

Динамика перепутывания атомов с двухфотонными переходами, индуцированного тепловым полем

Е.К. Башкиров¹

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В настоящей работе мы исследуем атом-атомное перепутывание двух двухуровневых атомов (кубитов), нерезонансно взаимодействующих с тепловым полем однододового идеального резонатора посредством эффективных вырожденных двухфотонных переходов. На основе точного решения для зависящей от времени матрицы плотности рассматриваемой системы мы вычислили отрицательность как меру перепутывания атомов. Показано, что для сепарабельных начальных состояний атомов включение малой расстройки частот атомов и поля приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания атомов. Установлено также, что для нерезонансного взаимодействия атома с полем перепутывания, индуцированного нелинейным двухфотонным взаимодействием, меньше перепутывания, вызванного однофотонным взаимодействием, в отличие от модели с резонансным взаимодействием, где имеет место обратный эффект. Для перепутанного начального атомного состояния белловского типа увеличение расстройки приводит к уменьшению амплитуд осцилляций Раби отрицательности, т.е. стабилизации атомного перепутывания. В работе также показано, что включение расстройки приводит к устранению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

Ключевые слова: двухуровневые атомы, двухфотонное взаимодействие, тепловое поле, перепутывание, мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование: Башкиров, Е.К. Динамика перепутывания атомов с двухфотонными переходами, индуцированного тепловым полем / Е.К. Башкиров // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 2. – С. 167-176. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-595.

Citation: Bashkirov EK. Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field. Computer Optics 2020; 44(2): 167-176. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-595.

Введение

Перепутанные состояния являются фундаментом современной квантовой информатики, поскольку используются для реализации эффективных физически стойких протоколов квантовых вычислений, квантовой телепортации и квантовой коммуникации, квантовой криптографии и др. [1–3]. Для квантовых вычислений и квантовой связи нужны максимально перепутанные, устойчивые состояния с большими временами декогеренции. В связи с этим в задачу современной квантовой информатики и квантовой оптики входит создание эффективных методов генерации и управления перепутанными состояниями, а также изучение различных физических систем, которые могут быть использованы в качестве кубитов квантовых устройств. Для генерации атом-атомных перепутанных состояний может использоваться их взаимодействие с общим полем (электромагнитным, фононным и т.д.) резонатора. Степень перепутывания атомов, возникающая за счет взаимодействия с полем резонатора, кроме особенностей структуры атома и резонатора и силы их связи, зависит также от большого числа других факторов, в частности, от состояний, в которых приготовлены изначально атомы и поле, наличия различных каналов диссипации энергии, фазы и т.д. Естественные и искусственные атомы (нейтральные ридберговские атомы и ионы в ловушках, при-

месные спины, квантовые точки, сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами, гибридные и оптомеханические системы), взаимодействующие с выделенными модами резонаторов, в настоящее время исследуются не только теоретически, но и реализованы экспериментально в различных системах квантовой электродинамики резонаторов (РКЭД) [4, 5]. Для теоретического описания таких систем обычно используется модель Джейнса–Каммингса (МДК) и её обобщения [6–8]. Модели типа Джейнса–Каммингса играют фундаментальную роль в квантовой оптике и квантовой информатике, поскольку позволяют описать все основные квантовые эффекты взаимодействия излучения с веществом: вакуумные осцилляции Раби, затухание и восстановление осцилляций Раби, антигруппировку фотонов и субпуассоновскую статистику поля резонатора, сжатие света, сверх- и субизлучение, атом-атомное и атом-полевое перепутывание, мгновенную смерть перепутывания и другие [6–8]. Все эти эффекты удалось экспериментально наблюдать в системах РКЭД [4, 5]. Многие эксперименты с системами РКЭД показали, что МДК и её обобщения, учитывающие многоатомность, многоуровневость, расстройку частот кубитов и поля и другие особенности системы, дают прекрасные описания динамики кубитов и поля резонатора [9–15]. При этом согласие между теоретическими и экспериментальными результатами имеет место не только

для динамики средних населенностей уровней энергии кубитов, среднего числа фотонов в резонаторе и их корреляционных функций [9–14], но и для динамики параметров перепутывания [15]. Ранние эксперименты с РКЭД в значительной степени ограничивались режимом слабой связи между кубитом и полем резонатора, то есть ситуацией, когда константа кубит-полевого взаимодействия много меньше частоты перехода в кубите. Однако в последние годы за счет улучшения конструкции резонаторов, эффективных методов лазерного охлаждения, а также использования искусственных атомов, таких как сверхпроводящие джозефсоновские кольца или примесные спины, удалось сместить границы экспериментальных исследований в сторону режима сильной и ультрасильной связи, когда константа кубит-полевого взаимодействия сравнима с частотой перехода в кубите [16], что позволило наблюдать новые физические явления, такие как рождение фотонных пар или двухфотонное поглощение при интенсивностях, значительно ниже уровней, на которых нелинейные переходы обычно происходят [17]. Для теоретического описания таких систем необходимо использовать нелинейные версии модели Джейнса–Каммингса, в частности, модели с двухфотонными переходами [18, 19]. Такие модели были с успехом использованы для описания экспериментов в РКЭД для ионов в ловушках Пауля [20], нейтральных атомов [21], квантовых точек [22] и в сверхпроводящих цепях [23, 24]. Двухфотонная модель Джейнса–Каммингса успешно применялась также и для описания перепутывания сверхпроводящих кубитов в копланарном резонаторе [25]. Важным достоинством двухфотонной модели Джейнса–Каммингса является то, что она имеет точное решение, что позволяет проводить детальный анализ динамики систем с двухфотонными переходами. Однако в последнее время для описания систем РКЭД в режиме ультрасильной связи широко применяется обобщение модели Джейнса–Каммингса, не использующее приближение вращающейся волны, так называемая модель Раби. Указанная модель успешно используется для описания сверхпроводящих кубитов в резонаторе [26]. Недавно в работе [27] предложена твердотельная сверхпроводящая схема в виде джозефсоновских кубитов в резонаторе, в которой кубит и резонатор связаны двухфотонным взаимодействием, для реализации двухфотонной модели Раби.

Взаимодействие квантовых объектов, приготовленных в перепутанном состоянии, с окружением обычно приводит к декогерентности и потере особых квантовых корреляций состояний или перепутывания. Это означает, что основная проблема, возникающая при создании, контроле и хранении атомных перепутанных состояний, заключается в том, чтобы предотвратить, минимизировать или использовать влияние шума. Было высказано большое количество предложений по защите, минимизированию или использо-

ванию влияния окружения для создания и сохранения максимально перепутанных состояний, например, стратегия кольцевого контроля, коррекция квантовых ошибок, использование избыточного кодирования и др. [1–3]. Однако указанные способы успешно решают проблему только при малой скорости генерации ошибок в исследуемой системе, а также чрезвычайно сложны при экспериментальной реализации. Недавно в большом количестве работ было показано, что в некоторых случаях диссипация и шум могут, напротив, являться источником перепутывания [28]. В частности, была предсказана возможность генерации перепутывания кубитов и поля за счет взаимодействия кубитов с тепловым полем резонатора [29]. Питер Найт с соавторами [30] показали, что одномодовый тепловой шум может индуцировать атом-атомное перепутывание в системе двух двухуровневых атомов в идеальном резонаторе. В последнее время, как уже отмечалось выше, в квантовой информатике особое внимание уделяется изучению динамики кубитов, взаимодействующих с электромагнитными полями посредством двухфотонных процессов в связи с высокой степенью корреляций состояний испускаемых фотонов. Перепутывание в двухатомной системе с вырожденным двухфотонным взаимодействием, индуцированное одномодовым тепловым шумом, было рассмотрено в работе [31], а влияние двухмодового теплового шума на перепутывание двух двухуровневых атомов с невырожденными переходами и переходами рамановского типа – в работе [32]. При этом было показано, что при двухфотонном взаимодействии степень перепутывания атомных состояний может значительно превосходить соответствующую величину для однофотонного взаимодействия. В [33] были обобщены результаты работы [30] на случай нерезонансного однофотонного взаимодействия атомов с тепловым полем резонатора. При этом было показано, что наличие расстройки частот атомов и поля приводит к существенному возрастанию степени перепутывания, индуцированного тепловым полем. В указанной работе также была предсказана возможность перепутывания атомов, приготовленных в начальный момент времени в возбужденных состояниях. Позднее динамика перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем, при наличии диполь-дипольного взаимодействия, атомной когерентности, расстройки частот атомов и поля и других механизмов изучалась в работах [34–45]. Принимая во внимание особый интерес, который в последнее время сфокусирован как на экспериментальных [27–29], так и на теоретических исследованиях [46–54] перепутывания кубитов в системах РКЭД с двухфотонными переходами, в настоящей работе мы исследовали особенности перепутывания двух атомов (кубитов) в рамках нерезонансной двухатомной двухфотонной модели Джейнса–Каммингса с тепловым полем резонатора. Экспериментально динамика резо-

нансного взаимодействия многоуровневого искусственного атома (транзмона) со слабым тепловым полем копланарного резонатора изучалась в работе [54]. При этом авторы установили, что полученные результаты хорошо описываются в рамках обобщенной многоуровневой модели Джейнса–Каммингса. Поскольку расстройка частот атома и поля может существенно увеличивать степень перепутывания кубитов [33], мы уделили особое внимание изучению влияния расстройки частот атомов и поля на максимальную степень перепутывания кубитов.

Таким образом, в настоящей работе мы исследуем динамику перепутывания двух двухуровневых атомов, нерезонансно взаимодействующих посредством вырожденных двухфотонных переходов с одномодовым тепловым полем идеального резонатора, для сепарабельных и перепутанных начальных состояний атомов.

1. Модель и её точное решение

Будем исследовать систему, состоящую из двух идентичных естественных или искусственных двухуровневых атомов (кубитов) с резонансной частотой перехода ω_0 , взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем идеального резонатора посредством вырожденных двухфотонных переходов. Физически это могут быть ридберговские нейтральные атомы, ионы в ловушках Пауля, сверхпроводящие джозефсоновские кольца, примесные спины, квантовые точки и другие двухуровневые системы, взаимодействующие с микроволновыми полями резонаторов или сверхпроводящими LC-конттурами. Эффективный гамильтониан такой системы в системе отсчета, вращающейся с удвоенной частотой моды поля резонатора 2ω , можно записать в виде

$$H = (1/2)\hbar\Delta(\sigma_1^z + \sigma_2^z) + \hbar g \sum_{i=1}^2 (\sigma_i^+ a^2 + a^{+2} \sigma_i^-), \quad (1)$$

где σ_i^z – оператор инверсии населенностей в i -м атоме ($i=1, 2$), $\sigma_i^+ = |+\rangle_i \langle -|$ и $\sigma_i^- = |-\rangle_i \langle +|$ – повышающий и понижающий операторы в i -м атоме, $|+\rangle_i$ и $|-\rangle_i$ – возбужденное и основное состояние двухуровневого i -го атома, a и a^+ – операторы рождения и уничтожения фотонов (или плазмонов в случае LC-резонатора) резонаторной моды, g – константа эффективного двухфотонного взаимодействия атомов с полем резонатора и Δ – расстройка частоты атомного перехода и удвоенной частоты резонаторной моды, равная $\Delta = \omega_0 - 2\omega$. Очевидно, что пригодность перепутанного состояния для целей квантовых вычислений или квантовых коммуникаций определяется соотношением времени, необходимого для произведения с кубитом требуемых операций и временами диссипативных процессов в системе. При выборе модели мы не приняли в расчёт диссипативные процессы, учитывая, что в настоящее время

для искусственных атомов в копланарных резонаторах (электронных и ядерных примесных спинов и сверхпроводящих джозефсоновских кубитов) время декогеренции во много раз превосходит времена операций с кубитами [2, 3]. Так, например, в одном из недавних экспериментов по исследованию динамики сверхпроводящих джозефсоновских кубитов с двухфотонными переходами в резонаторе [27] частота моды поля составляла примерно 5 ГГц, константа двухфотонного кубит-полевого взаимодействия равнялась $g/\omega = 0,01$, в то время как скорость потерь фотонов из резонатора была $\gamma/\omega = 10^{-3}$, скорость спонтанного излучения кубитов $\kappa/\omega = 10^{-4}$, а скорость диссипации фазы $\Gamma/\omega = 10^{-5}$. Параметры кубитов, частоты мод и константы диссипации для многочисленных экспериментов по исследованию взаимодействия кубитов с микроволновыми полями приведены в недавнем обзоре [29].

Мы будем исследовать динамику системы как для начальных сепарабельных

$$|\Psi(0)\rangle_A = |+, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_A = |+, +\rangle, \quad (3)$$

так и для перепутанного состояния Белловского типа

$$|\Psi(0)\rangle_A = \cos\theta |+, -\rangle + \sin\theta |-, +\rangle, \quad (4)$$

где θ – параметр, определяющий начальную степень перепутывания атомов ($0 \leq \theta \leq \pi$). При этом максимальной степени перепутывания атомов соответствует значение $\theta = \pi/4$.

В качестве начального состояния поля резонатора будем рассматривать тепловое состояние

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|, \quad (5)$$

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^n},$$

где \bar{n} – среднее число фотонов в резонаторной моде, $\bar{n} = (\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1)^{-1}$, k_B – постоянная Больцмана и T – равновесная температура резонатора.

Найдём точную динамику представленной модели. Начнём исследование для случая, когда резонаторное поле приготовлено в состоянии с определённым числом фотонов, а затем обобщим полученные результаты на случай теплового поля резонатора. Для фоковского начального состояния поля и чистых начальных состояний атомов в процессе эволюции рассматриваемой системы её состояние по-прежнему будет определяться волновой функцией. Решение временного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\Psi(t)\rangle$$

будем искать в виде

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\Psi(0)\rangle,$$

где $|\Psi(0)\rangle$ – начальная волновая функция полной системы. Начальную волновую функцию полной системы можно представить в виде разложения по собственным функциям гамильтониана (1) («одетым состояниям»). Пусть число элементарных возбуждений в системе с гамильтонианом (1) есть n ($n \geq 0$). Тогда собственные функции гамильтониана (1) могут быть представлены в виде

$$|\Phi_{in}\rangle = \kappa_{in}(\mu_{i1n} |-, -, n+4\rangle + \mu_{i2n} |+, -, n+2\rangle + \mu_{i3n} |-, +, n+2\rangle + \mu_{i4n} |+, +, n\rangle), \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{in} &= 1 / \sqrt{|\mu_{i1n}|^2 + |\mu_{i2n}|^2 + |\mu_{i3n}|^2 + |\mu_{i4n}|^2} \text{ и} \\ \mu_{i1,n} &= 0, \quad \mu_{i2,n} = -1, \quad \mu_{i3,n} = 1, \quad \mu_{i4,n} = 0, \\ \mu_{i1,n} &= -\frac{2\sqrt{2+3n+n^2}\sqrt{12+7n+n^2}}{24+14n+2n^2-\delta\epsilon_{in}-\epsilon_{in}^2}, \\ \mu_{i2,n} = \mu_{i3,n} &= -\frac{\sqrt{2+3n+n^2}(\delta+\epsilon_{in})}{24+14n+2n^2-\delta\epsilon_{in}-\epsilon_{in}^2}, \\ \mu_{i4,n} &= 1 \quad (i = 2, 3, 4), \end{aligned}$$

где $\delta = \Delta/g$.

Соответствующие безразмерные собственные значения гамильтониана есть

$$\begin{aligned} \epsilon_{1n} &= 0, \quad \epsilon_{2n} = -\text{Re} \left[\frac{2^{1/3}}{3 \times X_n} (Y_n - X_n^2 / 2^{2/3}) \right], \\ \epsilon_{3n} &= \text{Re} \left[\frac{1}{3 \times 2^{2/3} X_n} \left((1-i\sqrt{3})Y_n - (1+i\sqrt{3})X_n^2 / 2^{2/3} \right) \right], \\ \epsilon_{4n} &= \text{Re} \left[\frac{1}{3 \times 2^{2/3} X_n} \left((1+i\sqrt{3})Y_n - (1-i\sqrt{3})X_n^2 / 2^{2/3} \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_n &= \left(Z_n + \sqrt{Z_n^2 + 4Y_n^3} \right)^{1/3}, \\ Y_n &= -84 - 60n - 12n^2 - 3\delta^2, \\ Z_n &= -216\delta(5/2+n). \end{aligned}$$

Здесь $\epsilon_{in} = E_{in}/\hbar g$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Заметим, что в случае нерезонансной модели все собственные значения различны, так как параметр X_n является комплексным числом. Поскольку в дальнейшем мы будем сравнивать поведение резонансной и нерезонансной моделей, приведём также значения безразмерных уровней энергии полной системы для случая резонансной модели

$$\begin{aligned} \epsilon_{1n} &= 0, \quad \epsilon_{2n} = 0, \quad \epsilon_{3n} = -2\sqrt{7+5n+n^2}, \\ \epsilon_{4n} &= 2\sqrt{7+5n+n^2}. \end{aligned}$$

Наконец, приведём для иллюстрации значения безразмерных энергий полной нерезонансной системы в случае $\delta = 1, n = 0$:

$$\epsilon_{10} = 0; \quad \epsilon_{20} = 0,70; \quad \epsilon_{30} = -5,70; \quad \epsilon_{40} = 5$$

и $\delta = 1, n = 1$:

$$\epsilon_{10} = 0; \quad \epsilon_{20} = 0,53; \quad \epsilon_{30} = -7,53; \quad \epsilon_{40} = 7.$$

В случае резонанса соответствующие выражения для уровней энергии принимают следующие значения:

$$0, 0, -5,29, 5,29 \text{ и } 0, 0, -7,21, 7,21.$$

Таким образом, учитывая, что

$$e^{-iHt/\hbar} |\Phi_{in}\rangle = e^{-iE_{in}t/\hbar} |\Phi_{in}\rangle,$$

в представлении одетых состояний временная часть полной волновой функции будет в общем случае представлять собой суперпозицию временных функций вида $e^{-iE_{in}t/\hbar}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Предположим, что начальное состояние исследуемой системы есть $|+, -, n+2\rangle$ ($n \geq 0$). Тогда в момент времени t состояние системы можно описать вектором состояния

$$|\Psi(t)\rangle = G_{12,n} |-, -, n+4\rangle + G_{22,n} |+, -, n+2\rangle + G_{32,n} |-, +, n+2\rangle + G_{42,n} |+, +, n\rangle, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} G_{i2,n} &= e^{-i\epsilon_{in}t/\hbar} \kappa_{1n} \mu_{i2n}^* \mu_{1in} + e^{-i\epsilon_{2n}t/\hbar} \kappa_{2n} \mu_{i2n}^* \mu_{2in} + \\ &+ e^{-i\epsilon_{3n}t/\hbar} \kappa_{3n} \mu_{i2n}^* \mu_{3in} + e^{-i\epsilon_{4n}t/\hbar} \kappa_{4n} \mu_{i2n}^* \mu_{4in}, \quad (8) \\ &(i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Если же начальное состояние системы есть $|+, -, 0\rangle$ или $|+, -, 1\rangle$, то временная волновая функция имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = G_{12}^{(1)} |-, -, 2\rangle + G_{22}^{(1)} |+, -, 0\rangle + G_{32}^{(1)} |-, +, 0\rangle, \quad (9)$$

где

$$G_{12}^{(1)}(t) = -2\sqrt{2}ie^{i\delta t/2} \sin\left(\frac{1}{2}t\Omega_1\right) / \Omega_1,$$

$$G_{22}^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\Omega_1 t}{2}\right) - i(\delta / \Omega_1) \sin\left(\frac{\Omega_1 t}{2}\right) \right] \right\},$$

$$G_{32}^{(1)}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\Omega_1 t}{2}\right) - i(\delta / \Omega_1) \sin\left(\frac{\Omega_1 t}{2}\right) \right] \right\}$$

или

$$|\Psi(t)\rangle = G_{12}^{(2)} |-, -, 3\rangle + G_{22}^{(2)} |+, -, 0\rangle + G_{32}^{(2)} |-, +, 0\rangle, \quad (10)$$

где

$$G_{12}^{(2)}(t) = -2\sqrt{6}ie^{i\delta t/2} \sin\left(\frac{1}{2}t\Omega_2\right) / \Omega_2,$$

$$G_{22}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\Omega_2 t}{2}\right) - i(\delta/\Omega_1) \sin\left(\frac{\Omega_2 t}{2}\right) \right] \right\},$$

$$G_{32}^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\Omega_2 t}{2}\right) - i(\delta/\Omega_1) \sin\left(\frac{\Omega_2 t}{2}\right) \right] \right\}.$$

Предположим, что наша система в начальный момент находится в состоянии $|-, +, n+2\rangle$ ($n \geq 0$). Тогда временная волновая функция может быть представлена в виде

$$\Psi(t) = G_{13,n} |-, -, n+4\rangle + G_{23,n} |+, -, n+2\rangle + G_{33,n} |-, +, n+2\rangle + G_{43,n} |+, +, n\rangle, \quad (11)$$

где коэффициенты $G_{i3,n}$ имеют вид (8) при замене μ_{i2n}^* на μ_{i3n}^* ($i=1, 2, 3, 4$).

Если же начальное состояние системы есть $|-, +, 0\rangle$ или $|-, +, 1\rangle$, то временная волновая функция примет вид

$$|\Psi(t)\rangle = G_{13}^{(1)} |-, -, 2\rangle + G_{23}^{(1)} |+, -, 0\rangle + G_{33}^{(1)} |-, +, 0\rangle, \quad (12)$$

где

$$G_{13}^{(1)}(t) = G_{12}^{(1)}(t), \quad G_{23}^{(1)}(t) = G_{32}^{(1)}(t), \quad G_{33}^{(1)}(t) = G_{22}^{(1)}(t) \quad \text{или}$$

$$|\Psi(t)\rangle = G_{13}^{(2)} |-, -, 3\rangle + G_{23}^{(2)} |+, -, 1\rangle + G_{33}^{(2)} |-, +, 1\rangle, \quad (13)$$

где

$$G_{13}^{(2)}(t) = G_{12}^{(2)}(t), \quad G_{23}^{(2)}(t) = G_{32}^{(2)}(t), \quad G_{33}^{(2)}(t) = G_{22}^{(2)}(t)$$

соответственно.

Для начальных состояний $|+, +, n\rangle$ и $|-, -, n+4\rangle$ временные волновые функции есть

$$|\Psi(t)\rangle = G_{11,n} |-, -, n+4\rangle + G_{21,n} |+, -, n+2\rangle + G_{31,n} |-, +, n+2\rangle + G_{41,n} |+, +, n\rangle, \quad (14)$$

$$|\Psi(t)\rangle = G_{14,n} |-, -, n+4\rangle + G_{24,n} |+, -, n+2\rangle + G_{34,n} |-, +, n+2\rangle + G_{44,n} |+, +, n\rangle. \quad (15)$$

Коэффициенты $G_{i1,n}$ ($G_{i1,n}$) могут быть получены из (8) путём замены μ_{i2n}^* на μ_{i1n}^* (μ_{i4n}^*) ($i=1, 2, 3, 4$).

Если начальное состояние системы $|-, -, 2\rangle$ или $|-, -, 3\rangle$, временную волновую функцию можно представить как

$$|\Psi(t)\rangle = G_{14}^{(1)} |-, -, 2\rangle + G_{24}^{(1)} |+, -, 0\rangle + G_{34}^{(1)} |-, +, 0\rangle, \quad (16)$$

где

$$G_{14}^{(1)}(t) = e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\Omega_1 t}{2}\right) + i(\delta/\Omega_1) \sin\left(\frac{\Omega_1 t}{2}\right) \right],$$

$$G_{24}^{(1)}(t) = -\frac{2\sqrt{2}ie^{i\delta t/2} \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t\right)}{\Omega_1},$$

$$G_{34}^{(1)}(t) = G_{24}^{(1)}(t)$$

или

$$|\Psi(t)\rangle = G_{14}^{(2)} |-, -, 3\rangle + G_{24}^{(2)} |+, -, 1\rangle + G_{34}^{(2)} |-, +, 1\rangle, \quad (17)$$

где

$$G_{14}^{(2)}(t) = e^{i\delta t/2} \left[\cos\left(\frac{\Omega_2 t}{2}\right) + i(\delta/\Omega_2) \sin\left(\frac{\Omega_2 t}{2}\right) \right],$$

$$G_{24}^{(2)}(t) = -\frac{2\sqrt{6}ie^{i\delta t/2} \sin\left[\frac{1}{2}t\Omega_2\right]}{\Omega_2},$$

$$G_{34}^{(2)}(t) = G_{24}^{(2)}(t)$$

соответственно. Выше мы использовали обозначения

$$\Omega_1 = \sqrt{16 + \delta^2}, \quad \Omega_2 = \sqrt{48 + \delta^2}.$$

Наконец, для начальных состояний $|-, -, 2\rangle$ и $|-, -, 0\rangle$ временные волновые функции есть

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\delta t} |-, -, 1\rangle \quad (18)$$

или

$$|\Psi(t)\rangle = |-, -, 0\rangle \quad (19)$$

соответственно. Используя выражения (6)–(19), мы можем найти явный вид матрицы плотности полной системы $\rho_{Fock}(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|$. Используя выражение для матрицы плотности в случае фоковского начального состояния поля, легко получить явный вид матрицы плотности полной системы для теплового поля $\rho_{Thermal}(t)$. Выполняя усреднение полной матрицы плотности по переменным резонаторного поля, мы можем получить редуцированную матрицу плотности подсистемы атомов (кубитов) $\rho_A(t) = Tr_F \rho_{Thermal}(t)$. Атомная матрица плотности может быть использована для вычисления параметра перепутывания атомов.

2. Вычисление параметра перепутывания атомов

В качестве параметра перепутывания атомов мы воспользуемся параметром Переса–Хородецких или отрицательностью, которая может быть представлена в терминах отрицательных собственных значений μ_i^- частично транспонированной по переменным одного кубита атомной матрицы плотности (ρ_A^T)

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-.$$

Для сепарабельных начальных состояний кубитов (2), (3), а также перепутанного состояния Белловского

типа (4) редуцированная атомная матрица плотности имеет вид

$$\rho_A(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{23}(t)^* & \rho_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Элементы матрицы (20) для начального состояния кубитов вида $|+, -\rangle$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{42,n-2}(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{22,n-2}(t)|^2 + p_1 G_{22}^{(2)}(t)^2 + p_0 G_{22}^{(1)}(t), \\ \rho_{33}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{32,n-2}(t)|^2 + p_1 G_{32}^{(2)}(t)^2 + p_0 G_{32}^{(1)}(t), \\ \rho_{44}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{12,n-2}(t)|^2 + p_1 G_{12}^{(2)}(t)^2 + p_0 G_{12}^{(1)}(t), \\ \rho_{23}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n G_{22,n-2}(t)(G_{32,n-2}^*(t)) + \\ &+ p_1 G_{22}^{(2)}(t)(G_{32}^{(2)*}(t)) + p_0 G_{22}^{(1)}(t)(G_{32}^{(1)*}(t)). \end{aligned}$$

Для начального состояния $|+, +\rangle$ соответствующие матричные элементы есть

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{41,n}(t)|^2, \quad \rho_{22}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{21,n}(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{31,n}(t)|^2, \quad \rho_{44}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |G_{11,n}(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} p_n G_{21,n}(t)G_{31,n}^*(t). \end{aligned}$$

Для перепутанного состояния вида (4) матричные элементы в настоящей работе не приводятся ввиду их достаточно громоздкого вида.

Частично транспонированная по переменным одного кубита матрица плотности для (20) может быть записана в виде

$$\rho_A^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & \rho_{23}(t)^* \\ 0 & \rho_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}(t) & 0 \\ \rho_{23}(t) & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Матрица (21) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате для отрицательности имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sqrt{(\rho_{11}(t) - \rho_{44}(t))^2 + 4|\rho_{23}(t)|^2} - \\ &- \rho_{11}(t) - \rho_{44}(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Результаты численного моделирования отрицательности (22) представлены на рис. 1–4.

3. Результаты и обсуждение

Отрицательность для сепарабельного начального атомного состояния (2) показана на рис. 1 как функция безразмерного времени gt для малых расстройок и фиксированного значения среднего числа фотонов $\bar{n} = 0,1$. Из рис. 1 видно, что увеличение безразмерного параметра расстройки δ приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов. В случае больших значений расстройки между атомами и модой поля отсутствует обмен энергией реальными фотонами. Атомы обмениваются виртуальными фотонами, в результате такая возбужденная виртуальная среда резонатора приводит к усилению квантовых корреляций или перепутанности состояний атомов. Аналогичный эффект для модели с однофотонными переходами отмечался в работе [35].

На рис. 2 приведено сравнение поведения параметра перепутывания для резонансной (сплошная линия) и нерезонансной (штриховая линия) однофотонной (рис. 1а) и двухфотонной (рис. 2б) моделей. Очевидно, что при малых средних числах фотонов основной вклад в суммах для элементов матрицы (21) и, соответственно, в параметр перепутывания (22) будут давать временные слагаемые, содержащие экспоненциальные множители $e^{iE_m t/\hbar}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) с n близкими нулю. Для резонансной модели при любых n два уровня энергии полной системы обращаются в ноль, а два других отличаются только знаком, поэтому поведение наблюдаемых сохраняет осцилляционный характер. В случае нерезонансной модели все уровни энергии различны для всех значений n (при этом один из них нулевой), что приводит к существенной нелинейности в поведении наблюдаемых. Аналогичное различие в поведении наблюдаемых для резонансной и нерезонансной моделей с однофотонными переходами отмечалось ранее в работе [33].

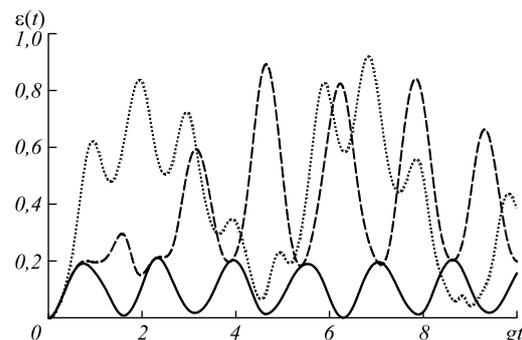


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального атомного состояния (2).

Безразмерный параметр расстройки $\delta=0$ (сплошная линия), $\delta=0,5$ (штриховая линия) и $\delta=5$ (точечная линия). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0,1$

В настоящее время имеется большое число экспериментов по перепутыванию как двух, так и многих кубитов различной физической природы за счёт вза-

имодействия с полями микроволновых резонаторов (сверхпроводящих джозефсоновских колец, ионов в магнитных ловушках, ридберговских атомов и др.) [29]. При этом основное внимание уделяется экспериментам со сверхпроводящими кубитами, поскольку они в настоящее время наиболее широко используются в качестве логических элементов квантовых компьютеров. При этом на основе экспериментов удается определить не только усредненные значения параметра перепутывания кубитов, но и полную зависимость параметра перепутывания от времени [15]. В экспериментах по перепутыванию сверхпроводящих кубитов использовались вакуумные поля резонаторов и однофотонные взаимодействия. Однако, как уже отмечалось выше, динамика населённостей сверхпроводящих кубитов с двухфотонными переходами и

среднего числа фотонов в моде резонатора также активно исследуется экспериментально в последние годы [27, 28]. Характеристики сверхпроводящих кубитов с многофотонными переходами приведены в обзоре [28]. Параметры эксперимента [27] приведены нами при описании использованной в работе модели. Как уже отмечалось во Введении, в работе [54] экспериментально также изучалась динамика резонансного взаимодействия сверхпроводящего кубита (транзмона) со слабым тепловым полем копланарного резонатора. Таким образом, по мере совершенствования техники эксперимента возможно будет наблюдать динамику перепутывания кубитов с двухфотонными переходами в резонаторах со слабым тепловым полем и изучить влияние расстройки на степень перепутывания кубитов.

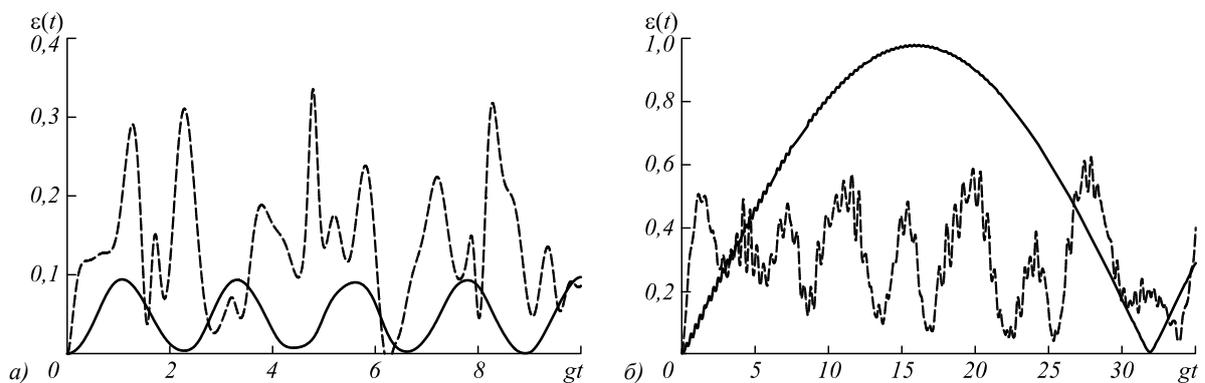


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального атомного состояния (2) в случае однофотонной двухатомной (а) и двухфотонной двухатомной (б) МДК. Безразмерный параметр расстройки $\delta=0$ (сплошная линия) и $\delta=10$ (штриховая линия). Среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 0,1$

Из рис. 2а видно, что для резонансного взаимодействия атома с полем перепутывание, индуцированное нелинейным двухфотонным взаимодействием с тепловым шумом резонатора, больше, чем перепутывание, вызванное линейным однофотонным взаимодействием. Такой результат впервые для резонансной двухатомной двухфотонной модели получен в работе [31]. Однако, как видно из рис. 2б, полученного из (22), ситуация принципиально меняется для модели с нерезонансным взаимодействием. В последнем случае перепутывание атомов, индуцированное двухфотонным взаимодействием, существенно меньше, чем перепутывание, индуцированное однофотонным взаимодействием атомов с полем. Отрицательность для сепарабельного начального атомного состояния (3) изображена на рис. 3 как функция безразмерного времени gt для различных расстроек и фиксированного значения среднего числа фотонов $\bar{n} = 0,1$ (рис. 3а) и $\bar{n} = 1$ (рис. 3б). В работах [30–43] было показано, что резонансное одно- и двухфотонное взаимодействие атомов, приготовленных одновременно в возбужденном состоянии, с тепловым полем резонатора не приводят к их перепутыванию ни для каких параметров модели. Однако ситуация принципиально ме-

няется для двухатомной модели с нерезонансным взаимодействием. Из рис. 3 видно, что для нерезонансного взаимодействия перепутывание кубитов, приготовленных первоначально в возбужденных состояниях, возможно при малых средних числах тепловых фотонов $\bar{n} \leq 1$.

Временная зависимость отрицательности для перепутанного начального атомного состояния (4) представлена на рис. 4 как функция безразмерного времени gt для фиксированного значения среднего числа фотонов $\bar{n} = 0,1$ (3а) и $\bar{n} = 1$ (3б). Из рис. 4 хорошо видно, что включение расстройки частот атомов и поля уменьшает осцилляции параметра перепутывания, т.е. приводит к стабилизации начального атомного перепутывания по отношению к флуктуациям, вызванным тепловым шумом. Как и в случае сепарабельных начальных состояний атомов, для больших расстроек возбужденная виртуальная среда резонатора не разрушает начальные квантовые корреляции или перепутанность состояний атомов. Аналогичный эффект имеет место для ридберговских атомов, приготовленных в белловских перепутанных состояниях и последовательно пролетающих вакуумный или тепловой резонатор одноатомного лазера [55].

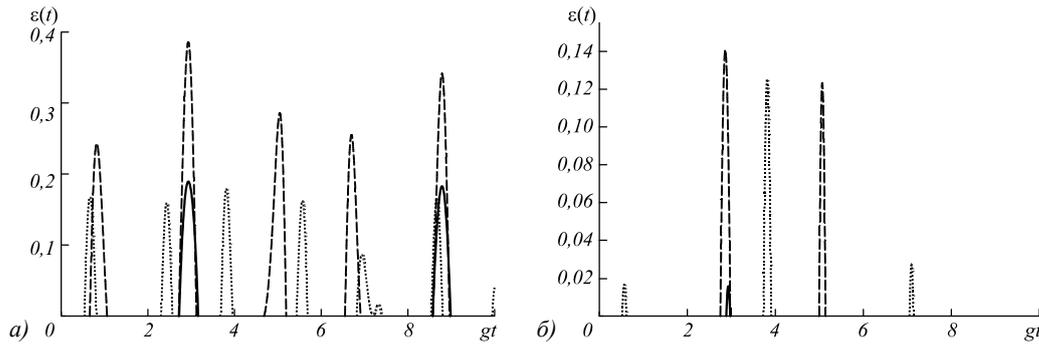


Рис. 3. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для начального атомного состояния (3). Безразмерный параметр расстройки $\delta=1$ (сплошная линия), $\delta=3$ (штриховая линия) и $\delta=5$ (точечная линия). Среднее число фотонов $\bar{n} = 0,1$ (а) и $\bar{n} = 1$ (б)

На рис. 4б показано, что для резонансного взаимодействия кубитов и поля в случае достаточно интенсивного теплового поля имеет место эффект внезапной смерти перепутывания. Однако указанный эффект легко может быть устранён путём включения небольшой расстройки частот атомов и поля. Такое действие легко может быть выполнено для многих типов кубитов, в частности, для сверхпроводящих ку-

битов, у которых энергетическая щель между основным и первым возбуждённым уровнем легко может изменяться при изменении магнитного поля. Таким образом, отстраивая частоты кубитов от частоты резонаторного поля, для изначально перепутанных кубитов мы можем значительно уменьшить осцилляции параметра перепутывания, возникающие за счёт их взаимодействия с тепловыми фотонами резонатора.

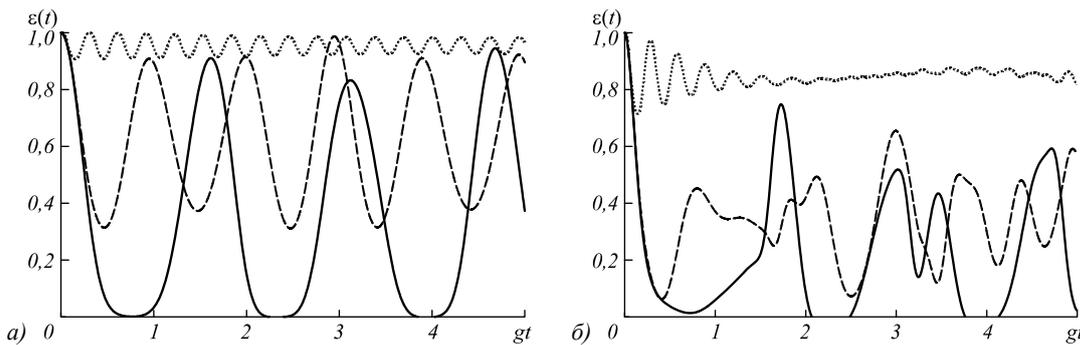


Рис. 4. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для перепутанного начального атомного состояния (4). Безразмерный параметр расстройки $\delta=0$ (сплошная линия), $\delta=5$ (штриховая линия) и $\delta=20$ (точечная линия). Среднее число фотонов $\bar{n} = 0,1$ (а) и $\bar{n} = 1$ (б)

Заключение

Таким образом, в настоящей работе мы исследовали влияние расстройки частот атомов и поля на перепутывание естественных или искусственных атомов, нерезонансно взаимодействующих посредством вырожденных двухфотонных переходов с тепловым однофотонным полем идеального резонатора. Мы показали, что для сепарабельного начального состояния атома $|+, -\rangle$ малые расстройки могут значительно увеличить степень перепутывания атомов, индуцированную тепловым полем. Расчёты временной зависимости отрицательности показали, что для нерезонансного взаимодействия атома с полем степень атом-атомного перепутывания, индуцированного нелинейным двухфотонным взаимодействием, меньше, чем перепутывание, индуцированное однофотонным взаимодействием, в отличие от обратной ситуации в случае резонансного взаимодействия. В последнем

случае, как было показано ранее, перепутывание, вызванное нелинейным взаимодействием, больше, чем перепутывание, вызванное линейным взаимодействием. Мы также показали, что в случае нерезонансного взаимодействия для сепарабельного начального состояния $|+, +\rangle$ тепловое поле может индуцировать атом-атомное перепутывание в случае достаточно малых интенсивностей теплового поля. Расчёты также показали, что для перепутанного начального атомного состояния типа Белла расстройка частот атомов и поля приводит к существенному уменьшению амплитуд колебаний отрицательности, то есть приводит к стабилизации начального перепутывания. В случае относительно интенсивных тепловых полей включение расстройки позволяет устранить эффект мгновенной смерти перепутывания. В настоящей работе нами не учитывались эффекты диссипации энергии в рассматриваемой системе. Такое рассмотрение на основе кинетической теории в рамках марковского [56] или

немарковского [57] приближений будет предметом нашей следующей работы.

Литература

- Buluta, I.** Natural and artificial atoms for quantum computation / I. Buluta, S. Ashhab, F. Nori // Reports on Progress in Physics. – 2011. – Vol. 74. – 104401.
- Xiang, Z.-L.** Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems / Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J.Q. You, F. Nori // Reviews of Modern Physics. – 2013. – Vol. 85. – P. 623-653.
- Georgescu, I.M.** Quantum simulation / I.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori // Reviews of Modern Physics. – 2014. – Vol. 88. – P. 153-185.
- Gu, X.** Microwave photonics with superconducting quantum circuits / X. Gu, A.F. Kockum, A. Miranowicz, Y.-X. Liu, F. Nori // Physics Reports. – 2017. – Vol. 718-719. – P. 1-102.
- Wendin, G.** Quantum information processing with superconducting circuits: a review / G. Wendin // Reports on Progress in Physics. – 2017. – Vol. 80. – 106001.
- Shore, B.W.** The Jaynes-Cummings model / B.W. Shore, P.L. Knight // Journal of Modern Optics. – 1993. – Vol. 40, Issue. 7. – P. 1195-1238.
- Larson, J.** Dynamics of the Jaynes-Cummings and Rabi models: Old wine in new bottles / J. Larson // Physica Scripta. – 2007. – Vol. 76. – P. 146-160.
- Garraway, B.M.** The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited / B.M. Garraway // Philosophical Transactions of the Royal Society A. – 2011. – Vol. 369, Issue 1939. – P. 1137-1155.
- Leibfried, D.** Quantum dynamics of single trapped ions / D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, D. Wineland // Reviews of Modern Physics. – 2003. – Vol. 75. – P. 281-324.
- Walther, H.** Cavity quantum electrodynamics / H. Walther, B.T.H. Varcoe, B.-G. Englert, T. Becker // Reports on Progress in Physics. – 2006. – Vol. 69. – P. 1325-1382.
- Haroche, S.** From cavity to circuit quantum electrodynamics. / S. Haroche, M. Brune, J.M. Raimond // Nature Physics. – 2020. – Vol. 16. – P. 243-246.
- Schuster, I.** Nonlinear spectroscopy of photons bound to one atom / I. Schuster, A. Kubanek, A. Fuhrmanek, T. Puppe, P.W.H. Pinkse, K. Murr, G. Rempe // Nature Physics. – 2008. – Vol. 4. – P. 382-385.
- Mlynek, J.A.** Demonstrating W-type entanglement of Dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics / J.A. Mlynek, A.A. Abdumalikov Jr., J.M. Fink, L. Steffen, M. Baur, C. Lang, A.F. van Loo, A. Wallraff // Physical Review A. – 2010. – Vol. 86. – 053838.
- Altomare, F.** Tripartite interactions between two phase qubits and a resonant cavity / F. Altomare, J.I. Park, K. Cicak, M.A. Sillanpää, M.S. Allman, D. Li, A. Sirois, J.A. Strong, J.D. Whittaker, R.W. Simmonds // Nature Physics. – 2010. – Vol. 6. – P. 777-781.
- Sun, G.** Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system / G. Sun, Z. Zhou, B. Mao, X. Wen, P. Wu, S. Han // Physical Review B. – 2012. – Vol. 86. – 064502.
- Niemczyk, T.** Beyond the Jaynes-Cummings model: circuit QED in the ultrastrong coupling regime / T. Niemczyk, F. Deppe, H. Hueb, E.P. Menzel, F. Hocke, M.J. Schwarz, J.J. Garcia-Ripoll, D. Zucco, T. Hummer, E. Solano, A. Marx, R. Gross // Nature Physics. – 2010. – Vol. 6. – P. 772-776.
- Turcu, I.C.E.** Select Quantum electrodynamics experiments with colliding petawatt laser pulses Quantum electrodynamics experiments with colliding petawatt laser pulses / I.C.E. Turcu, B. Shen, D. Neeley, G. Sarri, K.A. Tanaka, P. McKenna, S.P.D. Mangles, T.-P. Yu, W. Luo, X.-L. Zhu, Y. Yin // High Power Laser Science and Engineering. – 2019. – Vol 7. – P. 1-8.
- Dell'Anno, F.** Multiphoton quantum optics and quantum state engineering / F. Dell'Anno, S. De Siena, F. Illuminati // Physics Reports. – 2006. – Vol. 428. – P. 53-168.
- Villas-Boas, C.J.** Multiphoton Jaynes-Cummings Model: Arbitrary Rotations in Fock Space and Quantum Filters / C.J. Villas-Boas, D.Z. Rossatto // Physical Review Letters. – 2019. – Vol. 122. – 123604.
- Vogel, W.** Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion / W. Vogel, R.L. de Matos Filho // Physical Review A. – 1995. – Vol. 52, Issue 5. – P. 4214-4217.
- Kubanek, A.** Two-photon gateway in one-atom cavity quantum electrodynamics / A. Kubanek, A. Ourjoumtsev, I. Schuster, M. Koch, P.W.H. Pinkse, K. Murr, G. Rempe // Physical Review Letters. – 2008. – Vol. 101. – 203602.
- Kim, H.** Strong coupling between two quantum dots and a photonic crystal cavity using magnetic field tuning / H. Kim, D. Sridharan, T.C. Shen, G.S. Solomon, E. Waks // Optics Express. – 2011. – Vol. 19. – P. 2589-2599.
- Poletto, S.** Entanglement of two superconducting qubits in a waveguide cavity via monochromatic two-photon excitation / S. Poletto, J.M. Gambetta, S.T. Merkel, J.A. Smolin, J.M. Chow, A.D. Corcoles, G.A. Keefe, M.B. Rothwell, J.R. Rozen, D.W. Abraham, C. Rigetti, M. Steffen // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 109, Issue 24. – 240505.
- Deppe, F.** Two-photon probe of the Jaynes-Cummings model and controlled symmetry breaking in circuit QED / F. Deppe, M. Mariani, E.P. Menzel, A. Marx, S. Saito, K. Kakuyanagi, H. Tanaka, T. Meno, K. Semba, H. Takayanagi, E. Solano, R. Grossi // Nature Physics. – 2008. – Vol. 4. – P. 686-691.
- Campagne-Ibarcq, P.** Deterministic remote entanglement of superconducting circuits through microwave two-photon transitions / P. Campagne-Ibarcq, E. Zalys-Geller, A. Narla, S. Shankar, P. Reinhold, L. Burkhardt, C. Axline, W. Pfaff, L. Frunzio, R.J. Schoelkopf, M.H. Devoret // Physical Review Letters. – 2018. – Vol. 120. – 200501.
- Di Stefano, O.** Resolution of gauge ambiguities in ultrastrong coupling cavity quantum electrodynamics / O. Di Stefano, A. Settineri, V. Macri, L. Garziano, R. Stassi, S. Savasta, F. Nori // Nature Physics. – 2019. – Vol. 15. – P. 803-808. – DOI: 10.1038/s41567-019-0534-4.
- Felicetti, S.** Two-photon quantum Rabi model with superconducting circuits / S. Felicetti, D.Z. Rossatto, E. Rico, E. Solano, P. Forn-Diaz // Phys. Rev A. – 2018. – Vol. 97. – 013851.
- Shevchenko, S.N.** Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits / S.N. Shevchenko, A.N. Omelyanchouk, E. Il'ichev // Физика низких температур. – 2012. – Т. 38, № 4. – С. 360-381.
- Kockum, A.F.** Ultrastrong coupling between light and matter / A.F. Kockum, A. Miranowicz, S. De Lierato, S. Savasta, F. Nori // Nature Reviews Physics. – 2019. – Vol. 1. – P. 19-40.
- Plenio, M.B.** Cavity-loss-induced generation of entangled atoms / M.B. Plenio, S.F. Huelga, A. Beige, P.L. Knight // Physical Review A. – 1999. – Vol. 59. – P. 2468-2475.
- Bose, S.** Subsystem purity as an enforcer of entanglement / S. Bose, I. Fuentes-Guridi, P.L. Knight, V. Vedral // Physical Review Letters. – 2001. – Vol. 87. – 050401.
- Kim, M.S.** Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim, J. Lee, D. Ahn, P.L. Knight // Physical Review A. – 2002. – Vol. 65. – 040101.
- Zhou, L.** Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement / L. Zhou, H.-S. Song // Journal of Optics B. – 2002. – Vol. 4. – P. 425-429.
- Bashkirov, E.K.** Entanglement induced by the two-mode thermal noise / E.K. Bashkirov // Laser Physics Letters. – 2006. – Vol. 3. – P. 145-150.

35. **Zhang, B.** Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field / B. Zhang // Optics Communications. – 2010. – Vol. 283. – P. 4676-4679.
36. **Aguiar, L.S.** The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field / L.S. Aguiar, P.P. Munhoz, A. Vidiella-Barranco, J. Roversi // Journal of Optics B. – 2005. – Vol. 7. – P. S769-S771.
37. **Hu, Y.-H.** Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes / Y.-H. Hu, M.-F. Fang, Q. Wu // Chinese Physics. – 2007. – Vol. 16. – P. 2407-2414.
38. **Hu, Y.-H.** Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature / Y.-H. Hu, M.-F. Fang, C.-L. Jiang, K. Zeng // Chinese Physics B. – 2008. – Vol. 17. – P. 1784-1790.
39. **Liao, X.-P.** The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process / X.-P. Liao, M.-F. Fang, J.-W. Cai, X.-J. Zheng // Chinese Physics B. – 2008. – Vol. 17. – P. 2137-2142.
40. **Bashkirov, E.K.** Entanglement between two qubits induced by thermal field / E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 735, Issue 1. – 012025.
41. **Bashkirov, E.K.** The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions / E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin // Pramana. – 2006. – Vol. 84(1). – P. 127-135.
42. **Башкиров, Е.К.** Перепутывание двух атомов, взаимодействующим с тепловым электромагнитным полем / Е.К. Башкиров, М.П. Ступацкая // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35, № 2. – С. 243-249.
43. **Башкиров, Е.К.** Влияние диполь-дипольного взаимодействия и атомной когерентности на перепутывание двух атомов с вырожденными двухфотонными переходами / Е.К. Башкиров, М.С. Мастюгин // Оптика и спектроскопия. – 2014. – Т. 116, № 4. – P. 678-683.
44. **Башкиров, Е.К.** Перепутывание двух сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с двухмодовым тепловым полем / Е.К. Башкиров, М.С. Мастюгин // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, №3. – С. 278-285.
45. **Башкиров, Е.К.** Перепутывание кубитов при наличии атомной когерентности / Е.К. Башкиров, Д.В. Литвинова // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 4. – С. 663-669.
46. **Bashkirov, E.K.** Thermal entanglement between a Jaynes-Cummings atom and an isolated atom / E.K. Bashkirov // International Journal of Theoretical Physics. – 2018. – Vol. 57. – P. 3761-3771.
47. **Cardoso, W.B.** Entanglement sudden death via two-photon processes in cavity QED / W.B. Cardoso, A.T. Avelar, B. Baseia, N. de Almeida // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2009. – Vol. 42, Issue 19. – 195507.
48. **Rephaeli, E.** Few-photon single-atom cavity QED with input-output formalism in Fock space / E. Rephaeli, S. Fan // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2012. – Vol. 18. – P. 1754-1762.
49. **Bashkirov, E.K.** The dynamics of entanglement in two-atom Tavis-Cummings model with non-degenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states / E.K. Bashkirov, M.S. Mastyugin // Optics Communications. – 2014. – Vol. 313. – P. 170-174.
50. **Yang, G.** Quantum nonlinear cavity quantum electrodynamics with coherently prepared atoms / G. Yang, W.-J. Gu, G. Li, B. Zou, Y. Zhu // Physical Review A. – 2015. – Vol. 92. – 033822.
51. **Puebla, R.** Probing the dynamics of a superradiant quantum phase transition with a single trapped ion / R. Puebla, M.J. Hwang, J. Casanova, M.B. Plenio // Physical Review A. – 2017. – Vol. 95. – 063844.
52. **Сингх, С.** Эволюция запутанности атомов в поле резонатора с различными статистиками в двухфотонном процессе / С. Сингх, К. Гилхаре // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2018. – Т. 154, № 3. – С. 461-468.
53. **Al Naim, A.F.** Effect of Kerr medium and Stark Shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes-Cummings model under dispersive approximation / A.F. Al Naim, J.Y. Khan, E.M. Khalil, S. Abdel-Khalek // Journal of Russian Laser Research. – 2019. – Vol. 40, Issue 1. – P. 20-29.
54. **Fink, J.M.** Thermal excitation of multi-photon dressed states in circuit quantum electrodynamics / J.M. Fink, M. Baur, R. Bianchetti, S. Filipp, M. Göppl, P.J. Leek, L. Steffen, A. Blais, A. Wallraff // Physica Scripta. – 2009. – Vol. T137. – 014013.
55. **Zheng, S.-B.** Robust and high-speed entanglement engineering in cavity QED and ion trap with a single slightly-detuned interaction / S.-B. Zheng // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2006. – Vol. 39. – P. 2505-2513.
56. **Башкиров, Е.К.** Динамика коллективного спонтанного излучения двух трехуровневых атомов в резонаторе / Е.К. Башкиров // Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т. 100, № 4. – С. 668-671.
57. **Павельев, А.В.** Исследование немарковской динамики двух взаимодействующих кубитов на основе численного решения нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера / А.В. Павельев, В.В. Семин // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 168-173. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-168-173.

Сведения об авторе

Башкиров Евгений Константинович, 1955 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета. В 1978 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1985 году защитил кандидатскую диссертацию в Московском государственном университете, в 2006 году – докторскую диссертацию в Саратовском государственном университете. Область научных интересов: когерентная оптика, квантовая оптика и квантовая информатика, оптическая синергетика. Публикации: 300 научных трудов, 1 монография. E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru.

ГРНТИ: 29.29.39

Поступила в редакцию 4 июля 2019 г. Окончательный вариант – 25 ноября 2019 г.

Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field

E.K. Bashkirov¹

¹Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

In this paper, we investigate the entanglement between two two-level atoms non-resonantly interacting with a thermal field of a lossless one-mode resonator via degenerate two-photon transitions. On the basis of the exact solution of the time-dependent density matrix we calculate the negativity as a measure of atomic entanglement. We show that for separable initial atomic states a slight atom-field detuning may generate the high amount of atom-atom entanglement. The results also show that for non-resonant atom-field interaction the entanglement induced by nonlinear two-photon interaction is smaller than that induced by one-photon interaction in contrast to the resonant interaction situation. For a Bell-type entangled initial atomic state we obtain that if the detuning increases, there is an appreciable decrease in the amplitudes of the negativity oscillations. The results also show that elimination of the sudden death of entanglement for non-resonant two-photon atom-field interaction may take place.

Keywords: two-level atoms, two-photon interaction, thermal field, entanglement, sudden death of entanglement.

Citation: Bashkirov EK. Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field. *Computer Optics* 2020; 44(2): 167-176. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-595.

References

- [1] Buluta I, Ashhab S, Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Rep Prog Phys* 2011; 74: 104401.
 - [2] Xiang Z-L, Ashhab S, You JQ, Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Rev Mod Phys* 2013; 85: 623-653.
 - [3] Georgescu IM, Ashhab S, Nori F. Quantum simulation. *Rev Mod Phys* 2014; 88: 153-185.
 - [4] Gu X, Kockum AF, Miranowicz A, Liu Y-X, Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Phys Rep* 2017; 718-719: 1-102.
 - [5] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Rep Prog Phys* 2017; 80: 106001.
 - [6] Shore BW, Knight PL. The Jaynes-Cummings model. *J Mod Opt* 1993; 40(7): 1195-1238.
 - [7] Larson J. Dynamics of the Jaynes-Cummings and Rabi models: Old wine in new bottles. *Physica Scripta* 2007; 76: 146-160.
 - [8] Garraway BM. The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited. *Phil Trans R Soc A* 2011; 369(1939): 1137-1155.
 - [9] Leibfried D, Blatt R, Monroe C, Wineland D. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev Mod Phys* 2003; 75: 281-324.
 - [10] Walther H, Varcoe BTH, Englert B-G, Becker T. Cavity quantum electrodynamics. *Rep Prog Phys* 2006; 69: 325-1382.
 - [11] Haroche S., Brune M., Raimond JM. From cavity to circuit quantum electrodynamics. *Nature Phys* 2020; 16: 243-246.
 - [12] Schuster I, Kubanek A, Fuhrmanek A, Puppe T, Pinkse PWH, Murr K, Rempe G. Nonlinear spectroscopy of photons bound to one atom. *Nature Phys* 2008; 4: 382-385.
 - [13] Mlynek JA, Abdumalikov Jr AA, Fink JM, Steffen L, Baur M, Lang C, van Looy AF, Wallraff A. Demonstrating W-type entanglement of Dicke states in resonant cavity quantum electrodynamics. *Phys Rev A* 2010; 86: 053838.
 - [14] Altomare F, Park JI, Cicak K, Sillanpää MA, M. Allman, MS, Li D, Sirois A, Strong JA, Whittaker JD, Simmonds RW. Tripartite interactions between two phase qubits and a resonant cavity. *Nature Phys* 2010; 6: 777-781.
 - [15] Sun G, Zhou Z, Mao B, Wen X, Wu P, Han S. Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system. *Phys Rev B* 2012; 86: 064502.
 - [16] Niemczyk T, Deppe F, Hueb H, Menzel EP, Hocke F, Schwarz MJ, Garcia-Ripoll JJ, Zueco D, Hummer T, Solano E, Marx A, Gross R. Beyond the Jaynes-Cummings model: circuit QED in the ultrastrong coupling regime. *Nature Phys* 2010; 6: 772-776.
 - [17] Turcu ICE, Shen B, Neely D, Sarri G, Tanaka KA, McKenna P, Mangles SPD, Yu T-P, Luo W, Zhu X-L, Yin Y. Select Quantum electrodynamics experiments with colliding petawatt laser pulses. *Quantum electrodynamics experiments with colliding petawatt laser pulses. High Power Laser Sci Eng* 2019; 7: 1-8.
 - [18] Dell'Anno F, De Siena S, Illuminati F. Multiphoton quantum optics and quantum state engineering. *Phys Rep* 2006; 428: 53-168.
 - [19] Villas-Boas CJ, Rossatto DZ. Multiphoton Jaynes-Cummings model: Arbitrary rotations in Fock space and quantum filters. *Phys Rev Lett* 2019; 122: 123604.
 - [20] Vogel W, de Matos Filho RL. Nonlinear Jaynes-Cummings dynamics of a trapped ion. *Phys Rev A* 1995; 52(5): 4214-4217.
 - [21] Kubanek A, Ourjoumtsev A, Schuster I, Koch M, Pinkse PWH, Murr K, Rempe G. Two-photon gateway in one-atom cavity quantum electrodynamics. *Phys Rev Lett* 2008; 101: 203602.
 - [22] Kim H, Sridharan D, Shen TC, Solomon GS, Waks E. Strong coupling between two quantum dots and a photonic crystal cavity using magnetic field tuning. *Opt Express* 2011; 19: 2589-2599.
 - [23] Poletto S, Gambetta JM, Merkel ST, Smolin JA, Chow JM, Corcoles AD, Keefe GA, Rothwell MB, Rozen JR, Abraham DW, Rigetti C, Steffen M. Entanglement of two superconducting qubits in a waveguide cavity via mono-
-

- chromatic two-photon excitation. *Phys Rev Lett* 2012; 109(24): 240505.
- [24] Deppe F, Mariani M, Menzel EP, Marx A, Saito S, Kakuyanag K, Tanaka H, Meno T, Semba K, Takayanagi H, Solano E, Grossi R. Two-photon probe of the Jaynes-Cummings model and controlled symmetry breaking in circuit QED. *Nature Phys* 2008; 4: 686-691.
- [25] Campagne-Ibarcq P, Zalys-Geller E, Narla A, Shankar S, Reinhold P, Burkhardt L, Axline C, Pfaff W, Frunzio L, Schoelkopf RJ, Devoret MH. Deterministic remote entanglement of superconducting circuits through microwave two-photon transitions. *Phys Rev Lett* 2018; 120: 200501.
- [26] Di Stefano O, Settineri A, Macrì V, Garziano L, Stassi R, Savasta S, Nori F. Resolution of gauge ambiguities in ultrastrong coupling cavity quantum electrodynamics. *Nature Phys* 2019; 15: 803-808. DOI: 10.1038/s41567-019-0534-4.
- [27] Felicetti S, Rossatto DZ, Rico E, Solano E, Forn-Diaz P. Two-photon quantum Rabi model with superconducting circuits. *Phys Rev A* 2018; 97: 013851.
- [28] Shevchenko SN, Omelyanchouk AN, Il'ichev E. Multiphoton transitions in Josephson-junction qubits. *Low Temp Phys* 2012; 38(4): 360-381.
- [29] Kockum AF, Miranowicz A, De Lierato S, Savasta S, Nori F. Ultrastrong coupling between light and matter. *Nat Rev Phys* 2019; 1: 19-40.
- [30] Plenio MB, Huelga SF, Beige A, Knight PL. Cavity-loss-induced generation of entangled atoms. *Phys Rev A* 1999; 59: 2468-2475.
- [31] Bose S, Fuentes-Guridi I, Knight PL, Vedral V. Subsystem purity as an enforcer of entanglement. *Phys Rev Lett* 2001; 87: 050401.
- [32] Kim MS, Lee J, Ahn D, Knight PL. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Phys Rev A* 2002; 65: 040101
- [33] Zhou L, Song H-S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *J Opt B* 2002; 4: 425-429.
- [34] Bashkirov EK. Entanglement induced by the two-mode thermal noise. *Laser Phys Lett* 2006; 3: 145-150.
- [35] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Opt Commun* 2010; 283: 4676-4679.
- [36] Aguiar LS, Munhoz PP, Vidiella-Barranco A, Roversi JA. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field. *J Opt B* 2005; 7: S769-S771.
- [37] Hu Y-H, Fang M-F, Wu Q. Atomic coherence control on the entanglement of two atoms in two-photon processes. *Chinese Phys* 2007; 16: 2407-2414.
- [38] Hu Y-H, Fang M-F, Jiang C-L, Zeng K. Coherence-enhanced entanglement between two atoms at high temperature. *Chinese Phys B* 2008; 17: 1784-1790.
- [39] Liao X-P, Fang M-F, Cai J-W, Zheng X-J. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process. *Chinese Phys B* 2008; 17: 2137-2142.
- [40] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. Entanglement between two qubits induced by thermal field. *J Phys: Conf Ser* 2016; 735(1): 012025.
- [41] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. The influence of atomic coherence and dipole-dipole interaction on entanglement of two qubits with nondegenerate two-photon transitions. *Pramana* 2006; 84(1): 127-135.
- [42] Bashkirov EK, Stupatskaya MP. Entanglement of two atoms interacting with a thermal electromagnetic field. *Computer Optics* 2011; 35(2): 249-243.
- [43] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. The influence of the dipole-dipole interaction and atomic coherence on the entanglement of two atoms with degenerate two-photon transitions. *Optics and Spectroscopy* 2014; 116(4): 630-634.
- [44] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. Entanglement of two superconducting qubits interacting with two-mode thermal field. *Computer Optics* 2013; 37(3): 278-285.
- [45] Bashkirov EK, Litvinova DV. Entanglement between qubits due to the atomic coherence. *Computer Optics* 2014; 38(4): 663-669.
- [46] Bashkirov EK. Thermal entanglement between a Jaynes-Cummings atom and an isolated atom. *Int J Theor Phys* 2018; 57: 3761-3771.
- [47] Cardoso WB, Avelar AT, Baseia B, de Almeida NG. Entanglement sudden death via two-photon processes in cavity QED. *J Phys B: At Mol Opt Phys* 2009; 42(19): 195507.
- [48] Rephaeli E, Fan S. Few-photon single-atom cavity QED with input-output formalism in Fock space. *IEEE J Sel Top Quantum Electron* 2012; 18: 1754-1762.
- [49] Bashkirov EK, Mastuyugin MS. The dynamics of entanglement in two-atom Tavis-Cummings model with nondegenerate two-photon transitions for four-qubits initial atom-field entangled states. *Opt Commun* 2014; 313: 170-174.
- [50] Yang G, Gu W-J, Li G, Zou B, Zhu Y. Quantum nonlinear cavity quantum electrodynamics with coherently prepared atoms. *Phys Rev A* 2015; 92: 033822.
- [51] Puebla R, Hwang MJ, Casanova J, Plenio MB. Probing the dynamics of a superradiant quantum phase transition with a single trapped ion. *Phys Rev A* 2017; 95: 063844.
- [52] Singh S, Gilhare K. Evolution of atomic entanglement for different cavity-field statistics in single-mode two-photon process. *J Exp Theor Phys* 2018; 127(3): 391-397.
- [53] Al Naim AF, Khan JY, Khalil EM, Abdel-Khalek S. Effect of Kerr medium and Stark Shift parameter on Wehrl entropy and the field purity for two-photon Jaynes-Cummings model under dispersive approximation. *J Russ Laser Res* 2019; 40(1): 20-29.
- [54] Fink JM, Baur M, Bianchetti K, Filipp S, Göppl M, Leek PJ, Steffen L, Blais A, Wallraff A. Thermal excitation of multi-photon dressed states in circuit quantum electrodynamics. *Physica Scripta* 2009; T137: 014013.
- [55] Zheng S.-B. Robust and high-speed entanglement engineering in cavity QED and ion trap with a single slightly detuned interaction. *J Phys B: At Mol Opt Phys* 2006; 39: 2505-2513.
- [56] Bashkirov EK. Dynamics of the collective spontaneous emission of two three-level atoms in a cavity. *Optics and Spectroscopy* 2006; 100(4): 613-616.
- [57] Pavelev AV, Semin VV. Investigation of non-markovian dynamics of two dipole-dipole interacting qubits based on numerical solution of the non-linear stochastic Schrödinger equation. *Computer Optics* 2019; 43(2): 168-173. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-168-173.

Author's information

Eugene Konstantinovich Bashkirov (b. 1955) is a professor of General and Theoretical Physics department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1978), Moscow State University (1985) and Saratov State University (2006). He is co-author of 300 scientific papers and 1 books. His current interests are coherent optics, quantum optics and quantum informatics, optical synergetics. E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru.

Received July 4, 2019. The final version – November 25, 2019.
