

## Совместная реконструкция и сегментация изображений: сравнение двух алгоритмов малоракурсной томографии

В.В. Власов<sup>1</sup>, А.Б. Коновалов<sup>1</sup>, С.В. Кольчугин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. академика Е.И. Забабахина», 456770, Россия, Челябинская обл., г. Снежинск, ул. Васильева, д. 13

### Аннотация

В статье сравниваются два алгоритма малоракурсной томографии: итерационный алгоритм минимизации функционала Поттса и алгебраический алгоритм реконструкции с TV-регуляризацией и адаптивной сегментацией. Оба алгоритма ориентированы на восстановление кусочно-постоянных структур, используют теорию опознавания со сжатием и совмещают процедуры реконструкции и сегментации изображений. На уровне численного эксперимента показано, что каждый из алгоритмов способен точно восстанавливать фантом Шеппа–Логана всего по 7 ракурсам. Когда же речь идет о восстановлении объекта, имеющего сложную высокочастотную структуру (QR-кода), минимальное число ракурсов, необходимое для точной реконструкции, возрастает до 17–21 в случае алгоритма реконструкции с TV-регуляризацией и адаптивной сегментацией и до 32–34 в случае итерационного алгоритма минимизации функционала Поттса. Показано, что разработанный авторами статьи алгоритм реконструкции с TV-регуляризацией и адаптивной сегментацией имеет некоторое преимущество над итерационным алгоритмом минимизации функционала Поттса по таким критериям, как точность и скорость реконструкции, а также устойчивость к шуму проекционных данных. Отмечено, что алгоритм реконструкции с TV-регуляризацией и адаптивной сегментацией имеет хороший потенциал для дальнейшего совершенствования.

**Ключевые слова:** малоракурсная томография, реконструкция и сегментация изображений, опознавание со сжатием, функционал Поттса, полная вариация, фантом Шеппа–Логана, QR-код, коэффициент корреляции, показатель отклонения.

**Цитирование:** Власов, В.В. Совместная реконструкция и сегментация изображений: сравнение двух алгоритмов малоракурсной томографии / В.В. Власов, А.Б. Коновалов, С.В. Кольчугин // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 6. – С. 1008-1020. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-1008-1020.

### Введение

Термин «малоракурсная томография» (few-view tomography, FVT) начал употребляться еще в медицинской рентгеновской компьютерной томографии, с первых шагов развития которой встала задача минимизации дозы облучения пациента [1]. Для решения этой задачи предлагалось, в частности, сократить количество ракурсов съемки [1], которое в случае использования интегральных алгоритмов реконструкции [2] и исследования крупных пациентов превышало 1000. Сокращение числа ракурсов без значимой потери качества реконструкции стало возможным с разработкой алгоритмов, основанных на разложении в ряд [3–7]. На рубеже XX–XXI веков, когда были усовершенствованы классические итерационные алгоритмы реконструкции [8–16], «малым» считалось число ракурсов в пределах 50–100. На тот момент это было то минимальное число ракурсов, по которому еще удавалось точно восстановить томограмму. Создание в середине 2000-х теории опознавания со сжатием (compressed sensing, CS) [17–19] послужило предпосылкой для осуществления грандиозного качественного скачка, позволившего существенно сократить минимальное число ракурсов, необходимое для точной реконструкции. Так, алгоритм взвешенного поиска разреженности (few-view reweighted sparsity hunting, FRESH) [20], являющийся модификацией ускоренного итерационного алгоритма мягкой пороговой фильтрации (fast iterative shrinkage thresholding

algorithm, FISTA) [21], позволяет получить точную реконструкцию всего по 15 ракурсам (FORBILD фантом головы), а алгебраический алгоритм реконструкции с регуляризацией посредством минимизации нормы полной вариации (algebraic reconstruction technique with total variation (TV) regularization, ART-TV) [22, 23] – по 20 ракурсам (фантом Шеппа–Логана). Интенсификация исследований в области FVT способствовала выявлению целого ряда практических немедицинских приложений томографии, где желаемым стало получение точной реконструкции по еще меньшему числу ракурсов (7–9). К таким приложениям можно отнести контроль багажа в аэропортах [24], эмиссионную томографию плазмы [25], томографию сборок тепловыделяющих элементов [26], электронную томографию наноматериалов [27], томографию сильно поглощающих сред [28, 29] и пр. В свете изложенных обстоятельств авторам настоящей статьи, которые работают в области последнего из названных приложений, актуальной виделась разработка такого алгоритма FVT, который бы позволил осуществить еще один качественный переход: от точной реконструкции по 15–20 ракурсам к точной реконструкции по 7–9 ракурсам. Опыт алгебраической реконструкции [29–33] и построения масок изображений [34–36] позволил нам предположить, что подобная задача может быть решена посредством дополнения алгоритма ART-TV эвристической процедурой сегментации и организации цикла, в котором

ART-TV и алгоритм сегментации будут работать последовательно один за другим. Такой гибридный алгоритм был нами разработан и получил название ART-TVS (ART-TV с сегментацией). Уже первые результаты, казалось бы, превзошли все наши ожидания: удалось получить точные реконструкции модели обожженной взрывом металлической оболочки по 8 ракурсам, а модели газодинамической среды – по 4 ракурсам. Эти результаты были представлены на Международной конференции «XIII Забабахинские научные чтения» (Снежинск, Россия, март 2017 г.) [37], получили высокую оценку участников конференции и расценивались нами как революционные. Однако проведенный позже более скрупулезный анализ зарубежных литературных источников столкнул нас со статьей Стората и соавт. [38], где была представлена точная реконструкция фантома Шеппа–Логана всего по 7 ракурсам. Более того, авторами указанной статьи утверждалось, что их итерационный алгоритм минимизации функционала Поттса (iterative Potts minimization algorithm, IPMA), подобно нашему ART-TVS, выполняет совместную реконструкцию и сегментацию изображений. В создавшейся ситуации возникло естественное побуждение сравнить эти два алгоритма (IPMA и ART-TVS) и выявить, какой из них и по каким критериям превосходит другой. Результаты подобного исследования представлены в настоящей статье.

Статья организована следующим образом. В параграфе 1 дано описание и качественное сравнение алгоритмов IPMA и ART-TVS. Постановка и результаты численного эксперимента по реконструкции двух 2D-моделей: фантома Шеппа–Логана и QR-кода с использованием двух указанных алгоритмов, а также их сравнительный количественный анализ представлены в параграфе 2. В заключении дано обобщение полученных результатов, сформулированы выводы и обозначены направления дальнейших исследований.

### 1. Описание и качественное сравнение алгоритмов

В настоящей статье ставится и решается задача реконструкции кусочно-постоянного изображения, описываемого вектором  $\mathbf{f} \equiv \{f_j\}_1^J$  ( $J$  – число пикселей изображения). Далее вектор  $\mathbf{f}$  мы будем условно называть изображением. Модель кусочно-постоянного изображения хорошо подходит для рентгеновской компьютерной томографии, информативный параметр которой – линейный коэффициент ослабления приблизительно одинаков в различных однородных областях объекта. В случае малого числа ракурсов задача сводится к решению сильно недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{g} \equiv \{g_i\}_1^I$  – вектор проекционных данных ( $I$  – число лучей, соединяющих источники и детекторы), а  $\mathbf{W} \equiv \{W_{ij}\}_{1,1}^{I,J}$  – матрица весовых коэффициентов, которые рассчитываются классическим образом [2, 3], как длины отрезков пересечения лучей с пикселями изображения.

### Алгоритм IPMA

Алгоритм IPMA решает оптимизационную задачу Поттса [38, 39], которая ставится в виде

$$\|\nabla\mathbf{f}\|_0 \rightarrow \min \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (2)$$

где  $\|\nabla\mathbf{f}\|_0$  –  $L_0$  – норма изображения  $\nabla\mathbf{f}$ , а оператор  $\nabla$  в данном случае обозначает дискретное градиентное преобразование  $\mathbf{f}$ . Как известно,  $L_0$  – норма изображения – это число его ненулевых пикселей. Дискретное градиентное преобразование кусочно-постоянного изображения представляет собой разреженное изображение, ненулевые пиксели которого образуют границы структур изображения исходного (см., например, [22]). Таким образом, решение задачи (2) подразумевает условную минимизацию полной длины всех границ исходного кусочно-постоянного изображения. Задача минимизации решается методом неопределенных множителей Лагранжа. При этом функционал Лагранжа (он же функционал Поттса) записывается в виде [38, 39]

$$P_\gamma(\mathbf{f}) = \|\mathbf{W}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2^2 + \gamma\|\nabla\mathbf{f}\|_0, \quad (3)$$

где  $\|\mathbf{W}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2$  – норма (Эвклидова норма) невязки проекционных данных  $\mathbf{g}$ , а  $\gamma$  – параметр регуляризации (он же множитель Лагранжа).

Алгоритмически задача минимизации функционала (3) решается посредством организации итерационного процесса, где на каждой ( $n+1$ )-итерации выполняется последовательность следующих операций [39]. Во-первых, определяется вспомогательное изображение  $\hat{\mathbf{f}}^{(n+1)}$  размера  $\mathbf{f}$  по формуле

$$\hat{\mathbf{f}}^{(n+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{W}^*\mathbf{W})\mathbf{f}^{(n)} + \mathbf{W}^*\mathbf{g}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица,  $\mathbf{W}^*$  – комплексно-сопряжённая матрица. Во-вторых, методом динамического программирования решается классическая задача Поттса, характерная для процедуры удаления шума или блюринга изображения,

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\| \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}^{(n+1)} \right\|_2^2 + \gamma\|\nabla\mathbf{f}\|_0. \quad (5)$$

Метод динамического программирования, основная идея которого состоит в решении задачи путем ее разбиения на подзадачи, рекуррентно связанные между собой, кратко описан в статьях авторов IPMA [38, 39]. За более подробным описанием метода мы отсылаем читателей к статье Мамфорда и Шаха [40]. Итерации повторяются до полной сходимости алгоритма. Критерием выхода из итерационного цикла является достижение заданного значения  $\varepsilon$  отношением

$$\frac{\|\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{f}^{(n)}\|_2}{\|\mathbf{f}^{(n+1)}\|_2 + \|\mathbf{f}^{(n)}\|_2} \leq \varepsilon, \quad (6)$$

которое в [39] условно названо «относительным  $L_2$  – расстоянием» между двумя соседними приближениями решения.

IPMA реализован авторами статей [38, 39] кодом в среде MATLAB, который находится в открытом до-

степе в сети Internet [41]. Этот код мы и использовали в нашем численном эксперименте (см. параграф 2) для получения результатов реконструкции тестовых моделей с помощью IPMA. При этом мы варьировали параметр регуляризации  $\gamma$  в пределах  $[0,005; 0,5]$ . Наилучшие результаты, представленные в параграфе 2, соответствуют значению  $\gamma=0,01$  в случае реконструкции фантома Шеппа–Логана и значению  $\gamma=0,04$  – в случае восстановления QR-кода. Параметр останова итерационного цикла  $\varepsilon$  был выбран равным значению  $10^{-6}$  в соответствии с рекомендациями [39].

#### Алгоритм ART-TVS

Наш алгоритм ART-TVS задуман как улучшенная модификация ART-TV и включает две стадии. Первая стадия – это собственно ART-TV в версии авторов статьи [23]. Вторая стадия – это эвристическая процедура сегментации, реализованная с использованием известного метода наращивания областей [42]. Далее мы организуем цикл, в котором эти две стадии работают последовательно одна за другой. На ART-TV стадии уже осуществляется выбор дискретных значений, которые должны определить кусочно-постоянную структуру изображения. Однако в случае малого числа ракурсов TV-регуляризация не справляется с задачей правильного выбора дискретных значений, в результате ART-TV сходится к неверному решению. Введение нами в алгоритм стадии сегментации призвано упорядочить процедуру выбора правильных дискретных значений реконструируемого изображения и, таким образом, добиться эффекта дополнительной регуляризации процесса алгебраической реконструкции. Особенностью нашего алгоритма ART-TVS является тот факт, что после сегментации мы далее применяем алгоритм ART-TV посегментно, обрабатывая не все изображение сразу, а последовательно выбираемые сегменты из сформированного списка сегментов. Таким образом организуется цикл еще и по сегментам. С учетом сказанного последовательность шагов алгоритма ART-TVS может быть представлена следующим образом.

**Шаг 1.** Восстановить изображение с помощью алгоритма ART-TV.

**Шаг 2.** Применить к полученному изображению метод адаптивной сегментации и сформировать список сегментов, подлежащих дальнейшей обработке.

**Шаг 3.** Выбрать случайным образом необработанный сегмент из списка сегментов.

**Шаг 4.** Восстановить выбранный сегмент с помощью алгоритма ART-TV. При этом в пиксели, принадлежащие другим сегментам, поправки не вносятся.

**Шаг 5.** Удалить обработанный сегмент из списка сегментов.

**Шаг 6.** Если список сегментов не пуст, то перейти на шаг 3, иначе – на шаг 7.

**Шаг 7.** Проверить стоп-критерий. Если он не выполняется, то перейти на шаг 2. В противном случае закончить выполнение алгоритма.

В качестве стоп-критерия мы используем скорость сходимости итерационного процесса. Т. е. цикл прерывается, когда достигается заданное значение  $\nu$  скорости

$$\frac{\|\mathbf{W}\mathbf{f}^{(z)} - \mathbf{g}\|_2 - \|\mathbf{W}\mathbf{f}^{(z+1)} - \mathbf{g}\|_2}{\|\mathbf{W}\mathbf{f}^{(z)} - \mathbf{g}\|_2} \leq \nu, \quad (7)$$

где  $z$  – индекс итераций внешнего цикла ART-TVS. При проведении численного эксперимента, описанного в параграфе 2, значение  $\nu$  варьировалось в пределах от 0,0005 до 0,001. В ряде случаев итерации приходилось продолжать и после достижения скоростью сходимости заданного значения с тем, чтобы улучшить результат реконструкции. Тогда в силу вступал критерий визуального сходства восстанавливаемого изображения и исходной модели.

На ART-TV стадии реконструкции (шаги 1 и 4 алгоритма ART-TVS) ставится и решается следующая оптимизационная задача

$$\|\mathbf{f}\|_{TV} \rightarrow \min \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{W}\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (8)$$

где  $\|\mathbf{f}\|_{TV}$  – норма полной вариации (TV-норма) изображения  $\mathbf{f}$ . Эта норма представляет собой не что иное, как  $L_1$  – норму дискретного градиентного преобразования изображения  $\mathbf{f}$ , т.е.  $\|\mathbf{f}\|_{TV} \equiv \|\nabla\mathbf{f}\|_1$ . Таким образом, ART-TV, так же как и IPMA, представляет собой CS-алгоритм, ориентированный на реконструкцию кусочно-постоянных изображений, которые переводятся в разряд разреженных посредством дискретного градиентного преобразования. Задача минимизации (8) решается неявно посредством реализации двух отдельных шагов, которые при необходимости циклически повторяются. На первом шаге (ART-шаге) выполняются стандартные итерации алгебраической реконструкции в соответствии с формулой [2, 3]

$$f_j^{(k+1)} = f_j^{(k)} + \lambda \frac{g_i - \sum_j W_{ij} f_j^{(k)}}{\sum_j W_{ij}^2} W_{ij}, \quad (9)$$

где  $k$  – индекс итерации,  $\lambda$  – управляющий параметр,  $i=1,2,\dots,I$ ;  $j=k \bmod J + 1$ . На втором шаге (TV-шаге) TV-норма полученного изображения минимизируется с применением стандартного алгоритма наискорейшего спуска, выполняющего градиентные итерации в соответствии с формулой [23]

$$f_j^{(s+1)} = f_j^{(s)} - \tau \frac{\partial \|\mathbf{f}^{(s)}\|_{TV}}{\partial f_j}, \quad (10)$$

где  $s$  – индекс итерации,  $\tau$  – шаг итерации. Для вычисления нормы  $\|\mathbf{f}^{(s)}\|_{TV}$  и ее градиента  $\partial \|\mathbf{f}^{(s)}\|_{TV} / \partial f_j$  мы используем приближенные формулы сглаженной изотропной версии ART-TV, подробно описанной в статье Юу и соавт. [23]. Далее организуется цикл, в котором ART-шаг и TV-шаг последовательно чередуются. Итерационный процесс управляется оператором и прекращается, когда изображения, полученные на двух соседних итерациях,

становятся визуально неотличимыми друг от друга. Реально число внутренних итераций ART- и TV-шагов не превышает 5, а число итераций ART-TV цикла – 50. Поэтому наш алгоритм ART-TVS, несмотря на наличие нескольких внутренних циклов, оказывается конкурентноспособным и даже выигрывает у IPMA в скорости реконструкции (см. параграф 2). Что касается управляющих параметров алгоритма ART-TV, то параметр  $\lambda$  выбран на основании нашего опыта алгебраической реконструкции [29–33] равным  $\lambda = 0,9$ , а шаг итерации  $\tau$  подстраивается на каждой итерации в соответствии с алгоритмом, описанным в [23]. Начальное значение шага итерации также выбрано в соответствии с рекомендациями, сделанными в указанной статье:  $\tau_0 = 0,997$ .

Как отмечено выше, стадия адаптивной сегментации (шаг 2 алгоритма ART-TVS) реализуется с использованием метода наращивания областей. На данном этапе исследований мы не ставили целью разработать оптимальный с точки зрения минимизации числа ракурсов алгоритм сегментации. Цель была – выбрать из существующих алгоритмов сегментации наиболее простой и стабильный алгоритм, но при этом минимально зависимый от интерактивного вмешательства оператора. Требование адаптивности к алгоритму сегментации обусловлено желанием максимально сократить время работы алгоритма ART-TVS, в цикле которого процедура сегментации должна повторяться многократно. Как известно, стандартная реализация метода наращивания областей [42] зависит от выбора начальной точки наращивания. Наиболее простой и эффективный путь избавиться от этой зависимости и сделать алгоритм адаптивным – это рандомизировать выбор начальной точки [43]. Мы пошли именно этим путем.

Таким образом, мы иницируем точку (пиксель) наращивания случайным образом. Все пиксели полученного сегмента исключаются из массива необработанных пикселей изображения. Следующий пиксель выбирается также случайным образом из оставшихся необработанных пикселей. Процедура повторяется до тех пор, пока остается хотя бы один необработанный пиксель. На основании сказанного наш **алгоритм адаптивной сегментации** может быть представлен следующей последовательностью шагов.

**Шаг 1.** Случайно выбрать пиксель из множества необработанных пикселей сегментируемого изображения.

**Шаг 2.** Применить алгоритм наращивания областей в реализации, описанной в статье Менерта и Джеквея [42].

**Шаг 3.** Пометить пиксели полученного сегмента как обработанные.

**Шаг 4.** Если есть еще необработанные пиксели, перейти на шаг 1. В противном случае закончить выполнение алгоритма.

Значение порога при выполнении шага 2 задается оператором, исходя из особенностей сегментируемого изображения. Для описанного ниже численного

эксперимента порог находится в пределах от одного до десяти процентов максимальной интенсивности изображения.

Обе стадии алгоритма ART-TVS реализованы авторами настоящей статьи кодом в среде MATLAB.

#### *Качественное сравнение алгоритмов*

Как пишут в [38] сами авторы IPMA, их алгоритм можно качественно характеризовать с двух сторон. С одной стороны, IPMA решает обратную задачу относительно кусочно-постоянной функции, т.е. выполняется реконструкция изображения. С другой стороны, в результате работы алгоритма образуется фрагментарная структура, каждый фрагмент (или сегмент) которой характеризуется своим собственным значением интенсивности, т.е. выполняется сегментация изображения. Однако совершенно очевидно, что IPMA в ходе итерационного процесса (4)–(5) не сегментирует изображения в явном виде. Сегментация как бы скрыта внутри алгоритма реконструкции и является следствием решения обратной задачи. При этом фрагментарная структура образуется, как мы увидим из дальнейшего рассмотрения, независимо от того, к правильному или неправильному решению алгоритм сходится. Таким образом, авторы IPMA вполне обоснованно утверждают, что их алгоритм выполняет «совместную реконструкцию и сегментацию изображений». В отличие от IPMA алгоритм ART-TVS сегментирует промежуточные результаты реконструкции в явном виде. Сегментация искусственно вводится в алгоритм с тем, чтобы усилить эффект TV-регуляризации с целью синтеза «правильной» фрагментарной структуры. При этом реконструкция и сегментация последовательно сменяют друг друга внутри итерационного цикла. Поэтому ART-TVS в отличие от IPMA было бы корректнее назвать не алгоритмом, выполняющим совместную реконструкцию и сегментацию, а алгоритмом, сочетающим эти две процедуры.

Теперь о возможности обоснования сходимости алгоритмов. IPMA ставит и решает оптимизационную задачу реконструкции (2) в явном виде. По этой причине представляется возможным строго доказать сходимость алгоритма, что и сделано его авторами в статьях [38, 39]. Алгоритм ART-TVS минимизирует, как мы полагаем, TV-норму изображения, но делает это неявно. Строго доказать сходимость нашего алгоритма в силу того, что в него включена эвристическая процедура сегментации, представляется затруднительным. Опосредованно же объяснить сходимость ART-TVS можно, например, следующим образом. Алгоритм ART-TV ставит и решает оптимизационную задачу (8). Он сходится. Это доказано строго в [23]. Мы вводим сегментацию для того, чтобы улучшить фрагментарную структуру, которая получается в результате работы ART-TV. Таким образом, нужно убедиться в том, что действительно происходит улучшение, а не ухудшение. Это можно сделать посредством сравнения результатов, полученных на различных итерациях ART-TVS. В качестве примера

на рис. 1 сравниваются фрагменты промежуточных результатов реконструкции фантома Шеппа–Логана, соответствующие 5-й (рис. 1в и 1з), 15-й (рис. 1д и 1е) и 30-й (рис. 1ж и 1з) итерациям ART-TVS. Левый столбец фрагментов (рис. 1в, 1д и 1ж) представляет результаты, полученные после работы ART-TV, но до применения процедуры сегментации, а правый столбец (рис. 1з, 1е и 1з) – это уже фрагменты сегментированных изображений. Мы видим, что после сегментации фрагменты приобретают выраженную «пятнистую» структуру, свойственную сегментированным изображениям. При этом хорошо заметно, что после 15-й итерации фрагментное изображение (рис. 1е) получилось более близким к оригиналу (рис. 1б), чем после 5-й (рис. 1з), а после 30-й (рис. 1з) – более близким, чем после 15-й (рис. 1е). Что наглядно подтверждает сходимость нашего алгоритма.

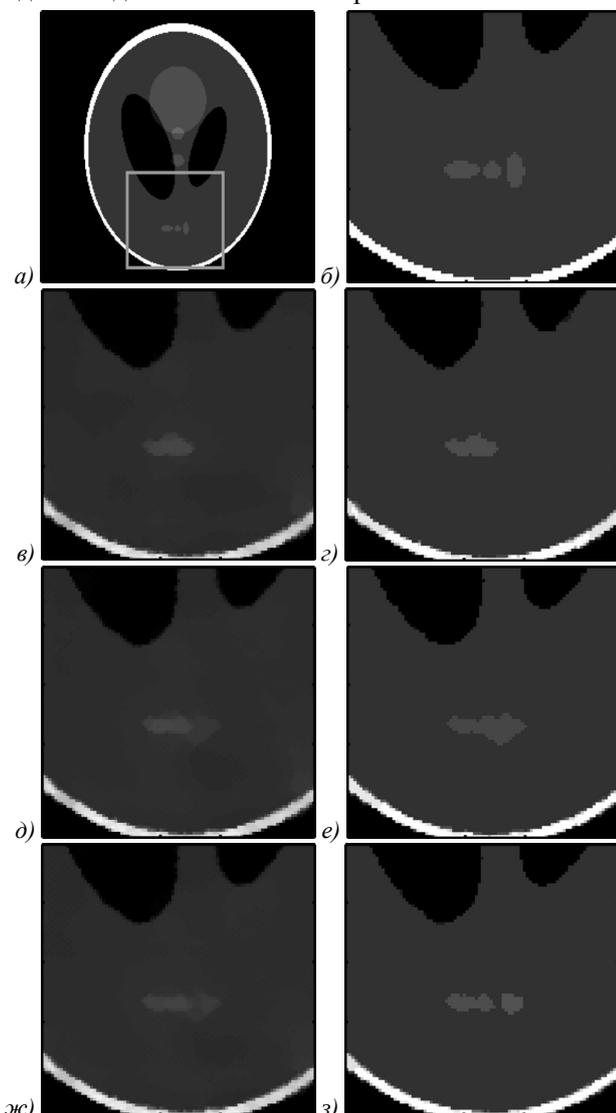


Рис. 1. Фантом Шеппа–Логана, заданный на сетке  $256 \times 256$  (а); увеличенный фрагмент фантома (б); фрагменты промежуточных результатов реконструкции фантома до (слева) и после (справа) сегментации, соответствующие 5-й ((в) и (з)), 15-й ((д) и (е)) и 30-й ((ж) и (з)) итерациям ART-TVS

## 2. Численный эксперимент и анализ его результатов

Для того чтобы сравнить алгоритмы IPMA и ART-TVS количественно, нами поставлен численный эксперимент по реконструкции двух 2D-моделей: фантома Шеппа–Логана и QR-кода текста «Совместная реконструкция и сегментация изображений» (рис. 2). Фантом Шеппа–Логана, как известно, является «золотым стандартом» при тестировании алгоритмов реконструкции. А QR-код выбран нами как объект, точная реконструкция «тонкой» высокочастотной структуры которого представляет собой задачу повышенной сложности. Идея выбрать именно такой объект для исследования алгоритмов заимствована нами из статьи [44]. Моделировалась веерная геометрия съема данных: расстояние между источником и центром объекта – 70 у.е.д. (условных единиц длины), расстояние между источником и линейкой детекторов – 125 у.е.д. Область реконструкции – квадрат со стороной 6 у.е.д. Расстояние между центрами соседних детекторов выбрано равным 0,02 у.е.д. Число детекторов линейки равно 500. Схема расположения источников вокруг объекта – полукруговая с равным угловым шагом между ракурсами. Проекционные данные, по которым восстанавливались томограммы моделей, моделировались посредством вычисления сумм

$$g^h = \sum_{j=1}^J W_{ij} f_j^h, \quad h = 1, 2; \quad (11)$$

где  $\mathbf{f}^h \equiv \{f_j^h\}_{j=1}^J$  – вектора, описывающие исходные модели,  $h$  – индекс модели. Для того чтобы исключить «инверсное преступление» (inverse crime) [45], все расчеты прямой задачи (11) выполнены для матрицы  $1000 \times 1000$ . В то время как томограммы фантома Шеппа–Логана восстанавливались на матрицы  $256 \times 256$  и  $500 \times 500$ , а томограммы QR-кода – на матрицы  $228 \times 228$  и  $513 \times 513$ .

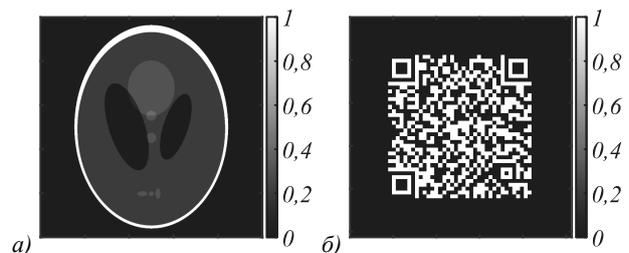


Рис. 2. Тестовые модели, заданные на сетке  $1000 \times 1000$ : фантом Шеппа–Логана (а), QR-код (б)

В качестве характеристик качества реконструкции, позволяющих оценить, насколько точно удается восстановить исходные численные модели, мы выбрали коэффициент корреляции  $k_{cor}$  и показатель отклонения  $k_{dev}$ :

$$k_{cor} = \frac{\sum_{j=1}^J (f_j^{tom} - \bar{f}^{tom})(f_j^{src} - \bar{f}^{src})}{(J-1)\Delta f^{tom} \Delta f^{src}}, \quad (12)$$

$$k_{dev} = \frac{\sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J (f_j^{tom} - f_j^{src})^2}}{\Delta f^{src}}, \quad (13)$$

где  $\bar{f}$  и  $\Delta f$  – среднее значение и среднеквадратиче-ское отклонение, вычисленные по всем  $J$  ячейкам изображения, а индексы «src» и «tom» обозначают отношение к исходной модели и реконструированному изображению соответственно. Наш опыт (см., например, [36]) свидетельствует об удобстве и эф-фективности использования этих характеристик в тех случаях, когда исходная модель известна. Значение  $k_{cor}$ , близкое к единице, показывает высокую корреля-цию между исходной моделью и реконструирован-ным изображением и свидетельствует о высокой точ-ности реконструкции. Значение  $k_{dev}$ , близкое к нулю,

говорит о хорошем совпадении двух изображений и также характеризует высокую точность реконструкции. Если же значение  $k_{cor}$  ближе к нулю, чем к единице, а значение  $k_{dev}$  близко или превышает единицу, значит, мы восстановили изображение плохого качества.

Результаты реконструкции моделей с использо-ванием алгоритмов IPMA и ART-TVS по идеальным проекционным данным (11) приведены на рис. 3–5, а по зашумленным проекционным данным – на рис. 6 и 7. Шкала интенсивности изображений во всех случа-ях проградуирована в обратных у.е.д. Значения ха-рактеристик качества (12) и (13), рассчитанные для всех томограмм рис. 3–7, приведены в табл. 1.

Табл. 1. Характеристики качества изображений, представленных на рис. 3–7

Рис.	Фантом	Алгоритм	Число ракурсов	Сетка	Шум, %	$K_{cor}$	$k_{dev}$	
3a	Шеппа–Логана	IPMA	7	256 × 256	–	1,0000	0,0098	
3б		ART-TVS				1,0000	0,0053	
3в		IPMA				0,8366	0,5858	
3г		ART-TVS	9	500 × 500		1,0000	0,0037	
3д		IPMA				1,0000	0,0082	
3е		ART-TVS				1,0000	0,0031	
4a	QR-код	IPMA	7	228 × 228		0,4228	1,0346	
4б		ART-TVS				0,6352	0,8046	
4в		IPMA	17	228 × 228		0,5145	0,9268	
4г		ART-TVS				0,9990	0,0453	
4д		IPMA	34	228 × 228		1,0000	0,0032	
4е		ART-TVS				1,0000	0,0016	
5a		Шеппа–Логана	IPMA	31	513 × 513	0,7594	0,6855	
5б				32		0,9994	0,0117	
5в			ART-TVS	20	0,8551	0,5338		
5г				21	0,9989	0,0273		
6a	Шеппа–Логана		IPMA	7	256 × 256	0,1	0,9999	0,0125
6б			ART-TVS				1,0000	0,0085
6в	QR-код	IPMA	34	228 × 228	1,0000		0,0044	
6г		ART-TVS			17		0,9975	0,0713
7a	Шеппа–Логана	IPMA	7	256 × 256	0,5		0,9929	0,1195
7б		ART-TVS					0,9997	0,0231

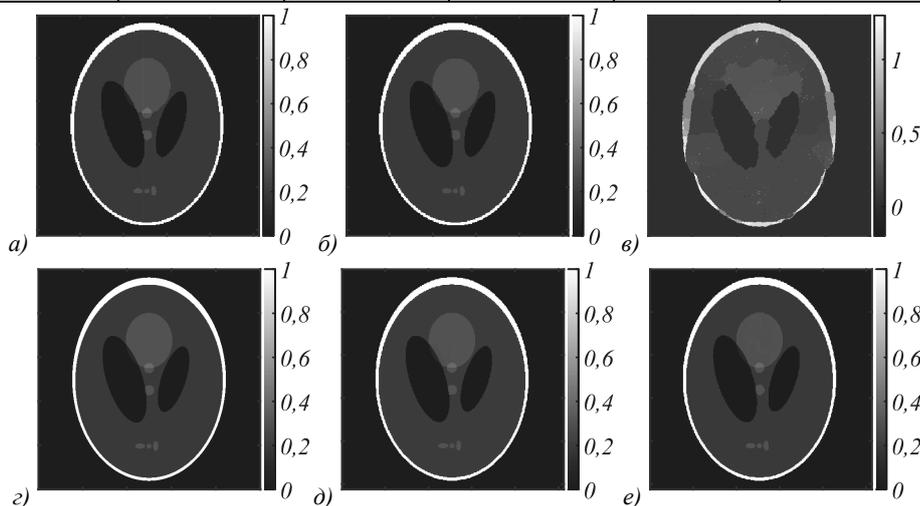


Рис. 3. Реконструкции фантома Шеппа–Логана по идеальным данным: (а) IPMA, 7 ракурсов, 256 × 256; (б) ART-TVS, 7 ракурсов, 256 × 256; (в) IPMA, 7 ракурсов, 500 × 500; (г) ART-TVS, 7 ракурсов, 500 × 500; (д) IPMA, 9 ракурсов, 500 × 500; (е) ART-TVS, 9 ракурсов, 500 × 500

Рис. 3 представляет реконструкции фантома Шеп-па–Логана. Начальный выбор числа ракурсов 7 и раз-мера сетки 256 × 256 (рис. 3а и 3б) обусловлен нашим желанием повторить с помощью IPMA и ART-TVS

результат, полученный авторами статьи [38]. После нескольких неудачных попыток нам удалось подо-брать для IPMA значение параметра регуляризации, близкое к оптимальному ( $\gamma=0,01$ ), и получить точ-

ную реконструкцию фантома (рис. 3а). ART-TVS также справляется с задачей точной реконструкции фантома Шеппа–Логана по 7 ракурсам (рис. 3б). Причем он делает это и при переходе на более густую сетку  $500 \times 500$  (рис. 3з). А вот IPMA при реконструкции по 7 ракурсам на сетку  $500 \times 500$  имеет проблему со сходимостью к правильному решению (рис. 3е). Мы видим, что мелкие детали фантома на рис. 3в разрешаются неудовлетворительно. Впрочем, стоит только увеличить число ракурсов с 7 до 9, эта проблема исчезает и снова получается неплохой результат (рис. 3д), вполне сравнимый с аналогичной реконструкцией по ART-TVS (рис. 3е). Характеристики качества лучше у нашего алгоритма (табл. 1).

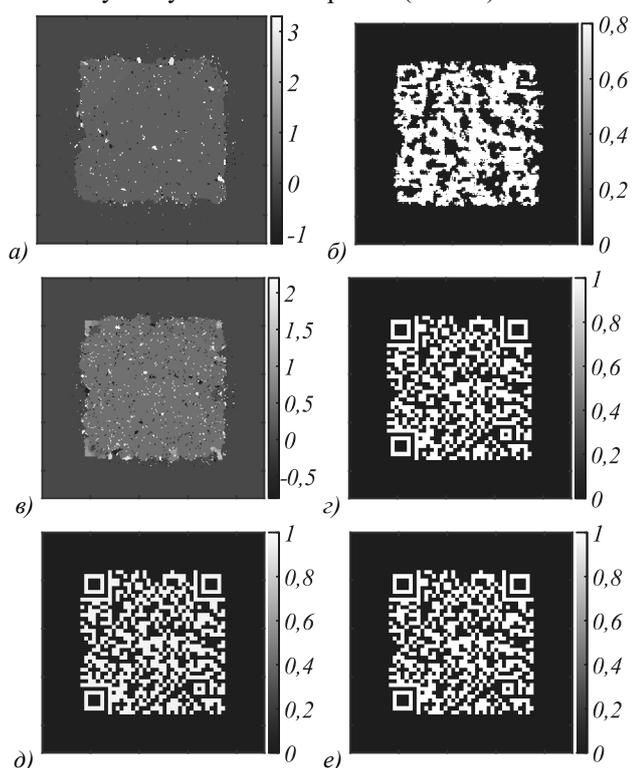


Рис. 4. Реконструкции QR-кода по идеальным данным на сетку  $228 \times 228$ : (а) IPMA, 7 ракурсов; (б) ART-TVS, 7 ракурсов; (в) IPMA, 17 ракурсов; (г) ART-TVS, 17 ракурсов; (д) IPMA, 34 ракурса; (е) ART-TVS, 34 ракурса

На рис. 4 представлены реконструкции QR-кода на сетку  $228 \times 228$ . Попытки точно восстановить модель по 7 ракурсам с помощью как IPMA (рис. 4а), так и ART-TVS (рис. 4б), очевидно, не увенчались успехом. Точные реконструкции получаются минимум по 17 ракурсам в случае ART-TVS (рис. 4г) и только по 34 ракурсам в случае IPMA (рис. 4д). По характеристикам качества (12) и (13) ART-TVS вновь имеет преимущество над IPMA (табл. 1). Что касается результатов восстановления QR-кода на более густую сетку  $513 \times 513$  (рис. 5), то получить точную реконструкцию удается по 21 проекции с помощью ART-TVS (рис. 5з) и по 32 проекциям с помощью IPMA (рис. 5б). Как мы видим, в данном случае увеличивать количество проекций при переходе на более густую сетку потребовалось не для IPMA, а для ART-TVS. В целом анализ результатов,

представленных на рис. 3–5, свидетельствует, что для точной реконструкции фантома Шеппа–Логана требуется существенно меньшее количество ракурсов (7–9), нежели для точной реконструкции QR-кода, имеющего высокочастотную структуру (17–34 ракурсов). При этом если в первом случае по данному показателю ART-TVS и IPMA весьма близки друг к другу (7 против 7–9 ракурсов), то во втором ART-TVS заметно превосходит IPMA (17–21 против 32–34 ракурсов). Из полученных результатов также вытекает, что далеко не каждый объект, имеющий кусочно-постоянную структуру, алгоритмы IPMA и ART-TVS способны восстановить точно по числу ракурсов меньше, чем 10. Так, QR-код и, вероятно, другие объекты с высокочастотными составляющими к числу таковых не относятся. В этом смысле необходимы дальнейшие исследования по совершенствованию рассматриваемых, а также других CS-алгоритмов.

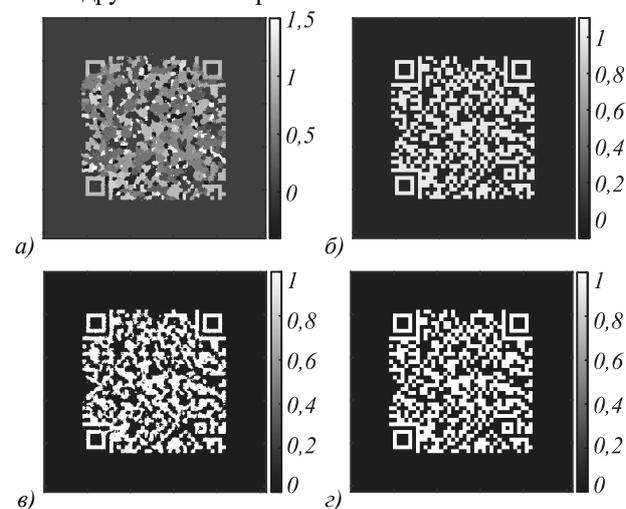


Рис. 5. Реконструкции QR-кода по идеальным данным на сетку  $513 \times 513$ : (а) IPMA, 31 ракурс; (б) IPMA, 32 ракурса; (в) ART-TVS, 20 ракурсов; (г) ART-TVS, 21 ракурс

Помимо точности реконструкции, важным критерием сравнения алгоритмов является также время реконструкции. IPMA реализован ресурсоемким методом динамического программирования, а ART-TVS имеет несколько внутренних циклов. Как следствие, время работы обоих алгоритмов измеряется часами даже в 2D-случае. Задачи реконструкции фантома Шеппа–Логана мы запускали на персональных компьютерах с различными характеристиками. Поэтому для данной модели не представляется возможным привести сколько-нибудь корректную статистику по временам реконструкции. На точную реконструкцию QR-кода IPMA затрачивает 3295 с в случае сетки  $228 \times 228$  (рис. 4д) и 31790 с в случае сетки  $513 \times 513$  (рис. 5б). У ART-TVS соответствующие цифры примерно в 2 раза лучше – 1743 с (рис. 4г) и 16978 с (рис. 5з). Это если рассматривать реконструкции по минимальному числу ракурсов, необходимому для точного воспроизведения структур. Если же сравнить времена реконструкции по одинаковому числу ракурсов (34), то здесь ART-TVS имеет десятикратное пре-

восходство над IPMA: 320 с (рис. 4е) против 3 295 с (рис. 4д). Все цифры приведены для персонального компьютера Intel PC с процессором 2,6 GHz Core 2 Duo и 4 ГБ RAM. Разумеется, указанные времена счёта могут быть улучшены посредством оптимизации кодов и распараллеливанием вычислений, к чему придётся прибегнуть в обязательном порядке при переходе от реконструкций 2D-изображений к 3D-реконструкциям. Тем не менее представленные выше цифры позволяют судить о том, что и по данному критерию сравнения ART-TVS имеет преимущество над IPMA.

Исследуя алгоритмы реконструкции изображений, естественно задаться вопросом, насколько эти алгоритмы устойчивы к ошибкам результатов измерений, в частности, к шуму проекционных данных. Для ответа на этот вопрос мы наложили на идеальные проекционные данные (11) пуассоновский шум сначала величиной 0,1%. Т.е. к детерминированным величинам (11) мы прибавили возможные значения распределенных по закону Пуассона случайных величин с относительным среднеквадратическим отклонением, равным 0,1% от максимального значения (11). Такая величина шума проекционных данных типична, например, для медицинских применений FVT [22].

Реконструкции моделей, представленные на рис. 6, свидетельствуют: для того чтобы точно восстановить изображение по зашумленным данным, не требуется увеличивать число ракурсов ни в случае IPMA, ни в случае ART-TVS. Это означает, что оба алгоритма вполне устойчивы к шуму заданной величины. Чтобы определиться, какой же из алгоритмов является более устойчивым, мы увеличили значение относительного среднеквадратического отклонения шума до 0,5%. Такой шум следует квалифицировать как аномально большой, т.е. его не должно быть в реальной ситуации. Соответствующие результаты реконструкции фантома Шеппа–Логана приведены на рис. 7. Хорошо видно, что IPMA с таким шумом уже не справляется (рис. 7а и табл. 1), в то время как с помощью ART-TVS по-прежнему удается получить результат высокого качества (рис. 7б и табл. 1). Т.е. ART-TVS оказывается более устойчивым к шуму, чем IPMA. Таким образом, по результатам анализа численного эксперимента мы можем с удовлетворением констатировать, что с точки зрения и точности, и скорости реконструкции, и устойчивости к шуму, а также минимального числа ракурсов, необходимого для точной реконструкции, наш алгоритм ART-TVS имеет некоторое преимущество на IPMA.

### Заключение

В настоящей статье рассмотрены два алгоритма малоракурсной томографии: итерационный алгоритм минимизации функционала Поттса (IPMA) и алгебраический алгоритм реконструкции с TV-регуляризацией и адаптивной сегментацией (ART-TVS). Мы сравнили их качественно и количественно по таким критериям, как точность и скорость реконструкции, устойчивость к шуму, а также минималь-

ное число ракурсов, по которым еще возможно точное воспроизведение структур. Совершенно различные по структуре и содержанию алгоритмы объединяет то, что оба они ориентированы на реконструкцию кусочно-постоянных изображений, используют теорию опознавания со сжатием и совмещают реконструкцию и сегментацию изображений. Для того чтобы выявить лучший из алгоритмов, мы провели численный эксперимент по реконструкции двух 2D-моделей: фантома Шеппа–Логана и QR-кода. Показано, что оба алгоритма способны точно восстановить фантом Шеппа–Логана всего по 7 ракурсам. В случае QR-кода, имеющего высокочастотную структуру, минимальное число ракурсов составляет 17 в случае ART-TVS и 32 – в случае IPMA. Показано также, что ART-TVS превосходит IPMA по количественным характеристикам точности реконструкции, таким как коэффициент корреляции и показатель отклонения, а также выигрывает в скорости реконструкции как минимум в 2 раза. Оба алгоритма устойчивы к шуму проекционных данных, характерному для медицинской компьютерной томографии. Однако лучшую устойчивость к аномально большому шуму проявляет алгоритм ART-TVS. Таким образом, фактически по всем критериям сравнения ART-TVS имеет некоторое преимущество над IPMA.

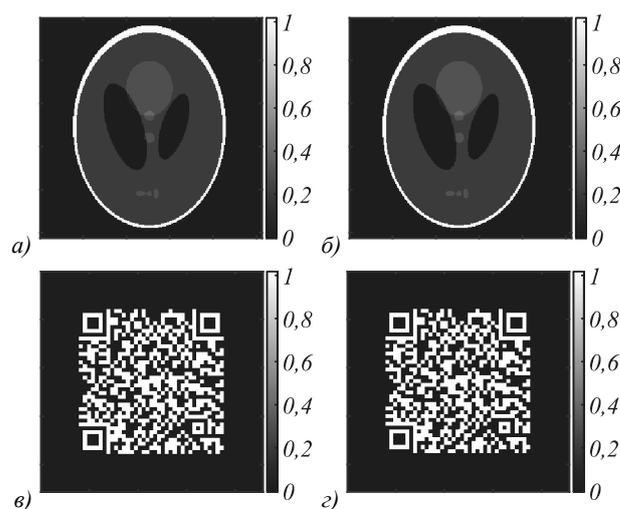


Рис. 6. Реконструкции моделей по данным, зашумленным шумом 0,1% : (а) фантом Шеппа–Логана, IPMA, 7 ракурсов, 256 × 256; (б) фантом Шеппа–Логана, ART-TVS, 7 ракурсов, 256 × 256; (в) QR-код, IPMA, 34 ракурса, 228 × 228; (г) QR-код, ART-TVS, 17 ракурсов, 228 × 228

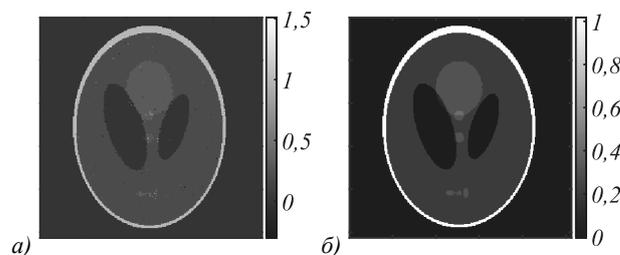


Рис. 7. Реконструкции фантома Шеппа–Логана по данным, зашумленным шумом 0,5% на сетку 256 × 256: (а) IPMA, 7 ракурсов; (б) ART-TVS, 7 ракурсов

Оба рассмотренных CS-алгоритма успешно используют сегментацию в процессе итерационного восстановления изображения. Можно утверждать, что в случае кусочно-постоянных структур сегментация, реализуемая в алгоритме реконструкции явно (ART-TVS) или неявно (IPMA), дает эффект дополнительной регуляризации, позволяющий улучшить сходимость алгоритма и минимизировать число ракурсов, по которому изображение может быть восстановлено точно. И хотя в случае ART-TVS математически строго данное утверждение еще только предстоит доказать (если это реально возможно), в настоящей статье оно убедительно обосновано представленными практическими примерами.

Хотелось бы сформулировать еще один вывод, который с точки зрения дальнейших перспектив представляется нам, пожалуй, более значимым, нежели полученный ответ на вопрос, какой из двух рассмотренных алгоритмов (IPMA или ART-TVS) лучше. Результаты, приведенные в настоящей статье, показывают, что уже сегодня в мире существуют алгоритмы реконструкции, способные точно восстанавливать внутреннюю структуру объектов по числу ракурсов меньше, чем 10. И пусть сегодня такое утверждение справедливо только для объектов определенного класса, есть все основания полагать, что завтра оно станет реальностью для всех типов объектов без ограничений. Можно также не сомневаться, что количество подобных алгоритмов из года в год будет стремительно увеличиваться. Они будут совершенствоваться и уже в ближайшее время будут в полной мере готовы к практическому использованию как в медицинской, так и немедицинских сферах применения малоракурсной томографии. Таким образом, можно констатировать, что тот качественный переход, о котором было упомянуто во введении (переход от точной реконструкции по 15–20 ракурсам к точной реконструкции по 7–9 ракурсам), очень близок к своему осуществлению.

Не вызывает сомнений, что алгоритм ART-TVS может быть улучшен. Наши дальнейшие исследования будут связаны с разработкой алгоритма адаптивного выбора и подстройки параметров ART-TVS, поиском альтернативного метода сегментации, а также более эффективного стоп-критерия. Успешное решение этих задач должно позволить нашему алгоритму выйти на более высокий качественный уровень и еще в большей степени минимизировать число ракурсов, по которым возможна точная реконструкция. Кроме того, мы планируем ускорить наш алгоритм с помощью GPU или FPGA для того, чтобы сделать практически реальной 3D-реконструкцию. Конечно, особый интерес вызывает адаптация ART-TVS к работе с данными физического эксперимента.

#### Литература

1. **Gordon, R.** Dose reduction in computerized tomography / R. Gordon // *Investigative Radiology*. – 1976. – Vol. 11, Issue 6. – P. 508-517. – DOI: 10.1097/00004424-197611000-00002.
2. **Herman, G.T.** Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projections / G.T. Herman. – 2<sup>nd</sup> ed. – London: Springer-Verlag, 2009. – ISBN: 978-1-85233-617-2.
3. **Gordon, R.** Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography / R. Gordon, R. Bender, G.T. Herman // *Journal of Theoretical Biology*. – 1970. – Vol. 29, Issue 3. – P. 471-482. – DOI: 10.1016/0022-5193(70)90109-8.
4. **Gilbert, P.** Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections / P. Gilbert // *Journal of Theoretical Biology*. – 1972. – Vol. 36, Issue 1. – P. 105-117. – DOI: 10.1016/0022-5193(72)90180-4.
5. **Minerbo, G.** MENT: a maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data / G. Minerbo // *Computer Graphics and Image Processing*. – 1979. – Vol. 10, Issue 1. – P. 48-68. – DOI: 10.1016/0146-664X(79)90034-0.
6. **Andersen, A.H.** Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm / A.H. Andersen, A.C. Kak // *Ultrasonic Imaging*. – 1984. – Vol. 6, Issue 1. – P. 81-94. – DOI: 10.1177/016173468400600107.
7. **Lange, K.** EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography / K. Lange, R. Carson // *Journal of Computer Assisted Tomography*. – 1984. – Vol. 8, Issue 2. – P. 306-316.
8. **Sauer, K.** A local update strategy for iterative reconstruction from projections / K. Sauer, C. Bouman // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 1993. – Vol. 41, Issue 2. – P. 534-548. – DOI: 10.1109/78.193196.
9. **Manglos, S.H.** Transmission maximum-likelihood reconstruction with ordered subsets for cone beam CT / S.H. Manglos, G.M. Gagne, A. Krol, F.D. Thomas, R. Narayanaswamy // *Physics in Medicine and Biology*. – 1995. – Vol. 40, Issue 7. – P. 1225-1241. – DOI: 10.1088/0031-9155/40/7/006.
10. **Bouman, C.** A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization / C. Bouman, K. Sauer // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 1996. – Vol. 5, Issue 3. – P. 480-492. – DOI: 10.1109/83.491321.
11. **Nuyts, J.** Iterative reconstruction for helical CT: a simulation study / J. Nuyts, B. DeMan, P. Dupont, M. Defrise, P. Suetens, L. Mortelmans // *Physics in Medicine and Biology*. – 1998. – Vol. 43, Issue 4. – P. 729-737. – DOI: 10.1088/0031-9155/43/4/003.
12. **Erdogan, H.** Ordered subsets algorithms for transmission tomography / H. Erdogan, J.A. Fessler // *Physics in Medicine and Biology*. – 1999. – Vol. 44, Issue 11. – P. 2835-2851. – DOI: 10.1088/0031-9155/44/11/311.
13. **Beekman, F.J.** Ordered subset reconstruction for X-ray CT / F.J. Beekman, C. Kamphuis // *Physics in Medicine and Biology*. – 2001. – Vol. 46, Issue 7. – P. 1835-1844. – DOI: 10.1088/0031-9155/46/7/307.
14. **Badea, C.** Experiments with the nonlinear and chaotic behavior of the multiplicative algebraic reconstruction technique (MART) algorithm for computed tomography / C. Badea, R. Gordon // *Physics in Medicine and Biology*. – 2004. – Vol. 49, Issue 8. – P. 1457-1474. – DOI: 10.1088/0031-9155/49/8/006.
15. **Thibault, J.-B.** Three-dimensional statistical approach to improved image quality for multislice helical CT / J.-B. Thibault, K.D. Sauer, C.A. Bouman, J.A. Hsieh // *Medical Physics*. – 2007. – Vol. 34, Issue 11. – P. 4526-4544. – DOI: 10.1118/1.2789499.
16. **Yu, Z.** Fast model-based X-ray CT reconstruction using spatially nonhomogeneous ICD optimization / Z. Yu, J.-B. Thi-

- bault, C.A. Bouman, K.D. Sauer, J. Hsieh // *IEEE Transactions on Image Processing*. – 2011. – Vol. 20, Issue 1. – P. 161-175. – DOI: 10.1109/TIP.2010.2058811.
17. **Donoho, D.L.** Compressed sensing / D.L. Donoho // *IEEE Transaction on Information Theory*. – 2006. – Vol. 52, Issue 4. – P. 1289-1306. – DOI: 10.1109/TIT.2006.871582.
  18. **Candès, E.J.** Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements / E.J. Candès, J. Romberg, T. Tao // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 2006. – Vol. 59, Issue 8. – P. 1207-1223. – DOI: 10.1002/cpa.20042.
  19. **Candès, E.J.** Sparsity and incoherence in compressive sampling / E.J. Candès, J. Romberg // *Inverse Problems*. – 2007. – Vol. 23, Issue 3. – P. 969-985. – DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/008.
  20. **Chang, M.** A few-view reweighted sparsity hunting (FRESH) method for CT image reconstruction / M. Chang, L. Li, Z. Chen, Y. Xiao, L. Zhang, G. Wang // *Journal of X-Ray Science and Technology*. – 2013. – Vol. 21, Issue 2. – P. 161-176. – DOI: 10.3233/XST-130370.
  21. **Beck, A.** A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems / A. Beck, M. Teboulle // *SIAM Journal on Imaging Sciences*. – 2009. – Vol. 2, Issue 1. – P. 183-202. – DOI: 10.1137/080716542.
  22. **Sidky, E.Y.** Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT / E.Y. Sidky, C.M. Kao, X. Pan // *Journal of X-Ray Science and Technology*. – 2006. – Vol. 14, Issue 2. – P. 119-139.
  23. **Yu, H.** Compressed sensing based interior tomography / H. Yu, G. Wang // *Physics in Medicine and Biology*. – 2009. – Vol. 54, Issue 9. – P. 2791-2805. – DOI: 10.1088/0031-9155/54/9/014.
  24. **Венгринович, В.Л.** Итерационные методы томографии / В.Л. Венгринович, С.А. Золотарев. – Минск: Беларуская навука, 2009. – 227 с. – ISBN: 978-985-08-1042-7.
  25. Томография плазмы / В.В. Пикалов, Т.С. Мельникова; под ред. В.В. Пикалова. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995. – 229 с. – ISBN: 5-02-030372-0.
  26. **Abir, M.** Sparse-view neutron CT reconstruction of irradiated fuel assembly using total variation minimization with Poisson statistics / M. Abir, F. Islam, D. Wachs, H.-K. Lee // *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*. – 2016. – Vol. 307, Issue 3. – P. 1967-1979. – DOI: 10.1007/s10967-015-4542-2.
  27. **Batenburg, K.J.** 3D imaging of nanomaterials by discrete tomography / K.J. Batenburg, S. Bals, J. Sijbers, C. Kübel, P.A. Midgley, J.C. Hernandez, U. Kaiser, E.R. Encina, E.A. Coronado, G. VanTendeloo // *Ultramicroscopy*. – 2009. – Vol. 109, Issue 6. – P. 730-740. – DOI: 10.1016/j.ultramic.2009.01.009.
  28. **Pang, T.F.** AWE multi-axis radiographic facility: a review of 3D-reconstructions from limited data / T.F. Pang. – In: *Bayesian inference and maximum entropy methods in science and engineering* / ed. by A. Mohammad-Djafari. – Gif-sur-Yvette: AIP Conference Proceedings, 2001. – Vol. 568. – P. 521-530.
  29. **Коновалов, А.Б.** Контроль откольных и сдвиговых разрушений в обжатой взрывом сферической железной оболочке методом малоракурсной гамма-томографии / А.Б. Коновалов, Д.В. Могиленских, Е.А. Козлов, В.В. Власов, А.Н. Киселев, Е.В. Ковалев, М.Н. Захаров, В.Н. Повышев, В.И. Ставрицкий // *Дефектоскопия*. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 19-31.
  30. **Konvalov, A.B.** Spatial resolution of few view computed tomography using algebraic reconstruction techniques / A.B. Konvalov, A.N. Kiselev, V.V. Vlasov // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 2006. – Vol. 16, Issue 2. – P. 249-255. – DOI: 10.1134/S105466180602012X.
  31. **Коновалов, А.Б.** Импульсная диффузионная оптическая томография на основе использования аналитических статистических характеристик траекторий фотонов / А.Б. Коновалов, В.В. Власов, А.Г. Калинин, О.В. Кравченко, В.В. Любимов // *Квантовая электроника*. – 2006. – Т. 36, № 11. – С. 1048-1055.
  32. **Konvalov, A.B.** Algebraic reconstruction and post-processing in incomplete data computed tomography: from X-rays to laser beams / A.B. Konvalov, D.V. Mogilenskikh, V.V. Vlasov, A.N. Kiselev. – In: G. Obinata, A. Dutta, editors. *Vision systems: applications*. – Vienna: I-Tech Education and Publishing, 2007. – P. 487-518. – DOI: 10.5772/5003.
  33. **Коновалов, А.Б.** Алгебраическая реконструкция и постобработка в одношаговой диффузионной оптической томографии / А.Б. Коновалов, В.В. Власов, Д.В. Могиленских, О.В. Кравченко, В.В. Любимов // *Квантовая электроника*. – 2008. – Т. 38, № 6. – С. 588-596.
  34. **Vlasov, V.V.** An a priori information based algorithm for artifact preventive reconstruction in few-view computed tomography / V.V. Vlasov, A.B. Konvalov, A.S. Uglov // *Proceedings of the 5th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*. – 2012. – 042. – DOI: 10.1109/ISCCSP.2012.6217778.
  35. **Konvalov, A.B.** Spatial resolution analysis for few-views discrete tomography based on MART-AP algorithm / A.B. Konvalov, V.V. Vlasov // *ISRN Signal Processing*. – 2013. – Vol. 2013. – 356291. – DOI: 10.1155/2013/356291.
  36. **Vlasov, V.V.** Few-views image reconstruction with SMART and allowance for contrast structure shadows / V.V. Vlasov, A.B. Konvalov, A.S. Uglov. – In: *Computer Analysis of Images and Patterns* / ed. by G. Azzopardi, N. Petkov. – Cham: Springer, 2015. – P. 667-677. – DOI: 10.1007/978-3-319-23192-1\_56.
  37. **Власов, В.В.** Алгебраическая реконструкция изображений по малому числу ракурсов с TV-регуляризацией и адаптивной сегментацией / В.В. Власов, А.Б. Коновалов, С.В. Кольчугин. – Тезисы докладов 13-ой Международной конференции «Забабахинские научные чтения». – ФГУП «РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», 2017. – С. 295.
  38. **Storath, M.** Joint image reconstruction and segmentation using the Potts model / M. Storath, A. Weinmann, J. Frikel, M. Unser // *Inverse Problems*. – 2015. – Vol. 31, Issue 2. – 025003. – DOI: 10.1088/0266-5611/31/2/025003.
  39. **Weinmann, A.** Iterative Potts and Blake-Zisserman minimization for the recovery of functions with discontinuities from indirect measurements / A. Weinmann, M. Storath // *Proceedings of the Royal Society A*. – 2015. – Vol. 471, Issue 2176. – 20140638. – DOI: 10.1098/rspa.2014.0638.
  40. **Mumford, D.** Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems / D. Mumford, J. Shah // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1989. – Vol. 42, Issue 5. – P. 577-685. – DOI: 10.1002/cpa.3160420503.
  41. Pottslab: Matlab/Java toolbox for the reconstruction of jump-sparse signals and images using Potts functionals [Electronical Resource]. – URL: <https://github.com/mstorath/Pottslab> (request date 08.04.2019).
  42. **Mehnert, A.** An improved seeded region growing algorithm / A. Mehnert, O. Jackway // *Pattern Recognition Letters*. – 1997. – Vol. 18, Issue 10. – P. 1065-1071. – DOI: 10.1016/S0167-8655(97)00131-1.

43. **Mazouzi, S.** Range image segmentation by randomized region growing and Bayesian edge regularized / S. Mazouzi, M. Batouche // Journal of Computer Science. – 2007. – Vol. 3, Issue 5. – P. 310-317. – DOI: 10.3844/jcssp.2007.310.317.
44. **Alvare, G.** Focels for high flux, high resolution computed tomography (FoxelCT) using broad x-ray focal spots: theory and two-dimensional fan beam examples / G. Alvare, R. Gordon // Radiology and Diagnostic Imaging. – 2017. – Vol. 1, Issue 1. – P. 1-40. – DOI: 10.15761/RDI.1000103.
45. **Kaipio, J.** Statistical inverse problems: discretization, model reduction and inverse crimes / J. Kaipio, E. Somersalo // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2007. – Vol. 198, Issue 2. – P. 493-504. – DOI: 10.1016/j.cam.2005.09.027.

#### Сведения об авторах

**Власов Виталий Викторович**, 1981 года рождения, окончил Южноуральский государственный университет, руководитель научно-исследовательской лаборатории ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. академика Е.И. Забабахина». Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, искусственные нейронные сети. E-mail: [vitaly.vlasov.v@yandex.ru](mailto:vitaly.vlasov.v@yandex.ru).

**Коновалов Александр Борисович**, 1963 года рождения, окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. академика Е.И. Забабахина». Область научных интересов: математическое моделирование, обработка изображений, обратные и некорректные задачи, биомедицинская оптика. E-mail: [a\\_konov@mail.vega-int.ru](mailto:a_konov@mail.vega-int.ru).

**Кольчугин Сергей Валентинович**, 1951 года рождения, окончил Уральский государственный университет им. А.М. Горького, главный специалист ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ технической физики им. академика Е.И. Забабахина». Область научных интересов: обработка изображений, программирование, параллельные и распределенные вычисления. E-mail: [ksv-2006@yandex.ru](mailto:ksv-2006@yandex.ru).

ГРНТИ: 28.23.15

Поступила в редакцию 10 апреля 2019 г. Окончательный вариант – 14 июля 2019 г.

## Joint image reconstruction and segmentation: Comparison of two algorithms for few-view tomography

V.V. Vlasov<sup>1</sup>, A.B. Konovalov<sup>1</sup>, S.V. Kolchugin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics, Chelyabinsk Region, Snezhinsk, 456770, Russia, 13 Vasiliev Str.

#### Abstract

Two algorithms of few-view tomography are compared, specifically, the iterative Potts minimization algorithm (IPMA) and the algebraic reconstruction technique with TV-regularization and adaptive segmentation (ART-TVS). Both aim to reconstruct piecewise-constant structures, use the compressed sensing theory, and combine image reconstruction and segmentation procedures. Using a numerical experiment, it is shown that either algorithm can exactly reconstruct the Shepp-Logan phantom from as small as 7 views with noise characteristic of the medical applications of X-ray tomography. However, if an object has a complicated high-frequency structure (QR-code), the minimal number of views required for its exact reconstruction increases to 17–21 for ART-TVS and to 32–34 for IPMA. The ART-TVS algorithm developed by the authors is shown to outperform IPMA in reconstruction accuracy and speed and in resistance to abnormally high noise as well. ART-TVS holds good potential for further improvement.

**Keywords:** few-view tomography, image reconstruction and segmentation, compressed sensing, Potts functional, total variation, Shepp-Logan phantom, QR-code, correlation coefficient, deviation factor.

**Citation:** Vlasov VV, Konovalov AB, Kolchugin SV. Joint image reconstruction and segmentation: Comparison of two algorithms for few-view tomography. Computer Optics 2019; 43(6): 1008-1020. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-1008-1020.

#### References

- [1] Gordon R. Dose reduction in computerized tomography. Investigative Radiology 1976; 11(6): 508-517. DOI: 10.1097/00004424-197611000-00002.
- [2] Herman GT. Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projections. 2nd ed. London: Springer-Verlag; 2009. ISBN: 978-1-85233-617-2.
- [3] Gordon R, Bender R, Herman GT. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. J Theor Biology 1970; 29(3): 471-482. DOI: 10.1016/0022-5193(70)90109-8.
- [4] Gilbert P. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. J Theor Biology 1972; 36(1): 105-117. DOI: 10.1016/0022-5193(72)90180-4.

- [5] Minerbo G. MENT: a maximum entropy algorithm for reconstructing a source from projection data. *Comp Graph Image Process* 1979; 10(1): 48-68. DOI: 10.1016/0146-664X(79)90034-0.
- [6] Andersen AH, Kak AC. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): a superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic Imaging* 1984; 6(1): 81-94. DOI: 10.1177/016173468400600107.
- [7] Lange K, Carson R. EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography. *Journal of Computer Assisted Tomography* 1984; 8(2): 306-316.
- [8] Sauer K, Bouman C. A local update strategy for iterative reconstruction from projections. *IEEE Transactions on Signal Processing* 1993; 41(2): 534-548. DOI: 10.1109/78.193196.
- [9] Manglos SH, Gagne GM, Krol A, Thomas FD, Narayanaswamy R. Transmission maximum-likelihood reconstruction with ordered subsets for cone beam CT. *Physics in Medicine and Biology* 1995; 40(7): 1225-1241. DOI: 10.1088/0031-9155/40/7/006.
- [10] Bouman C, Sauer K. A unified approach to statistical tomography using coordinate descent optimization. *IEEE Transactions on Image Processing* 1996; 5(3): 480-492. DOI: 10.1109/83.491321.
- [11] Nuyts J, DeMan B, Dupont P, Defrise M, Suetens P, Mortelmans L. Iterative reconstruction for helical CT: a simulation study. *Physics in Medicine and Biology* 1998; 43(4): 729-737. DOI: 10.1088/0031-9155/43/4/003.
- [12] Erdogan H, Fessler JA. Ordered subsets algorithms for transmission tomography. *Physics in Medicine and Biology* 1999; 44(11): 2835-2851. DOI: 10.1088/0031-9155/44/11/311.
- [13] Beekman FJ, Kamphuis C. Ordered subset reconstruction for X-ray CT. *Physics in Medicine and Biology* 2001; 46(7): 1835-1844. DOI: 10.1088/0031-9155/46/7/307.
- [14] Badea C, Gordon R. Experiments with the nonlinear and chaotic behavior of the multiplicative algebraic reconstruction technique (MART) algorithm for computed tomography. *Physics in Medicine and Biology* 2004; 49(8): 1457-1474. DOI: 10.1088/0031-9155/49/8/006.
- [15] Thibault J-B, Sauer KD, Bouman CA, Hsieh JA. Three-dimensional statistical approach to improved image quality for multislice helical CT. *Medical Physics* 2007; 34(11): 4526-4544. DOI: 10.1118/1.2789499.
- [16] Yu Z, Thibault J-B, Bouman CA, Sauer KD, Hsieh J. Fast model-based X-ray CT reconstruction using spatially non-homogeneous ICD optimization. *IEEE Transactions on Image Processing* 2011; 20(1): 161-175. DOI: 10.1109/TIP.2010.2058811.
- [17] Donoho DL. Compressed sensing. *IEEE Transaction on Information Theory* 2006; 52(4): 1289-1306. DOI: 10.1109/TIT.2006.871582.
- [18] Candès EJ, Romberg J, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 2006; 59(8): 1207-1223. DOI: 10.1002/cpa.20042.
- [19] Candès EJ, Romberg J. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems* 2007; 23(3): 969-985. DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/008.
- [20] Chang M, Li L, Chen Z, Xiao Y, Zhang L, Wang G. A few-view reweighted sparsity hunting (FRESH) method for CT image reconstruction. *Journal of X-Ray Science and Technology* 2013; 21(2): 161-176. DOI: 10.3233/XST-130370.
- [21] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2009; 2(1): 183-202. DOI: 10.1137/080716542.
- [22] Sidky EY, Kao CM, Pan X. Accurate image reconstruction from few-views and limited-angle data in divergent-beam CT. *Journal of X-Ray Science and Technology* 2006; 14(2): 119-139.
- [23] Yu H, Wang G. Compressed sensing based interior tomography. *Physics in Medicine and Biology* 2009; 54(9): 2791-2805. DOI: 10.1088/0031-9155/54/9/014.
- [24] Vengrinovich VL, Zolotarev SA. Iterative methods for tomography [In Russian]. Minsk: "Belaruskaya Navuka" Publisher; 2009. ISBN: 978-985-08-1042-7.
- [25] Pickalov VV, Melnikova TS. Plasma tomography [In Russian]. Novosibirsk: "Nauka" Publisher; 1995. ISBN: 5-02-030372-0.
- [26] Abir M, Islam F, Wachs D, Lee H-K. Sparse-view neutron CT reconstruction of irradiated fuel assembly using total variation minimization with Poisson statistics. *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry* 2016; 307(3): 1967-1979. DOI: 10.1007/s10967-015-4542-2.
- [27] Batenburg KJ, Bals S, Sijbers J, Kübel C, Midgley PA, Hernandez JC, Kaiser U, Encina ER, Coronado EA, Van-Tendeloo G. 3D imaging of nanomaterials by discrete tomography. *Ultramicroscopy* 2009; 109(6): 730-740. DOI: 10.1016/j.ultramic.2009.01.009.
- [28] Pang TF. AWE multi-axis radiographic facility: a review of 3D-reconstructions from limited data. In Book: Mohammad-Djafari A, ed. Bayesian inference and maximum entropy methods in science and engineering. Gif-sur-Yvette: AIP Conference Proceedings; 2001: 568; 521-530.
- [29] Kononov AB, Mogilenskikh DV, Kozlov EA, Vlasov VV, Kiselev AN, Kovalev EV, Zakharov MN, Povyshev VN, Stavrietskii VI. Few-view gamma tomography used to monitor scabbing and shear fracture in a spherical iron shell compressed by explosion. *Russian Journal of Nondestructive Testing* 2008; 44(1): 15-24. DOI: 10.1134/S1061830908010026.
- [30] Kononov AB, Kiselev AN, Vlasov VV. Spatial resolution of few view computed tomography using algebraic reconstruction techniques. *Patt Recogn Image Analys* 2006; 16(2): 249-255. DOI: 10.1134/S105466180602012X.
- [31] Kononov AB, Vlasov VV, Kalintsev AG, Kravtzenyuk OV, Lyubimov VV. Time-domain diffuse optical tomography using analytic statistical characteristics of photon trajectories. *Quantum Electronics* 2006; 36(11): 1048-1055. DOI: 10.1070/QE2006v036n11ABEH013302.
- [32] Kononov AB, Mogilenskikh DV, Vlasov VV, Kiselev AN. Algebraic reconstruction and post-processing in incomplete data computed tomography: from X-rays to laser beams. In Book: Obinata G, Dutta A, ed. Vision systems: applications. Vienna: I-Tech Education and Publishing; 2007: 487-518. DOI: 10.5772/5003.
- [33] Kononov AB, Vlasov VV, Mogilenskikh DV, Kravtzenyuk OV, Lyubimov VV. Algebraic reconstruction and post-processing in one-step diffuse optical tomography. *Quantum Electronics* 2008; 38(11): 588-596. DOI: 10.1070/QE2008v038n06ABEH013834.
- [34] Vlasov VV, Kononov AB, Uglov AS. An a priori information based algorithm for artifact preventive reconstruction in few-view computed tomography. *Proceedings of ISCCSP* 2012: 042. DOI: 10.1109/ISCCSP.2012.6217778.
- [35] Kononov AB, Vlasov VV. Spatial resolution analysis for few-views discrete tomography based on MART-AP algorithm. *ISRN Signal Processing* 2013; 2013: 356291. DOI: 10.1155/2013/356291.

- [36] Vlasov VV, Konovalov AB, Uglov AS. Few-views image reconstruction with SMART and allowance for contrast structure shadows. In Book: Azzopardi G, Petkov N, eds. *Computer Analysis of Images and Patterns*. Cham: Springer; 2015: 667-677. DOI: 10.1007/978-3-319-23192-1\_56.
- [37] Vlasov VV, Konovalov AB, Kolchugin SV. Few-views algebraic reconstruction of images with TV-regularization and adaptive segmentation. In Book: *Zababakhin scientific talks: Abstracts*. FGUP "RFNC – VNIITF named after academician Zababakhin EI" Publisher; 2017: 295-296.
- [38] Storath M, Weinmann A, Friel J, Unser M. Joint image reconstruction and segmentation using the Potts model. *Inverse Problems* 2015; 31(2): 025003. DOI: 10.1088/0266-5611/31/2/025003.
- [39] Weinmann A, Storath M. Iterative Potts and Blake-Zisserman minimization for the recovery of functions with discontinuities from indirect measurements. *Proceedings of the Royal Society A* 2015; 471(2176): 20140638. DOI: 10.1098/rspa.2014.0638.
- [40] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1989; 42(5): 577-685. DOI: 10.1002/cpa.3160420503.
- [41] Pottslab: Matlab/Java toolbox for the reconstruction of jump-sparse signals and images using Potts functionals. Source: (<https://github.com/mstorath/Pottslab>).
- [42] Mehnert A, Jackway O. An improved seeded region growing algorithm. *Patt Recogn Lett* 1997; 18(10): 1065-1071. DOI: 10.1016/S0167-8655(97)00131-1.
- [43] Mazouzi S, Batouche M. Range image segmentation by randomized region growing and Bayesian edge regularized. *J Comp Sci* 2007; 3(5): 310-317. DOI: 10.3844/jcssp.2007.310.317.
- [44] Alvare G, Gordon R. Foxels for high flux, high resolution computed tomography (FoxelCT) using broad x-ray focal spots: theory and two-dimensional fan beam examples. *Radiology and Diagnostic Imaging* 2017; 1(1): 1-40. DOI: 10.15761/RDI.1000103.
- [45] Kaipio J, Somersalo E. Statistical inverse problems: discretization, model reduction and inverse crimes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2007; 198(2): 493-504. DOI: 10.1016/j.cam.2005.09.027.

#### *Author's information*

**Vitaly Viktorovich Vlasov** was born in 1981, graduated from South-Ural State University, now heads a scientific research laboratory at Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics. Areas of scientific interest: image processing, pattern recognition, artificial neural networks. E-mail: [vitaly.vlasov.v@yandex.ru](mailto:vitaly.vlasov.v@yandex.ru).

**Alexander Borisovich Konovalov** was born in 1963, graduated from Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, candidate of Physics and Mathematics, leading scientist at Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics. Areas of scientific interest: mathematical modeling, image processing, inverse and ill-posed problems, biomedical optics. E-mail: [a\\_konov@mail.vega-int.ru](mailto:a_konov@mail.vega-int.ru).

**Sergey Valentinovich Kolchugin** was born in 1951, graduated from Gorky Ural State University; main specialist at Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin Institute of Applied Physics. Areas of scientific interest: image processing, programming, parallel and distributed computing. E-mail: [ksv-2006@yandex.ru](mailto:ksv-2006@yandex.ru).

*Received April 10, 2019. The final version – July 14, 2019.*