону интенсивности или моменты интенсивности и измерение спектра оптических вихрей слож-



- ных пучков / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 736-743. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
21. **Воляр, А.В.** Лавинная неустойчивость орбитального углового момента оптических вихрей высших порядков / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 14-24. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-14-24.
22. **Volyar, A.V.** Super pulses of orbital angular momentum in fractional-order spiroid vortex beams / A.V. Volyar, Yu.A. Egorov // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 1. – P. 74-77. – DOI: 10.1364/OL.43.000074.
23. **Котляр, В.В.** Лазерные пучки Эрмита–Гаусса с орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 651-656.

### Сведения об авторах

**Воляр Александр Владимирович** – 1949 года рождения. Выпускник Симферопольского государственного университета (1972), а после окончания – его сотрудник. Доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Брецько Михаил Владимирович** – 1994 года рождения. С 2012 года студент Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. На данный момент аспирант первого курса кафедры общей физики физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, обработка графических изображений, программирование. E-mail: [mikhailbretcko4@gmail.com](mailto:mikhailbretcko4@gmail.com).

**Акимова Яна Евгеньевна** – 1994 года рождения. С 2012 года студент Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. На данный момент аспирант первого курса кафедры общей физики, физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Егоров Юрий Александрович** – 1975 года рождения. Выпускник Таврического национального университета (в настоящее время КФУ). Получил степень кандидата физико-математических наук в области оптики и лазерной физики в Таврическом национальном университете в 2005 году. Начиная с 2006 года доцент кафедры общей физики. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптика анизотропных сред. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 28 марта 2019 г. Окончательный вариант – 11 июня 2019 г.

## Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum

A.V. Volyar<sup>1</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>, Yu.A. Egorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Academician Vernadsky 4, 295007, Republic of Crimea, Simferopol, Russia

### Abstract

The article examines physical mechanisms responsible for shaping the vortex avalanche induced by a weak perturbation of the holographic lattice of a combined vortex beam. For this, we have developed a new technique for measuring the degenerate spectra of optical vortices and orbital angular momentum of combined singular beams. The technique is based on measuring the intensity moments of higher orders of a beam containing vortices with both positive and negative topological charges. The appropriate choice of the mode amplitudes in the combined beam enables us to form orbital angular momentum anomalous spectral regions in the form of resonance dips and bursts. Since the intensity moments of a vortex mode with positive and negative topological charges are the same (the moments are degenerate) for an axially symmetric beam, the measurements are carried out in the plane of the double focus of a cylindrical lens. The calibration measurements show that the experimental error is not higher than 4.5%. We also reveal that the dips and bursts in the orbital angular momentum spectrum are caused by the vortex avalanche induced by weak perturbations of the holographic grating relief responsible for the beam shaping. The appearance of the orbital angular momentum dips or bursts is controlled by the relation between the energy fluxes in the vortex avalanche with positive or negative topological charges.

**Keywords:** diffractive optics, image processing, optical vortices, orbital angular momentum, moments of intensity.

*Citation:* Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum. *Computer Optics* 2019; 43(4): 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.

*Acknowledgements:* The work was funded by the Russian Foundation for Basic Research under RFBR grant No. 19-29-01233 and under grant БГ24/2018, "V.I. Vernadsky Crimean Federal University Development Program in 2015 – 2024".

### References

- [1] Soifer VA, Golub MA. Laser beam mode selection by computer-generated holograms. Boca Raton: CRC Press; 1994. ISBN: 978-0-8493-2476-5.
- [2] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex laser beams. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group LLC; 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.
- [3] Berry MV. Paraxial beams of spinning light. *Proc SPIE* 1998; 3487: 6-11. DOI: 10.1117/12.317704.
- [4] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Paakkonen P, Turunen J. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE. *Optical Memory and Neural Networks* 2001; 10(4): 241-255.
- [5] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. *J Mod Opt* 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
- [6] Khonina SN, Kazanskiy NL, Soifer VA. Optical vortices in a fiber: mode division multiplexing and multimode self-imaging. In Book: Yasin M, Harun SW, Arof H, eds. Recent progress in optical fiber research. Rijeka, Croatia: InTech Open; 2012; Ch 15: 327-352. DOI: 10.5772/28067.
- [7] Gbur GJ. Singular optics. New York: CRC Press; 2016. ISBN: 978-1-4665-8077-0.
- [8] Lavery MPJ, Berkhout GCG, Courtial J, Padgett MJ. Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation. *J Opt* 2011; 13(6): 064006.
- [9] Berkhout GCG, Lavery MPJ, Courtial J, Beijersbergen MW, Padgett MJ. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 153601.
- [10] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
- [11] Alperin SN, Niederiter RD, Gopinath JT, Siemets KE. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41(21): 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
- [12] Alperin SN, Siemets KE. Angular momentum of topologically structured darkness. *Phys Rev Lett* 2017; 119: 203902.
- [13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Methods for determining the orbital angular momentum of a laser beam. *Computer Optics* 2019; 43(1): 42-53. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
- [14] Flusser J, Tomáš S, Zitová B. Moments and moment invariants in pattern recognition. New York: John Wiley & Sons; 2009.
- [15] Fu S, Gao Ch. Influences of atmospheric turbulence effects on the orbital angular momentum spectra of vortex beams. *Photon Res* 2016; 4(5): B1-B4.
- [16] Kaiser T, Flamm D, Schröter S, Duparré M. Complete modal decomposition for optical fibers using CGH-based correlation filters. *Opt Express* 2009; 17: 9347-9356.
- [17] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [18] Abramochkin E, Razuvaeva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513.
- [19] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and series, elementary functions. New York: Gordon and Breach; 1986.
- [20] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams. *Computer Optics* 2018; 42(5): 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
- [21] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Avalanche instability of the orbital angular momentum higher order optical vortices. *Computer Optics* 2019; 43(1): 14-24. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-14-24.
- [22] Volyar AV, Egorov YuA. Super pulses of orbital angular momentum in fractional-order spiroid vortex beams. *Opt Lett* 2018; 43(1): 74-77. DOI: 10.1364/OL.43.000074.
- [23] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Hermite-Gaussian laser beams with orbital angular momentum. *Computer Optics* 2014; 38(4): 651-656.

### Authors' information

**Alexander Vladimirovich Volyar** – born in 1949. A graduate of the Simferopol State University (1972), and after graduation – his employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993, he has been a professor, since 1999, he has become the head of the General Physics department. The sphere of scientific interests is optics, laser physics. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** – born in 1994. Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the first-year postgraduate student of the General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, processing of graphic images, programming. E-mail: [mikhailbretsko4@gmail.com](mailto:mikhailbretsko4@gmail.com).

**Yana Evgenievna Akimova** – born in 1994. Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the first-year postgraduate student of the General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, diffraction optics. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Yuriy Alexandrovich Egorov** – born in 1975. A graduate of Taurida National University (2001). Received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the field of Optics and Laser Physics at the Taurida National V.I. Vernadsky University (Crimean Federal University is now) in 2005. Since 2006, he has been a lecturer at the Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The sphere of scientific interests is singular optics, diffraction optics. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

---

*Received 28 March, 2019. The final version – 11 June, 2019.*

---