

Асимметричные лазерные гипергеометрические пучки

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, Е.Г. Абрамочкин³

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34,

³ Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки
Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН), Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрены асимметричные пучки Куммера (аК-пучки), скалярная комплексная амплитуда которых пропорциональна функции Куммера (вырожденной гипергеометрической функции). Эти пучки являются точным решением параксиального уравнения распространения (уравнения типа Шредингера) и получаются из обычных симметричных гипергеометрических пучков путём комплексного смещения координат. При распространении аК-пучки слабо изменяют свою интенсивность и вращаются вокруг оптической оси. Эти пучки – пример вихревых лазерных пучков с дробным орбитальным угловым моментом, величина которого зависит от четырёх параметров: топологического заряда вихря, величины смещения, параметра логарифмического аксикона и степени радиального сомножителя. Изменяя эти параметры, можно управлять орбитальным угловым моментом пучка: непрерывно увеличивать или уменьшать его.

Ключевые слова: оптический вихрь, асимметричный лазерный пучок, функция Куммера, гипергеометрическая функция, логарифмический аксикон, орбитальный угловой момент.

Цитирование: Котляр, В.В. Асимметричные лазерные гипергеометрические пучки / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, Е.Г. Абрамочкин // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 5. – С. 735-740. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-735-740.

Введение

В [1] рассмотрено семейство гипергеометрических лазерных пучков, комплексная амплитуда которых описывается вырожденной гипергеометрической функцией или функцией Куммера. Функции Куммера активно используются в оптике [2]. Ранее авторы рассматривали асимметричные лазерные пучки Бесселя [3] и Лагерра–Гаусса [4], которые получаются с помощью комплексного смещения аргументов функций комплексного пропускания обычных пучков Бесселя [5] и Лагерра–Гаусса [6]. Заметим, что все упомянутые лазерные пучки являются примерами оптических вихрей и обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Подход формирования асимметричных лазерных вихревых пучков [3, 4] был позднее развит в работах других авторов [7–10]. Асимметричные лазерные пучки используются в квантовой информатике для накачки нелинейных кристаллов и формирования методом спонтанной конверсии пары перепутанных фотонов с широким ОУМ-спектром [11].

В этой работе получены аналитические выражения для комплексной амплитуды асимметричного пучка Куммера, также имеющего вид полумесяца и вращающегося при распространении, и для ОУМ, нормированного на полную мощность. Математически асимметричные пучки Куммера – это четырёхпараметрическое семейство функций, являющихся точным решением параболического уравнения распространения (параксиального уравнения Гельмгольца). Поэтому ОУМ таких пучков зависит от четырёх параметров, два из которых целые, а два других действительные. Эти параметры позволяют варьировать ОУМ пучка Куммера в широких пределах.

Заметим, что пучки с осевой симметрией (Бесселя–Гаусса, Лагерра–Гаусса, Куммера) имеют одинаковый нормированный ОУМ, равный топологическому заряду. Асимметричные же пучки, полученные из этих симметричных пучков путём комплексного смещения, имеют разные нормированные ОУМ при одинаковых смещениях. С помощью изменения величины комплексного смещения можно управлять величиной ОУМ таких пучков, причём по-разному для разных асимметричных пучков.

1. Смещённые пучки Куммера

Кратко напомним выражения для несмещённых гипергеометрических пучков (пучков Куммера) [1]. Комплексная амплитуда в начальной плоскости (то есть при $z=0$) имеет вид:

$$E(r, \varphi, z=0) = \left(\frac{r}{w}\right)^{m+i\gamma} \exp\left(in\varphi - \frac{r^2}{w^2}\right), \quad (1)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n – топологический заряд оптического вихря (целое число), m, γ – целое и действительное числа, параметр γ задаёт силу логарифмического аксикона, так как $(r/w)^{i\gamma} = \exp[i\gamma \ln(r/w)]$. Выражение для комплексной амплитуды при любом $z > 0$ можно получить с помощью преобразования Френеля [1]:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) q^{-(m+i\gamma)/2}(z) \times \exp\left(in\varphi + \frac{ikr^2}{2z}\right) x^{n/2} {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -x\right), \quad (2)$$

где $z_0 = kw^2/2$, $q(z) = 1 - iz_0/z$,

$$x = [kwr/(2z\sqrt{q(z)})]^2 = [(z_0/z)(r/w)]^2/q(z).$$

Для получения асимметричного пучка Куммера аргументы комплексной амплитуды (x, y) надо сместить в комплексную плоскость. Понятно, что смещение на действительную величину не приведёт к изменению вида пучка и его ОУМ. Ограничимся смещением вида: $x \rightarrow x - aw$, $y \rightarrow y - iaw$, где a – безразмерная действительная величина. При таком смещении оптический вихрь не изменяется: $(x + iy)^n = [(x - aw) + i(y - iaw)]^n$. Тогда вместо (1) запишем комплексную амплитуду смещённого пучка Куммера в начальной плоскости:

$$E_s(r, \varphi, z = 0) = \frac{(x + iy)^n}{w^n} \left(\frac{s}{w}\right)^{m-n+iy} \exp\left(-\frac{s^2}{w^2}\right), \quad (3)$$

где $s^2 = (x - aw)^2 + (y - iaw)^2$.

Из (3) видно, что при $\gamma = 0$ смещение в начальной плоскости приводит к появлению двух точек фазовой сингулярности: оптический вихрь с центром в точке $(0, 0)$ и с топологическим зарядом $(m + n)/2$ и оптический вихрь с центром в точке $(2aw, 0)$ и с топологическим зарядом $(n - m)/2$. При $\gamma \neq 0$ в этих же точках возникают две амплитудные сингулярности, поскольку ноль не может возводиться в мнимую степень.

Далее вместо (2) запишем комплексную амплитуду смещённого пучка Куммера при любом z :

$$E_s(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) q^{-(m+iy)/2}(z) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{m+n+2+iy}{2}\right) \left(\frac{z_0 r}{z w \sqrt{q(z)}}\right)^n \times \\ \times \exp\left(in\varphi + \frac{iks^2}{2z}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+iy}{2}, n+1, -\xi\right), \quad (4)$$

где $s^2 = r(r - 2awe^{i\varphi})$, $\xi = [(z_0/z)(s/w)]^2/q(z)$.

Из (4) видно, что амплитуда смещённого пучка Куммера имеет в качестве множителя r^n и поэтому равна нулю при $r = 0$. То есть на оптической оси ($r = 0$) имеет место n -кратно вырожденный ноль интенсивности, вокруг которого распространяется оптический вихрь с топологическим зарядом n . Тем самым, несмотря на смещение пучка Куммера, точка сингулярности осталась в центре системы координат на оптической оси. Для определения координат других (внеосевых) нулей интенсивности асимметричного пучка Куммера следует приравнять комплексный аргумент функции Куммера в (4) к комплексному значению корня $\gamma_p = a_p + ib_p$, $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ (${}_1F_1(a, c, \gamma_p) = 0$). Асимптотика корней функции Куммера получена в [12]:

$$\gamma_p \approx 2\pi ip + (1 + (c - 2a) / 2\pi ip) \times \\ \times \left[(c - 2a) \ln 2\pi |p| + \ln \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} + \frac{\pi i}{2} (c - 2) \operatorname{sgn} p \right] + (5) \\ + \frac{2a(a-c)-c}{2\pi ip} + O\left(\frac{\ln |p|}{p^2}\right), p \rightarrow \pm\infty.$$

Здесь уместно напомнить, как связана функция Куммера с присоединёнными многочленами Лагерра и функциями Бесселя:

$$I_n^m(x) = \binom{n+m}{n} {}_1F_1(-n, m+1, x), \quad (6)$$

$$J_\nu(x) = \frac{e^{ix}(x/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1, -2ix).$$

Из второго уравнения (6) и вещественности нулей функции Бесселя следует, что при $c = 2a$ корни функции Куммера ${}_1F_1(a, c, x)$ чисто мнимые.

Уравнение (6) показывает, что асимметричный пучок Куммера является обобщением асимметричных пучков Бесселя и Лагерра–Гаусса.

Итак, приравняв аргумент функции Куммера в (4) значению корня γ_p , получим два уравнения для декартовых координат (x_p, y_p) изолированных нулей интенсивности асимметричного пучка Куммера:

$$-\frac{z_0^2 s^2}{z^2 w^2 (1 - iz_0/z)} = \gamma_p = a_p + ib_p,$$

где

$$s^2 = x_p^2 + y_p^2 - 2aw(x_p + iy_p).$$

Тогда

$$x_p^2 + y_p^2 - 2aw(x_p + iy_p) = -\frac{w^2 z (z - iz_0)}{z_0^2} (a_p + ib_p).$$

Приравняв мнимые части, получим выражение для y_p , из которого далее (приравняв вещественные части) выводим формулу и для x_p :

$$\begin{cases} y_p = -\frac{z}{akw} \left(a_p - \frac{z}{z_0} b_p \right), \\ x_p = aw \pm w \left[a^2 - \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \left(a_p + \frac{z_0}{z} b_p \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{z}{2az_0} \right)^2 \left(a_p - \frac{z}{z_0} b_p \right)^2 \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (7)$$

Два знака в выражении для координат x_p объясняются тем, что при $z = 0$ из (3) следует, что у интенсивности имеется два нуля на горизонтальной оси при $x = 0$ и при $x = aw$. Из (7) следует, что в дальней зоне дифракции (при больших $z \gg z_0$) нули асимметричного пучка Куммера будут иметь координаты:

$$\begin{cases} y_p = \frac{z^2 b_p}{akwz_0} = \frac{wb_p}{2a} \left(\frac{z}{z_0} \right)^2, \\ x_p = \pm \frac{z^2 b_p}{akwz_0} - i = \pm \frac{wb_p}{2a} \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 - i. \end{cases} \quad (8)$$

Но как сами нули смещённого пучка Куммера, так и их координаты комплексные, и в распределении интенсивности эти нули проявляются в виде локальных ми-

нимумов и не формируют дополнительных точек сингулярности. В дальней зоне аргумент ξ функции Куммера в (4) стремится к нулю, а сама функция поэтому стремится к единице. Из (4) видно, что в этом случае остаётся только один ноль интенсивности – на оптической оси ($r=0$). Это означает, что при распространении от начальной плоскости к дальней зоне два оптических вихря с топологическими зарядами $(m+n)/2$ и $(n-m)/2$ преобразуются в один вихрь с суммарным зарядом n .

Из (8) видно, что координаты комплексных нулей интенсивности (минимумов интенсивности) определяются только мнимой частью b_p комплексных корней функции Куммера γ_p . Также из (8) следует, что вся картина распределения интенсивности в поперечном сечении асимметричного пучка Куммера поворачивается в дальней зоне дифракции против часовой стрелки на 45 градусов.

На основе (4) запишем интенсивность асимметричного пучка Куммера:

$$I_s(r, \varphi, z) = \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{2n+2} \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{\frac{n+m+2}{2}} \times \left|\Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right)\right|^2 \exp\left(2\frac{k}{z}awr \sin \varphi\right) \times \exp\left[\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{z_0}{z}\right)\right] \times \left(\frac{r}{w}\right)^{2n} \left|{}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\xi\right)\right|^2. \quad (9)$$

Так как аргумент у экспоненты и у функции Куммера в (9) зависит и от r , и от φ , распределение интенсивности (9) не обладает осевой симметрией и имеет вид полумесяца, растущего при $a > 0$ или убывающего при $a < 0$. При $z=0$ полумесяц интенсивности имеет симметрию относительно оси x и при увеличении z поворачивается против часовой стрелки.

2. Орбитальный угловой момент асимметричного пучка Куммера

ОУМ параксиального пучка рассчитывается по формуле:

$$J_z = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right) E^*(x, y) dx dy, \quad (10)$$

где Im – мнимая часть числа, E^* – сопряжение комплекснозначной функции E , а полная мощность пучка рассчитывается по формуле:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) E^*(x, y) dx dy. \quad (11)$$

Так как и ОУМ, и мощность сохраняются при распространении пучка, то их можно рассчитывать в любой поперечной плоскости. Например, рассчитывая ОУМ в начальной плоскости, получим:

$$\frac{J_z}{W} = n + \left(\frac{2a}{w}\right) \frac{W_1}{W} + \gamma aw \frac{W_2}{W} + (m-n)aw \frac{2awW_3 - W_4}{W}, \quad (12)$$

где

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{m,n} dx dy, \quad W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x M_{m,n} dx dy,$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x^2 + y^2} M_{m,n+2} dx dy,$$

$$W_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} M_{m,n+2} dx dy,$$

$$W_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} M_{m,n+2} dx dy,$$

$$M_{m,n} = \frac{1}{w^{2m}} \exp\left[-\frac{2}{w^2}(x^2 - 2awx + y^2)\right] \times \left[(x^2 - 2awx + y^2)^2 + (2awy)^2\right]^{(m-n)/2} \times \exp\left[\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{2awy}{x^2 - 2awx + y^2}\right)\right].$$

Правая часть (12) имеет четыре слагаемых, каждое из которых может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знаков ($a > 0$): n , φ , $(m-n)$. То есть у асимметричного пучка Куммера ОУМ может быть как больше, так и меньше, чем у симметричного пучка ($J_z/W = n$). Из (12) следует, что при отсутствии смещения ($a=0$) нормированный на мощность пучка Куммера ОУМ равен топологическому заряду n . При $m=n$ и $\gamma=0$ из (12) следует, что ОУМ равен

$$\frac{J_z}{W} = n + \left(\frac{2a}{w}\right) \frac{W_1}{W},$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x M_n dx dy, \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_n dx dy, \quad (13)$$

$$M_n = \exp\left[-\frac{2(x-aw)^2}{w^2} - \frac{2(y^2 - a^2w^2)}{w^2}\right] \left(\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)^n.$$

Оба интеграла в (13) находятся в явном виде. Переходя к полярным координатам и вычисляя интегралы по полярному углу, получим:

$$W = \frac{2\pi}{w^{2n}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) I_0\left(\frac{4ar}{w}\right) r^{2n+1} dr, \quad (14)$$

$$W_1 = \frac{2\pi}{w^{2n}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) I_1\left(\frac{4ar}{w}\right) r^{2n+2} dr.$$

Эти интегралы являются справочными и выражаются через функцию Куммера, которая при данных параметрах сводится к полиномам Лагерра. Поэтому вместо (13) нормированный ОУМ равен

$$\frac{J_z}{W} = n + 2a^2 \frac{L_n^1(-2a^2)}{L_n^0(-2a^2)}. \quad (15)$$

Из (15) следует, что ОУМ при смещении увеличивается пропорционально смещению a^2 , а также пропорционально первому моменту интенсивности. Второе слагаемое в (15) всегда положительно, причём

при $a \neq 0$ отношение полиномов Лагерра больше единицы, то есть ОУМ увеличивается со смещением как минимум квадратично.

В более общем случае, когда вместо поперечных смещений (aw, iaw) вдоль координат x и y используются произвольные комплексные смещения $(a, b)w$, логарифмический аксикон отсутствует ($\gamma=0$), а $m=n+2N$ (N – неотрицательное целое число), вывод выражений для мощности пучка и его ОУМ громоздок, и здесь мы приводим их окончательный вид:

$$W = \frac{\pi}{2^{n+2N+1}} e^{Q^2/2} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l \frac{2-\delta_{k,0}}{(-2)^k} \binom{N}{l} \binom{N}{k+l} \times (n+2N-l)! (2Q^2)^l L_{n+2N-l}^k \left(-\frac{Q^2}{2} \right), \tag{16}$$

$$U(n, N) = \frac{\pi}{2^{n+2N+1}} e^{Q^2/2} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^l (-1)^{k+1} \binom{N}{l+1} \binom{N}{l-k} \frac{(n+2N-1-l)!}{2^{k-l} Q^{-2l-1}} L_{n+2N-1-l}^k \left(-\frac{Q^2}{2} \right) + \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{N}{l} \binom{N}{l-k} \frac{(n+2N-1-l)!}{2^{k-l} Q^{-2l-1}} L_{n+2N-1-l}^{k+1} \left(-\frac{Q^2}{2} \right) \right\}, \tag{20}$$

$$W(n, N) = \frac{\pi}{2^{n+2N+1}} e^{Q^2/2} \sum_{l=0}^N \sum_{k=0}^l \frac{2-\delta_{k,0}}{(-2)^k} \binom{N}{l} \binom{N}{k+l} \times (n+2N-l)! (2Q^2)^l L_{n+2N-l}^k \left(-\frac{Q^2}{2} \right).$$

В отличие от (15), формулы (16)–(20) позволяют рассчитывать ОУМ относительно произвольной точки, а не только относительно начала координат.

3. Численное моделирование

На рис. 1 и 2 показаны распределения интенсивности и фазы двух асимметричных пучков Куммера в начальной плоскости ($z=0$) и после распространения в свободном пространстве. При расчётах ис-

где $Q = 2\sqrt{(\text{Im}a)^2 + (\text{Im}b)^2}$ (17)

$$J_z = [n + 2(p-q)] \cdot W(n, N) + Q \cdot U(n+1, N) + \frac{2(n+N)}{Q} (p-q) \cdot U(n, N) + 2N(p+q) \cdot W(n+1, N-1) - \frac{2N}{Q} (p+q) \cdot U(n+2, N-1), \tag{18}$$

где $p = \text{Re}a \cdot \text{Im}b - \text{Im}a \cdot \text{Re}b,$
 $q = (\text{Im}a)^2 + (\text{Im}b)^2,$ (19)

пользовались следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 500$ мкм, топологический заряд оптического вихря $n = 1$, параметр асимметрии $a = 0,2$ (рис. 1) и $a = -0,2$ (рис. 2), показатель амплитудной степенной составляющей $m = 3$, параметр логарифмического аксикона $\gamma = 0$, расстояние распространения в пространстве $z = 2$ м, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 4$ мм).

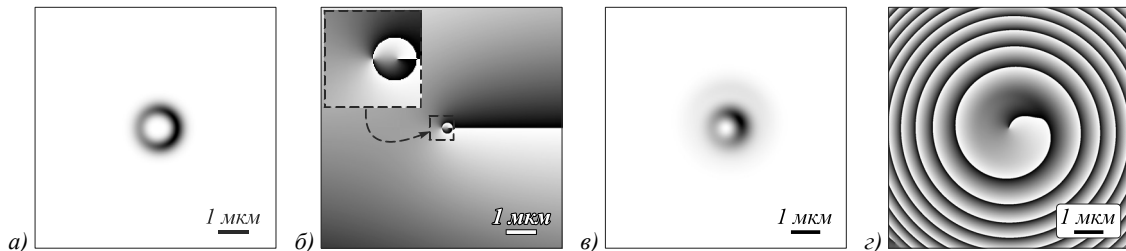


Рис. 1. Распределения интенсивности (а, в) (негатив) и фазы (б, з) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) асимметричного пучка Куммера ($a = 0,2$) в начальной плоскости $z = 0$ (а, б) и после распространения в свободном пространстве (в, з)

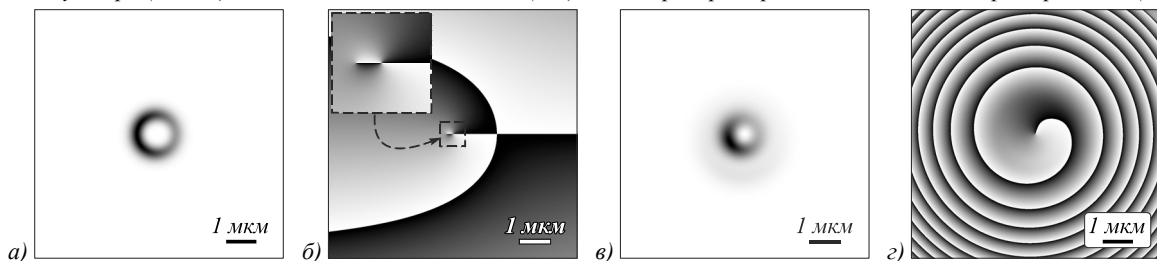


Рис. 2. Распределения интенсивности (а, в) (негатив) и фазы (б, з) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) асимметричного пучка Куммера ($a = -0,2$) в начальной плоскости $z = 0$ (а, б) и после распространения в свободном пространстве (в, з)

На вставке в рис. 1б и 2б видно, что в начальной плоскости имеется два оптических вихря: вихрь с топологическим зарядом $(m+n)/2 = 2$ в центре и с топологи-

ческим зарядом $(n-m)/2 = -1$ справа на рис. 1 (и слева на рис. 2). На рис. 1в и 2в видно, что при распространении полумесяц интенсивности повернулся на 45 градусов

против часовой стрелки, как и предсказывалось теорией, а на рис. 1z и 2z видно, что действительно два вихря с топологическими зарядами +2 и -1 в дальней зоне преобразовались в один вихрь с зарядом +1.

Заключение

Получены точные выражения для комплексной амплитуды и орбитального углового момента асимметричных пучков Куммера (аК-пучков), скалярная комплексная амплитуда которых пропорциональна функции Куммера (вырожденной гипергеометрической функции). Эти пучки являются точным решением параксиального уравнения распространения (уравнения типа Шредингера) и получаются из обычных симметричных гипергеометрических пучков путём комплексного смещения аргументов. При распространении аК-пучки слабо изменяют свою интенсивность и вращаются вокруг оптической оси. Эти пучки – пример вихревых лазерных пучков с дробным ОУМ, величина которого зависит от 4 параметров: топологического заряда вихря, величины смещения, параметра логарифмического аксикона и степени радиального сомножителя. Изменяя эти параметры, можно управлять ОУМ пучка: непрерывно увеличивать или уменьшать его.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Смещённые пучки Куммера», Федерального агентства научных организаций и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Орбитальный угловой момент асимметричного пучка Куммера», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части «Численное моделирование».

Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2008. – Vol. 25, Issue 1. – P. 262-270. – DOI: 10.1364/JOSAA.25.000262.
2. **Janicijevic, L.J.** Fraunhofer diffraction of a Gaussian beam by a four-sector binary grating with a half period fringes shift between adjacent sectors / L.J. Janicijevic, S. Topuzoski, L. Stoyanov, A. Dreischuh // Optical and Quantum Electronics. – 2019. – Vol. 51. – 71.
3. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
4. **Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // Physical Review A. – 2016. – Vol. 93, Issue 6. – 063858. – DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
5. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // Physical Review Letters. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499-1501.
6. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
7. **Barcelo-Chong, A.** Asymmetric Mathieu beams / A. Barcelo-Chong, B. Estrada-Portillo, A. Canales-Benavides, S. Lopez-Aguayo // Chinese Optics Letters. – 2018. – Vol. 16, Issue 12. – 122601.
8. **Zhao, Q.** Shaping diffraction-free Lommel beams with digital binary amplitude masks / Q. Zhao, L. Gong, Y.M. Li // Applied Optics. – 2015. – Vol. 54, Issue 25. – P. 7553-7558.
9. **Anguiano-Morales, M.** Self-healing properties of asymmetric Bessel beams / M. Anguiano-Morales // Optical and Quantum Electronics. – 2018. – Vol. 50. – 363.
10. **Wu, Q.** Study of the nonparaxial propagation of asymmetric Bessel-Gauss beams by using virtual source method / Q. Wu, Z. Ren // Optics Communications. – 2019. – Vol. 432. – P. 8-12.
11. **Alam, S.U.** Nonlinear frequency doubling characteristics of asymmetric vortices of tunable, broad orbital angular momentum spectrum / S.U. Alam, A.S. Rao, A. Ghosh, P. Vaity, G.K. Samanta // Applied Physics Letters. – 2018. – Vol. 112, Issue 17. – 171102.
12. **Седлецкий, А.М.** Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции / А.М. Седлецкий // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, Вып. 2. – С. 262-271.
13. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 720 этого номера.

Абрамочкин Евгений Григорьевич, 1962 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Математическая физика». Доктор физико-математических наук (2006 год), работает ведущим научным сотрудником Самарского филиала ФГБУН Физического института имени П.Н. Лебедева РАН. В списке научных работ около 50 статей. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: ega@fian.smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 2 июля 2019 г. Окончательный вариант – 10 сентября 2019 г.

Asymmetric hypergeometric laser beams

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, E.G. Abramochkin³

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia,

³ Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Samara, Russia

Abstract

Here we study asymmetric Kummer beams (aK-beams) with their scalar complex amplitude being proportional to the Kummer function (a degenerate hypergeometric function). These beams are an exact solution of the paraxial propagation equation (Schrödinger-type equation) and obtained from the conventional symmetric hypergeometric beams by a complex shift of the transverse coordinates. On propagation, the aK-beams change their intensity weakly and rotate around the optical axis. These beams are an example of vortex laser beams with a fractional orbital angular momentum (OAM), which depends on four parameters: the vortex topological charge, the shift magnitude, the logarithmic axicon parameter and the degree of the radial factor. Changing these parameters, it is possible to control the beam OAM, either continuously increasing or decreasing it.

Keywords: optical vortex, asymmetric laser beam, Kummer function, hypergeometric function, logarithmic axicon, orbital angular momentum.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Abramochkin EG. Asymmetric hypergeometric laser beams. *Computer Optics* 2019; 43(5): 735-740. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-734-740.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #18-19-00595 ("Shifted Kummer beams"), the Russian Foundation for Basic Research under grant #18-29-20003 ("Orbital angular momentum of the asymmetrical Kummer beam"), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the "Crystallography and Photonics" Research Center of the RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 ("Numerical simulation").

References

- | | |
|---|--|
| <p>[1] Kotlyar VV, Kovalev AA. Family of hypergeometric laser beams. <i>J Opt Soc Am A</i> 2008; 25(1): 262-270. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000262.</p> <p>[2] Janicijevic LJ, Topuzoski S, Stoyanov L, Dreischuh A. Fraunhofer diffraction of a Gaussian beam by a four-sector binary grating with a half period fringes shift between adjacent sectors. <i>Opt Quant Electr</i> 2019; 51: 71.</p> <p>[3] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. <i>Opt Lett</i> 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.</p> <p>[4] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. <i>Phys Rev A</i> 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.</p> <p>[5] Durnin J, Miceli JJ, Eberly JH. Diffraction-free beams. <i>Phys Rev Lett</i> 1987; 58: 1499-1501.</p> <p>[6] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. <i>Phys Rev A</i> 1992; 45: 8185-8189.</p> | <p>[7] Barcelo-Chong A, Estrada-Portillo B, Canales-Benavides A, Lopez-Aguayo S. Asymmetric Mathieu beams. <i>Chin Opt Lett</i> 2018; 16(12): 122601.</p> <p>[8] Zhao Q, Gong L, Li YM. Shaping diffraction-free Lommel beams with digital binary amplitude masks. <i>Appl Opt</i> 2015; 54(25): 7553-7558.</p> <p>[9] Anguiano-Morales M. Self-healing properties of asymmetric Bessel beams. <i>Opt Quant Electr</i> 2018; 50: 363.</p> <p>[10] Wu Q, Ren Z. Study of the nonparaxial propagation of asymmetric Bessel-Gauss beams by using virtual source method. <i>Opt Commun</i> 2019; 432: 8-12.</p> <p>[11] Alam SU, Rao AS, Ghosh A, Vaity P, Samanta GK. Non-linear frequency doubling characteristics of asymmetric vortices of tunable, broad orbital angular momentum spectrum. <i>Appl Phys Lett</i> 2018; 112(17): 171102.</p> <p>[12] Sedletskii AM. Asymptotics of the zeros of degenerate hypergeometric functions. <i>Mathematical Notes</i> 2007; 82(2): 229-237.</p> <p>[13] Abramowitz M, Stegun IA, eds. <i>Handbook of mathematical functions</i>. New York: Dover Publications Inc; 1965.</p> |
|---|--|

Authors' information

The information about authors **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 722 of this.

Eugeny Grigor'evich Abramochkin (b. 1962), graduated (1984) from Kuibyshev State University, majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of the P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests are related with complex analysis, special functions, and theory of mathematical physics equations. E-mail: ega@fian.smr.ru.

Received July 2, 2019. The final version – September 10, 2019.