

# Оптические вихревые пучки с бесконечным числом винтовых дислокаций

А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

## Аннотация

При передаче данных с помощью вихревых лазерных пучков носителем информации может являться топологический заряд, теоретическое значение которого не ограничено. Однако, топологический заряд одного отдельного вихря (винтовой дислокации) ограничен возможностями его формирования. Поэтому в данной работе изучены три примера мульти-вихревых Гауссовых световых полей (два пучка структурно устойчивые и один пучок астигматический), у которых неограниченное (счётное) множество винтовых дислокаций одного знака. Как следствие, топологический заряд этих полей бесконечен. Первый пучок имеет амплитуду в виде Гауссовой функции, умноженной на косинус с вихревым аргументом в квадрате. У такого пучка центры сингулярности фазы лежат на обеих декартовых осях в плоскости перетяжки и «уплотняются» с увеличением расстояния от оптической оси. Распределение интенсивности у такого пучка имеет вид «четырёхконечной звезды». Все оптические вихри у такого пучка имеют одинаковый топологический заряд +1. Второй пучок, описывается также Гауссовой функцией, умноженной на косинус в произвольной степени, и также от вихревого аргумента. Этот пучок имеет счётное число оптических вихрей, которые эквидистантно расположены на одной декартовой оси в плоскости перетяжки и топологический заряд каждого из них равен степени, в которую возводится косинус. Интенсивность такого пучка имеет вид двух световых пятен, центры которых находятся на прямой, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры оптических вихрей. И третий пучок во многом похож на первый, но формируется с помощью наклонной цилиндрической линзы из косинусной одномерной решетки с квадратичным аргументом.

**Ключевые слова:** оптический вихрь, винтовая дислокация, топологический заряд, структурно устойчивый пучок, мультивихревой пучок, орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Ковалёв, А.А. Оптические вихревые пучки с бесконечным числом винтовых дислокаций / А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 4. – С. 497-505. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-866.

**Citation:** Kovalev AA. Optical vortex beams with an infinite number of screw dislocations. Computer Optics 2021; 45(4): 497-505. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-866.

## Введение

Топологический заряд (ТЗ) – одна из важнейших характеристик оптических вихрей [1, 2]. Для простых оптических вихрей (винтовых дислокаций), у которых имеется только один  $n$ -кратно вырожденный изолированный ноль интенсивности ( $n$  – целое число), ТЗ равен целому числу полных периодов изменения фазы (период равен  $2\pi$ ) при обходе вокруг нуля интенсивности по любой замкнутой траектории. Оптические вихри с одной центральной винтовой дислокацией могут иметь большие, но конечные ТЗ, например, 10010 [3]. Понятно, что если у светового поля имеется несколько винтовых дислокаций, связанных с несколькими нулями интенсивности, находящимися в разных точках пространства в сечении пучка, то ТЗ всего поля будет равен сумме ТЗ каждого отдельного оптического вихря. Расщепить оптический вихрь с одним нулем и одной винтовой дислокацией с ТЗ  $n$  на  $n$  отдельных оптических вихрей с единичным ТЗ можно простым до-

бавлением к оптическому вихрю Гауссова пучка или плоской волны с любой малой амплитудой [4]. В настоящее время известно множество способов получения мультисингулярных оптических вихрей [5]. На принципе расщепления единичного оптического вихря с ТЗ  $n$  на  $n$  простых оптических вихрей основано много методов измерения ТЗ [6–13]. В [6–8] для измерения ТЗ оптического вихря использовали дифракцию на треугольной апертуре. Для измерения ТЗ также использовались наклон сферической линзы [9], цилиндрическая линза [10], астигматическая фазовая маска [11], секторные полуволновые пластинки [12] и спиральная решётка с изменяющимся периодом [13]. Хотя новые варианты традиционных интерферометрических методов измерения ТЗ также используются в настоящее время [14–17].

Кроме отдельных симметричных оптических вихрей (например, мод Лагерра–Гаусса, пучков Бесселя–Гаусса) и оптических полей с многими сингулярностями, у которых определение ТЗ не представляет

трудностей, известны также световые поля с начальным дробным ТЗ [1] и суперпозиции оптических вихрей [18]. Определение ТЗ для таких полей составляет определённую трудность. Для расчёта ТЗ сложных оптических вихрей используют формулу Берри [1]. Световые поля с начальным дробным ТЗ при распространении в свободном пространстве приобретают целый ТЗ, который может изменяться по мере распространения [19–22]. Суперпозиция оптических вихрей [18] также может изменять ТЗ при распространении. У суперпозиции оптических вихрей может вообще быть неопределённый ТЗ. Например, у соосной суперпозиции двух разных бездифракционных пучков Бесселя, амплитуда которой описывается суммой двух разных функций Бесселя с номерами  $n$  и  $m$ , ТЗ будет равен то  $n$ , то  $m$  при изменении расстояния от оси пучка. Заметим для полноты картины, что ТЗ изменяется при распространении и у оптических вихрей, сформированных с помощью спиральных щелей в непрозрачном экране (спиралей Архимеда или Ферма) [23]. Формировать оптические вихри с управляемым топологическим зарядом можно с помощью микролазера [24], метаповерхности [25] и других компонент нанофотоники [5].

Из приведённого краткого обзора по определению, измерению и эволюции ТЗ оптических вихрей следует, что до сих пор рассматривались только оптические вихри с конечным ТЗ, хотя и большим [3]. Возникает вопрос: существуют ли оптические вихри, имеющие бесконечный ТЗ? Существуют ли точные решения параксиального уравнения Гельмгольца, описывающие световые поля с конечной энергией, конечным орбитальным угловым моментом (ОУМ), но с бесконечным ТЗ? Как экспериментально доказать, что ТЗ действительно бесконечный, если его нельзя измерить? В этой работе мы приведём два конкретных примера структурно устойчивых оптических вихрей с конечной энергией и бесконечным ТЗ. Приведём также аналитические выражения для их комплексной амплитуды, распределения интенсивности и нормированного ОУМ. Основной особенностью рассмотренных пучков является то, что почти всё счётное множество винтовых дислокаций находится там, где интенсивность света почти нулевая.

### 1. Косинусный оптический вихрь с квадратичным аргументом

В [26] показано, что любая функция вида

$$E_{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{qw_0}\right), \quad (1)$$

где  $(x, y, z)$  – декартовы координаты,  $w_0$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $q = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw_0^2/2$  – длина Рэлея,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число света с длиной волны  $\lambda$ ,  $f(x \pm iy)$  – произвольная целая аналити-

ческая функция, является решением параксиального уравнения Гельмгольца:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Формула (1) описывает структурно устойчивые световые поля, распределение интенсивности которых при распространении в пространстве сохраняется (с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси). Заметим, что понятие структурной устойчивости световых полей более общее и включает в себя поля (1) как частный случай. Общее понятие структурной устойчивости должно включать в себя и перечисление тех возмущений, к которым эти поля устойчивы. В случае (1) это поле устойчиво только при распространении в свободном пространстве. Известны и другие устойчивые световые поля, которые не описываются уравнением (1). Например, в [27] показано устойчивое распространение дробных вихрей (оптических вихрей с дробным топологическим зарядом) в векторных электромагнитных полях.

Рассмотрим далее конкретный пример пучка (1) с бесконечным топологическим зарядом. Рассмотрим структурно стабильный пучок, амплитуда которого описывается Гауссовой функцией, умноженной на функцию косинуса с вихревым аргументом в квадрате:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right). \quad (3)$$

Функция косинуса от аргумента в квадрате является целой аналитической функцией, так как раскладывается в ряд Тейлора, то есть имеет бесконечное число непрерывных производных. Также эта функция раскладывается в бесконечное произведение по своим корням. Во вращающихся декартовых координатах

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \zeta & \sin \zeta \\ -\sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/z_0^2}} \begin{pmatrix} x + yz/z_0 \\ y - xz/z_0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где угол поворота равен фазе Гау [18]:

$$\zeta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (5)$$

амплитуда пучка (3) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E(x', y', z) &= \frac{w_0}{w(z)} \cos\left[\frac{x' + iy'}{\alpha(z)}\right]^2 \times \\ &\times \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z)\right], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
 w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\
 \alpha(z) &= \alpha_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\
 R(z) &= z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Выполнив возведение в квадрат в аргументе косинуса в (6), получим:

$$\begin{aligned}
 E(x', y', z) &= \frac{w_0}{w(z)} \cos \left[ \frac{x'^2 - y'^2 + i2x'y'}{\alpha^2(z)} \right] \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z) \right].
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Из (8) видно, что аргумент косинуса будет действительной величиной либо при  $x'=0$ , либо при  $y'=0$ . Поэтому действительные нули функции косинуса будут располагаться на двух осях  $x'$  и  $y'$  и будут иметь следующие координаты:

$$\begin{cases}
 x' = \pm \alpha \sqrt{\pi/2 + \pi p}, & y' = 0, & p = 0, 1, 2, \dots, \\
 y' = \pm \alpha \sqrt{\pi/2 + \pi p}, & x' = 0, & p = 0, 1, 2, \dots
 \end{cases}
 \tag{9}$$

Из (9) видно, что изолированные нули поля (8) будут с ростом номера  $p$  «уплотняться», то есть расстояние между соседними нулями будет квадратично уменьшаться. Вокруг каждого такого нуля сформируется оптический вихрь  $(x' + iy')^2$  с ТЗ, равным +2. Всего нулей первого порядка (вихрей одного знака +1) будет счётное число, и поэтому ТЗ пучка (3) бесконечный. Заметим, что оптические вихри в (3), во-первых, будут сближаться, но никогда не сольются. Если  $n$  оптических вихрей с ТЗ +1 сблизить на какое угодно малое расстояние, то ТЗ этой совокупности оптических вихрей будет равен  $n$ . Во-вторых, для пучка (3) на любом конечном отрезке оси  $x$ , будет находиться конечное число оптических вихрей (9). То есть предельная точка последовательности вихрей будет на бесконечности.

Интенсивность пучка (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I(x', y', z) &= \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left( -2 \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} \right) \times \\
 &\times \left[ \cos \left( \frac{2(x'^2 - y'^2)}{\alpha^2} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{4x'y'}{\alpha^2} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Можно показать, что на распределении интенсивности (10) имеется только один максимум, расположенный в центре ( $x'=y'=0$ ). Но этот максимум имеет место только при определённом условии. Из (10) видно, что при больших расстояниях  $x' = \pm y' \rightarrow \pm \infty$  интенсивность пропорциональна Гауссовой функции:

$$I(x' = y' \rightarrow \infty, z) \sim \exp \left( -4x'^2 \left( \frac{1}{w^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right).
 \tag{11}$$

Поэтому поле (8) обладает конечной энергией и имеет один максимум в центре, только если  $w < \alpha$ . Найдём ОУМ и мощность пучка (8) по известным формулам [20]:

$$J_z = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy,
 \tag{12}$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) E(x, y) dx dy.
 \tag{13}$$

Подставив (3) в (12), (13), можно найти ОУМ и мощность пучка (8):

$$J_z = \left( \frac{\pi \alpha_0^2 w_0^6}{4} \right) \left[ (\alpha_0^4 - w_0^4)^{-3/2} - (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-3/2} \right],
 \tag{14}$$

$$W = \left( \frac{\pi \alpha_0^2 w_0^2}{4} \right) \left[ (\alpha_0^4 - w_0^4)^{-1/2} + (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-1/2} \right].
 \tag{15}$$

Из (14) и (15) видно, что при  $w_0 = \alpha_0$  ОУМ и мощность пучка (8) становятся бесконечными, а при  $w > \alpha$  они становятся мнимыми величинами. Нормированный ОУМ будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{W} = w_0^4 \frac{(\alpha_0^4 - w_0^4)^{-3/2} - (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-3/2}}{(\alpha_0^4 - w_0^4)^{-1/2} + (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-1/2}}.
 \tag{16}$$

Из (16) видно, что при  $\alpha_0 > w_0$  (условие конечности энергии пучка) ОУМ всегда положительный. Кроме того, существенные значения ОУМ может принимать при  $\alpha_0 \approx w_0$ , а при больших значениях  $\alpha_0 \gg w_0$  нормированный ОУМ пучка (8) стремится к нулю. Это и понятно, так как при  $\alpha_0 \gg w_0$  все нули интенсивности (все оптические вихри) находятся на периферии там, где интенсивность почти нулевая. А вид интенсивности (10) при этом описывается Гауссовой функцией с центром в начале координат. Таким образом, несмотря на то, что пучок (8) имеет бесконечный ТЗ и счётное число оптических вихрей, которые лежат на двух перпендикулярных прямых и уплотняются с ростом номера нуля, нормированный ОУМ такого пучка небольшой и стремится к нулю при  $\alpha_0 \gg w_0$ .

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (8) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения получены по формуле (8) для следующих параметров расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 0,5$  мм, масштабный множитель квадратичной косинусной огибающей  $\alpha_0 = 1,1w_0$ , расстояние распространения  $z = 1$  м, область расчёта  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 1,5$  мм (рис. 1а),  $R = 5$  мм (рис. 1б, в) и  $R = 3$  мм (рис. 1г).

На рис. 1 видно, что все оптические вихри располагаются на двух перпендикулярных прямых  $x$  и  $y$ , которые поворачиваются при распространении. Распределение интенсивности имеет вид квадрата с заострёнными углами (четырёхконечной звезды) и имеет один максимум в центре. Нули интенсивности рас-

полагаются на декартовых осях, и плотность этих нулей возрастает от центра к периферии. Так как все нули имеют порядок +2, общий ТЗ пучка (8) бесконечен. Расчёт нормированного ОУМ по распределению на рис. 1в,г и по формуле (16) даёт примерно одинаковые значения: 1,380 и 1,379.

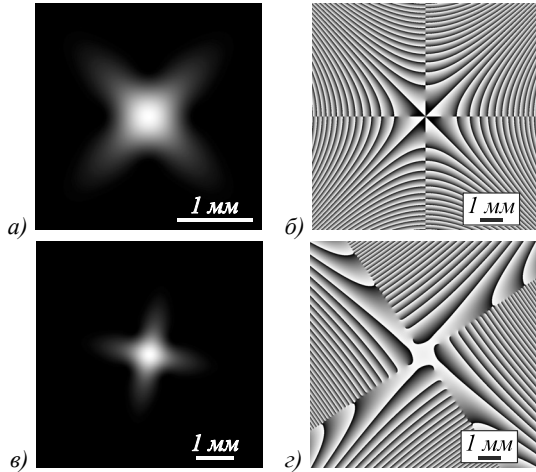


Рис. 1. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) пучка (8) в начальной плоскости (а, б) и после распространения в пространстве (в, г), вычисленные по формуле (8)

Если  $\alpha_0 = w_0(1 + \delta)$ , где  $\delta \ll 1$ , то нормированный ОУМ может принимать большие значения и, согласно (16), может быть приближённо вычислен по формуле

$$\frac{J_z}{W} \approx \frac{1}{4\delta}. \tag{17}$$

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (8) в начальной плоскости и после распространения в пространстве при тех же параметрах, что и на рис. 1, но при  $\alpha_0 = 1,01w_0$ . Из-за условия  $\alpha_0 \approx w_0$  интенсивность убывает вдоль прямых  $y = \pm x$  гораздо слабее, чем на рис. 1, и поэтому в поперечном сечении пучок имеет форму креста. Согласно (17), нормированный ОУМ должен быть равен примерно  $J_z/W \approx 25$ . Расчёт по распределениям на рис. 2 с помощью формул (12),(13) даёт значение 21,42.

**2. Косинусный оптический вихрь высокого порядка**

2.1. Распределение интенсивности

Рассмотрим еще один структурно стабильный пучок с бесконечным ТЗ, аналогичный пучку (6), но у которого, в отличие от (3), функция косинуса взята в некоторой степени:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos^m \left( \frac{x + iy}{\alpha_0 q} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2} \right). \tag{18}$$

Функция косинуса в целой степени является целой аналитической функцией, так как раскладывается в ряд Тейлора, то есть имеет непрерывные производные любого порядка. Также эта функция раскладывается в бесконечное произведение по своим корням.

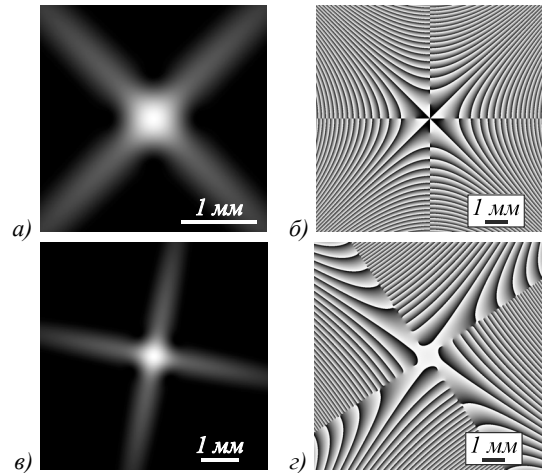


Рис. 2. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) пучка (8) в начальной плоскости (а, б) и после распространения в пространстве (в, г), вычисленные по формуле (8). Параметры расчёта те же, что и на рис. 1, но  $\alpha_0 = 1,01w_0$

Из (18) видно, что при  $y=0$  косинус становится действительной функцией, у которой нули расположены на горизонтальной оси в точках с координатами  $x_p = \alpha(\pi/2 + \pi p)$ , где  $p$  – целые числа. Вблизи этих изолированных нулей амплитуды, вместо косинуса, можно записать амплитуду вида  $(x - x_p + iy)^m$ . То есть вокруг нулей интенсивности сформируются оптические вихри с ТЗ  $m$ . Заметим, что для того, чтобы нули амплитуды (центры сингулярности фазы) были расположены на вертикальной оси, вместо аргумента косинуса  $x + iy$ , нужно выбрать аргумент  $ix - y$ . Во вращающейся системе координат (4) комплексная амплитуда (18) будет иметь вид:

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w(z)} \cos^m \left[ \frac{x' + iy'}{\alpha(z)} \right] \times \exp \left[ -\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z) \right]. \tag{19}$$

Интенсивность поля (19) будет иметь вид:

$$I(x', y', z) = 2^{-m} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left( -2 \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} \right) \times \left[ \cos \left( \frac{2x'}{\alpha} \right) + \text{ch} \left( \frac{2y'}{\alpha} \right) \right]^m. \tag{20}$$

У интенсивности (20) есть локальный максимум в начале координат  $(x', y') = (0, 0)$ , где интенсивность принимает значение  $I(0, 0, z) = 2^{-m}(w_0/w)^2$ . Два других основных локальных максимума будут лежать на прямой  $y' (x' = 0)$ . Действительно, из (20) видно, что интенсивность будет сначала возрастать как гиперболический косинус вдоль прямой  $y'$ . А потом убывать из-за спадающей Гауссовой экспоненты. Точку максимума можно найти из функции интенсивности (20) при  $x' = 0$ :

$$I(x' = 0, y' \gg 1, z) = 2^{-2m} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left( 2 \frac{my'}{\alpha} - 2 \frac{y'^2}{w^2} \right). \tag{21}$$

Беря производную от интенсивности (21) по  $y'$  и приравнявая её нулю, найдём координаты максимума (другой максимум будет расположен симметрично при отрицательных значениях  $y'$ ):  $y'_{\max} = mw^2 / (2\alpha)$ . Из этого выражения видно, что с ростом номера  $m$  будет расти расстояние между максимумами интенсивности на оси  $y'$ . Величина максимумов интенсивности будет равна:

$$I_{\max}(x' = 0, y'_{\max}, z) = 2^{-2m} \frac{w_0^2}{w^2} \exp\left(\frac{m^2 w^2}{2\alpha^2}\right). \quad (22)$$

Из (22) видно, что с ростом  $m$  максимальное значение интенсивности экспоненциально возрастает. Таким образом, оптический вихрь (18) имеет распределение интенсивности, в основном состоящее из двух световых круглых пятен, центры которых лежат на прямой, перпендикулярной прямой, на которой лежит счётное число нулей интенсивности (центров сингулярности фазы). Вокруг каждого такого центра формируется оптический вихрь с топологическим зарядом  $m$ . При распространении в пространстве пучок расширяется и вращается. На расстоянии Рэлея пучок повернётся на 45 градусов, а в дальней зоне – на 90 градусов.

2.2. ОУМ-спектр и нормированный ОУМ

Представим поле (18) в начальной плоскости в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  и разложим его в ряд по угловым гармоникам:

$$E(r, \varphi, 0) = \cos^m\left(\frac{re^{i\varphi}}{\alpha_0}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(r) \exp(in\varphi). \quad (23)$$

Амплитуда каждой угловой гармоники находится следующим образом:

$$E_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi, 0) \exp(-in\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m\left(\frac{re^{i\varphi}}{\alpha_0}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} - in\varphi\right) d\varphi. \quad (24)$$

Разложив функцию  $f(x) = \cos^m \xi$  в ряд Тейлора:

$$\cos^m \xi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{2^m p!} \left[ \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s - m)^p \right] \xi^p, \quad (25)$$

амплитуда угловой гармоники (24) может быть переписана в следующем виде:

$$E_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{2^m p!} \left[ \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s - m)^p \right] \times \left(\frac{r}{\alpha_0}\right)^p \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} + ip\varphi - in\varphi\right) d\varphi. \quad (26)$$

Вычисляя интеграл по  $\varphi$ , получаем, что амплитуды угловых гармоник отрицательных порядков тождественно равны нулю, а для порядков  $n \geq 0$  они равны

$$E_n(r) = \frac{i^n}{2^m n!} \left[ \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s - m)^n \right] \times \left(\frac{r}{\alpha_0}\right)^n \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right). \quad (27)$$

Можно показать, что при нечётных  $n$  угловые гармоники (27) также тождественно равны нулю. При чётных же  $n$  угловые гармоники (27) представляют собой моды Лагерра–Гаусса порядка  $(0, n)$  в начальной плоскости.

Итак, световое поле (18) является суперпозицией бесконечного числа однокольцевых (то есть с нулевым радиальным индексом) мод Лагерра–Гаусса с чётными неотрицательными топологическими зарядами.

Энергия каждой моды находится по формуле:

$$W_n = 2\pi \int_0^{\infty} |E_n(r)|^2 r dr = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1} n!} \left[ \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s - m)^n \right]^2 \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2}\right)^n. \quad (28)$$

Энергия всего пучка (18) находится как сумма энергий всех мод:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s - m)^n \right]^2 \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2}\right)^n. \quad (29)$$

Бесконечная сумма по  $n$  является рядом Тейлора экспоненциальной функции, поэтому (29) можно записать следующим образом:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1}} \sum_{s_1=0}^m \sum_{s_2=0}^m \binom{m}{s_1} \binom{m}{s_2} \times \exp\left[\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} (2s_1 - m)(2s_2 - m)\right]. \quad (30)$$

Вычисляя сумму по  $s_2$ , получим:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \exp\left[-m \frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} (2s - m)\right] \times \left\{ 1 + \exp\left[\frac{w_0^2}{\alpha_0^2} (2s - m)\right] \right\}^m = \frac{\pi w_0^2}{2^{m+1}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \text{ch}^m \xi_s, \quad (31)$$

где  $\xi_s = (w_0 / \alpha_0)^2 (s - m / 2)$ .

Аналогично через гиперболические функции представляется и орбитальный угловой момент:

$$J_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n W_n = m \frac{\pi w_0^2}{2^{m+1}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \xi_s \operatorname{ch}^m \xi_s \operatorname{th} \xi_s. \quad (32)$$

Орбитальный угловой момент, нормированный на мощность, равен:

$$\frac{J_z}{W} = m \frac{\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \xi_s \operatorname{ch}^m \xi_s \operatorname{th} \xi_s}{\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \operatorname{ch}^m \xi_s}. \quad (33)$$

Из этого выражения получаются простые формулы для нормированного ОУМ при небольших порядках  $m$ . Так, при  $m=1$  ОУМ равен  $J_z/W = \xi \operatorname{th} \xi$ , где  $\xi = (w_0/\alpha_0)^2/2$ , а при  $m=2$  ОУМ равен  $J_z/W = \xi \operatorname{sh}(2\xi)/[1 + \operatorname{ch}^2(\xi)]$ , где  $\xi = (w_0/\alpha_0)^2$ .

Из (33) следует, что при большом периоде нулей функции косинуса в (18), когда  $\alpha_0 \gg w_0$ , ОУМ пучка (18) стремится к нулю пропорционально  $J_z/W \sim (w_0/\alpha_0)^4$ . Если, наоборот,  $\alpha_0 \ll w_0$ , то из (33) для произвольного порядка  $m$  следует простая приближённая формула для расчёта нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{m^2 w_0^2}{2 \alpha_0^2}. \quad (34)$$

Квадратичную зависимость ОУМ от порядка  $m$  можно объяснить следующим образом. Выше из распределения интенсивности (20) получены координаты двух главных максимумов интенсивности:  $x'_{\max} = 0$  и  $y'_{\max} = \pm m w^2/(2\alpha)$ , то есть расстояние от максимума светового пятна до центра прямо пропорционально  $m$ . Кроме того, согласно распределению интенсивности (19) период косинуса уменьшается также пропорционально  $m$ , то есть пропорционально  $m$  увеличивается и градиент фазы в окрестности максимума. В итоге, микрочастица, оказавшись в поле (18)  $m$ -го порядка, втягивается в световое пятно, расположенное в  $m$  раз дальше от центра, и азимутальная составляющая силы (вектора Пойнтинга), действующей на частицу, также возрастает в  $m$  раз. Возрастание в  $m$  раз и силы, и плеча приводит к возрастанию момента в  $m^2$  раз.

### 2.3. Численное моделирование

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (18) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения получены по формуле (18) для следующих параметров расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 0,5$  мм, масштабный множитель косинусной функции  $\alpha_0 = w_0/4$ , показатель степени косинусной функции  $m = 3$ , расстояние распространения  $z = 1$  м, область расчёта  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 5$  мм.

На рис. 3 видно, что все оптические вихри располагаются эквидистантно на одной прямой (горизонтальной в начальной плоскости), которая поворачивается при распространении, и эти вихри третьего порядка ( $m = 3$ ). Распределение интенсивности имеет

вид двух световых пятен, центры которых лежат на оси, перпендикулярной оси, на которой лежат нули интенсивности (центры фазовых сингулярностей). Так как все нули имеют порядок  $+3$ , общий ТЗ пучка (18) бесконечен. Согласно (34), нормированный ОУМ при выбранных параметрах должен быть равен  $J_z/W = 8m^2 = 72$ . Численный расчёт по распределению интенсивности и фазы с рис. 3а, б с помощью формул (12), (13) даёт значение 71,758.

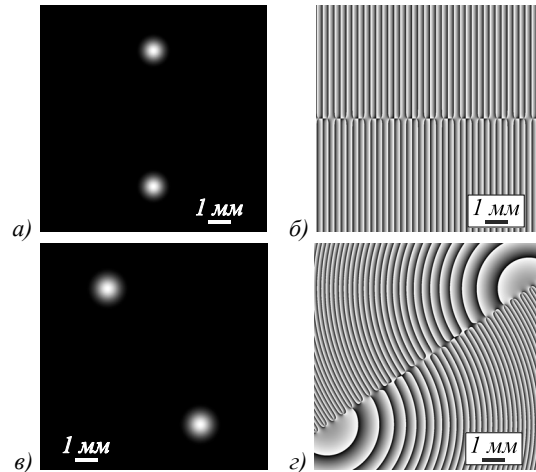


Рис. 3. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) пучка (18) в начальной плоскости (а, б) и после распространения в пространстве (в, г), вычисленные по формуле (18)

На рис. 4 показан ОУМ-спектр пучка с рис. 3. Из рис. 4 видно, что при выбранных параметрах он состоит из однокольцевых мод Лагерра–Гаусса чётных порядков, заметную энергию из которых имеют моды порядков от 50 до 100, а наибольшую энергию имеет мода 72-го порядка, то есть как раз порядка, равного нормированному ОУМ. Численный расчёт показал, что, аналогично, при  $m = 2$  наибольшую энергию имеет мода 32-го порядка ( $J_z/W = 8m^2 = 32$ ), а при  $m = 1$  – 8-го порядка ( $J_z/W = 8m^2 = 8$ ).

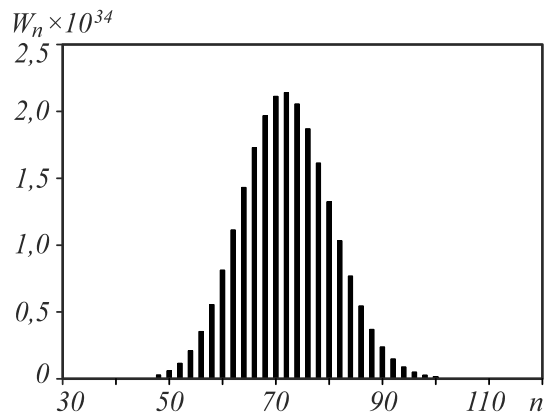


Рис. 4. ОУМ-спектр пучка, показанного на рис. 3 ( $m = 3$ )

То, что у пучка с широким ОУМ-спектром нормированный орбитальный угловой момент примерно равен ОУМ центральной угловой гармоники, следует из симметричности картины на рис. 4.

### 3. Астигматический косинусный вихрь с квадратичным аргументом

Рассмотрим комплексную амплитуду света, описывающую одномерную горизонтальную решётку с косинусным пропусканием и с квадратичным аргументом, внедрённую в перетяжку Гауссова пучка, в которой также размещена цилиндрическая линза, повернутая на 45 градусов к декартовым координатам:

$$E_1(x, y) = \cos\left(\alpha \frac{x^2}{w_0^2}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \exp\left[-\frac{ik}{4f}(x + y)^2\right], \quad (35)$$

где  $(x, y)$  – декартовы координаты,  $w_0$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $\alpha$  – безразмерный параметр, определяющий масштаб косинусной модуляции,  $f$  – фокусное расстояние цилиндрической линзы. После прохождения пучка (35) через параксиальную ABCD-систему комплексная амплитуда примет вид:

$$E_2(u, v) = \frac{-ik}{2\pi B} \exp\left[\frac{ikD}{2B}(u^2 + v^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x, y) \times \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A(x^2 + y^2) - 2(ux + vy)]\right\} dx dy, \quad (36)$$

где  $(u, v)$  – декартовы координаты в выходной плоскости. Подставим (35) в (36) и получим:

$$E_2(u, v) = \frac{-ik}{2\pi B} \exp\left[\frac{ikD}{2B}(u^2 + v^2)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\alpha \frac{x^2}{w_0^2}\right) \times \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} - \frac{ik}{4f}(x + y)^2\right\} \times \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A(x^2 + y^2) - 2(ux + vy)]\right\} dx dy. \quad (37)$$

Пусть далее  $A=D=1, C=0, B=2f$  (при этих значениях выражение (37) описывает поле на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы),  $q=2if/z_0, \gamma=z_0/(2f), s=1+\gamma^2+i\alpha$ . Тогда после вычисления Гауссовых интегралов в (37) получим окончательно:

$$E_2(u, v) = \frac{-i\gamma}{\sqrt{|s|}} \exp\left\{\frac{ik}{4f}(u^2 + v^2)\right\} \times \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} [(1 + \alpha^2 + \gamma^2)v^2]\right\} \times \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} [(1 + \gamma^2)u^2 - 2i\gamma(1 + \gamma^2)uv]\right\} \times \cos\left\{\frac{\gamma^2 \alpha}{w_0^2 |s|^2} (u^2 - \gamma^2 v^2 - 2i\gamma uv) - \frac{1}{2} \arg s\right\}. \quad (38)$$

Комплексная амплитуда (38) описывает пучок с начальной амплитудой (35) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы ( $z=2f$ ). Из (38) следует, что поле имеет изолированные нули на обеих декартовых осях, и что эти нули «сгущаются» при удалении от начала координат. Координаты этих нулей на декартовых осях находятся из уравнений:

$$1) u = 0, v_p = \pm (\gamma Q)^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arg s}{2} + \pi p\right), \quad (39)$$

$$2) v = 0, u_p = \pm (Q)^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\arg s}{2} + \pi p\right),$$

где  $p=0, 1, 2, \dots$  и  $Q^2 = (\alpha\gamma^2)/(w_0|s|)^2$ . Из (38) также видно, что вокруг изолированных нулей (39) сформируются эллиптические оптические вихри  $(u - i\gamma v)^2$  с топологическим зарядом  $-2$ .

Интенсивность пучка (35) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы будет равна:

$$I(u, v) = \frac{\gamma^2}{|s|} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} (1 + \alpha^2 + \gamma^2)v^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} (1 + \gamma^2)u^2\right\} \times \left[\cos^2\left\{Q^2(u^2 - \gamma^2 v^2) - \frac{1}{2} \arg s\right\} + \text{sh}^2(2Q^2\gamma uv)\right]. \quad (40)$$

Из (40) видно, что интенсивность будет иметь вид вытянутой вдоль оси  $u$  прямоугольника с центром в начале координат, у которого из углов выходят световые лучи под углом  $\beta$ , тангенс которого равен:

$$\text{tg } \beta = \frac{1 + \gamma^2}{1 + \gamma^2 + \alpha^2}. \quad (41)$$

Найдём ОУМ пучка (35). Для этого подставим (35) в (12) и (13), получим:

$$J_z = \left(\frac{\pi k w_0^4}{32 f}\right) \left[\frac{\text{Re}(1 + i\alpha)^{1/2}}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} - \frac{\text{Re}(1 + i\alpha)^{3/2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}}\right], \quad (42)$$

$$W = \frac{\pi w_0^2}{4} \left[1 + \frac{\text{Re}(1 + i\alpha)^{1/2}}{(1 + \alpha^2)^{1/2}}\right]. \quad (43)$$

Из (42) и (43) найдём ОУМ пучка (35), нормированный на его мощность:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{\gamma}{2}\right) \left[\frac{(1 + \alpha^2)\text{Re}(1 + i\alpha)^{1/2} - \text{Re}(1 + i\alpha)^{3/2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2} + (1 + \alpha^2)\text{Re}(1 + i\alpha)^{1/2}}\right], \quad (44)$$

где  $\text{Re}$  – вещественная часть числа. Из (44) следует, что при большом квазипериоде косинуса в (35), когда  $\alpha \rightarrow 0$ , ОУМ пучка (35) стремится к нулю, как  $J_z/W \sim \alpha^2$ . И наоборот, при малом квазипериоде коси-

нуса в (35), когда  $\alpha \rightarrow \infty$ , ОУМ также стремится к нулю, как  $J_2/W \sim \alpha^{-1/2}$ . Казалось бы, что при малом квази-периоде косинуса в сечении Гауссова пучка будет попадать много оптических вихрей, которые должны дать большой вклад в ОУМ. Но в начальной плоскости у пучка (35) нет оптических вихрей и ТЗ равен нулю. При определённом значении  $\alpha$  ОУМ (44) будет иметь небольшой положительный максимум.

На рис. 5 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (35), (38) в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы. Распределения в начальной плоскости (рис. 5а, б) вычислены по формуле (35), а на расстоянии от неё – по формуле (38) (рис. 5в, г) и сравнивались с результатом численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки с использованием быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 1$  мм, масштабный множитель косинуса  $\alpha = \pi$ , фокусное расстояние  $f = 1$  м, область расчёта  $-R \leq x, y \leq R$ , где  $R = 1,5$  мм (рис. 5а, б) и  $R = 5$  мм (рис. 5в, г).

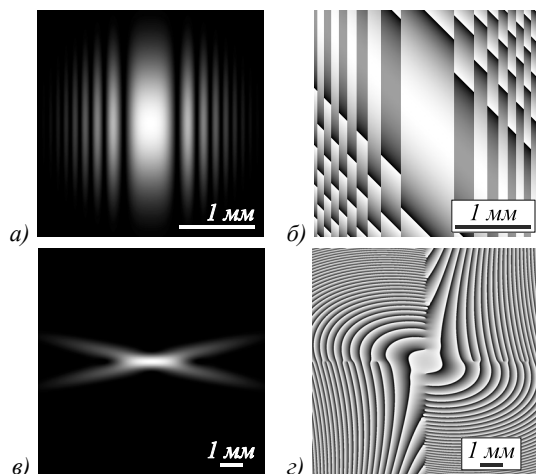


Рис. 5. Распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости (а, б) вычислены по формуле (35), а на расстоянии от неё – по формуле (38) (в, г)

### Заключение

В работе рассмотрены три примера мульти-вихревых Гауссовых световых полей, у которых счётное число фазовых сингулярностей (винтовых дислокаций) и поэтому бесконечный топологический заряд. Первый пучок имеет амплитуду в виде Гауссовой функции, умноженной на косинус с вихревым аргументом в квадрате. У такого пучка центры сингулярности фазы лежат на декартовых осях в плоскости перетяжки и «уплотняются» с увеличением расстояния от оптической оси. Распределение интенсивности у такого пучка имеет вид «четырёхконечной звезды». Все оптические вихри у такого пучка имеют одинаковый единичный топологический заряд. Второй пучок описывается также Гауссовой функцией, умноженной

на косинус в произвольной степени, и также от вихревого аргумента. Этот пучок имеет счётное число оптических вихрей, которые эквидистантно расположены на одной декартовой оси в плоскости перетяжки, и топологический заряд каждого из них равен степени, в которую возводится косинус. Интенсивность такого пучка имеет вид двух световых пятен, центры которых находятся на прямой, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры оптических вихрей. И третий пучок во многом похож на первый, но формируется с помощью наклонной цилиндрической линзы из косинусной одномерной решётки с квадратичным аргументом. Для всех трёх пучков получены точные замкнутые аналитические выражения для мощности и орбитального углового момента. На их основе получены приближённые простые формулы для орбитального углового момента при малой и большой линейной плотности оптических вихрей.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Косинусный оптический вихрь с квадратичным аргументом», Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Косинусный оптический вихрь высокого порядка», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Астигматический косинусный вихрь с квадратичным аргументом».

### Литература

1. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268.
2. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // *Proceedings of the Royal Society A*. – 1974. – Vol. 336, Issue 1605. – P. 165-190.
3. **Fickler, R.** Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10010 / R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P.K. Lam, A. Zeilinger // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. – 2016. – Vol. 113, Issue 48. – P. 13642-13647.
4. **Basisty, I.V.** Optics of light beams with screw dislocations / I.V. Basisty, V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Optics Communications*. – 1993. – Vol. 103. – P. 422-428.
5. **Shen, Y.** Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities / Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – 90.
6. **Hickmann, J.M.** Unveiling a truncated optical lattice associated with triangular aperture using light's orbital angular momentum / J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W.C. Soares, S. Chávez-Cerda // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105. – 053904.
7. **De Araujo, L.E.E.** Measuring vortex charge with a triangular aperture / L.E.E. de Araujo, M.E. Anderson // *Optics Letters*. – 2011. – Vol. 36. – P. 787-789.



8. **Melo, L.A.** Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture / L.A. Melo, A.J. Jesus-Silva, S. Chávez-Cerda, P.H.S. Ribeiro, W.C. Soares // *Scientific Reports*. – 2018. – Vol. 8. – P. 6370.
9. **Vaity, P.** Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens / P. Vaity, J. Banerji, R.P. Singh // *Physics Letters A*. – 2013. – Vol. 377. – P. 1154-1156.
10. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
11. **Shen, D.** Measuring the topological charge of optical vortices with a twisting phase / D. Shen, D. Zhao // *Optics Letters*. – 2019. – Vol. 44, Issue 9. – P. 2334-2337.
12. **Liu, G.** Measurement of the topological charge and index of vortex vector optical fields with a space-variant half-wave plate / G. Liu, K. Wang, Y. Lee, D. Wang, P. Li, F. Gou, Y. Li, C. Tu, S. Wu, H. Wang // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43. – P. 823-826.
13. **Li, Y.** Measuring the topological charge of vortex beams with gradually changing-period spiral spoke grating / Y. Li, Y. Han, Z. Cui // *IEEE Photonics Technology Letters*. – 2020. – Vol. 32, Issue 2. – P. 101-104.
14. **Lan, B.** The topological charge measurement of the vortex beam based on dislocation self-reference interferometry / B. Lan, C. Liu, D. Rui, M. Chen, F. Shen, H. Xian // *Physica Scripta*. – 2019. – Vol. 94. – 055502.
15. **Kodatskii, B.** Comparative study of reference wave lacking measurement of topological charge of the incoming optical vortex / B. Kodatskii, A. Sevryugin, E. Shalimov, I. Tursunov, V. Venediktov // *Proceedings of SPIE*. – 2019. – Vol. 11153. – 111530G.
16. **Kovalev, A.A.** Orbital angular momentum and topological charge of a multi-vortex Gaussian beam / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2020. – Vol. 37, Issue 11. – P. 1740-1747. – DOI: 10.1364/JOSAA.401561.
17. **Fu, S.** Universal orbital angular momentum spectrum analyzer for beams / S. Fu, Y. Zhai, J. Zhang, X. Liu, R. Song, H. Zhou, C. Gao // *Photonix*. – 2020. – Vol. 1. – 19.
18. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vasnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56, Issue 5. – P. 4064-4075.
19. **Jesus-Silva, A.J.** Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone / A.J. Jesus-Silva, E.J.S. Fonseca, J.M. Hickman // *Optics Letters*. – 2012. – Vol. 37, Issue 12. – P. 4552-4554.
20. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28, Issue 6. – P. 8266-8281. – DOI: 10.1364/OE.386401.
21. **Zeng, J.** Anomalous multi-ramp fractional vortex beams with arbitrary topological charge jumps / J. Zeng, H. Zhang, Z. Xu, C. Zhao, Y. Cai, G. Gbur // *Applied Physics Letters*. – 2020. – Vol. 117. – 241103.
22. **Kotlyar, V.V.** Evolution of an optical vortex with an initial fractional topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2020. – Vol. 102, Issue 2. – 023516. – DOI: 10.1103/PhysRevA.102.023516.
23. **Wang, H.** Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit / H. Wang, L. Liu, C. Zhou, J. Xu, M. Zhang, S. Teng, Y. Cai // *Nanophotonics*. – 2019. – Vol. 8, Issue 2. – P. 317-324.
24. **Zhang, Z.** Tunable topological charge vortex microlaser / Z. Zhang, X. Qiao, B. Midya, K. Liu, J. Sun, T. Wu, W. Liu, R. Agarwal, J.M. Jornet, S. Longhi, N.M. Litchinitser, L. Feng // *Science*. – 2020. – Vol. 368. – P. 760-763.
25. **Zhang, K.** A review of orbital angular momentum vortex beams generation: from traditional methods to metasurfaces / K. Zhang, Y. Wang, Y. Yuan, S.N. Burokur // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10. – 1015.
26. **Abramochkin, E.G.** Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1996. – Vol. 125. – P. 302-323.
27. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 96. – 063807.

#### Сведения об авторе

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 22 января 2021 г. Окончательный вариант – 9 марта 2021 г.

---

# Optical vortices with an infinite number of screw dislocations

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,*

<sup>2</sup>*Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

## Abstract

In optical data transmission with using vortex laser beams, data can be encoded by the topological charge, which is theoretically unlimited. However, the topological charge of a single separate vortex (screw dislocation) is limited by possibilities of its generating. Therefore, we investigate here three examples of multivortex Gaussian light fields (two beams are form-invariant and one beam is astigmatic) with an unbounded (countable) set of screw dislocations. As a result, such fields have an infinite topological charge. The first beam has the complex amplitude of the Gaussian beam, but multiplied by the cosine function with a squared vortex argument. Phase singularity points of such a beam reside in the waist plane on the Cartesian axes and their density grows with increasing distance from the optical axis. The transverse intensity distribution of such a beam has a shape of a four-pointed star. All the optical vortices in this beam has the same topological charge of +1. The second beam also has the complex amplitude of the Gaussian beam, multiplied by the vortex-argument cosine function, but the cosine is raised to an arbitrary power. This beam has a countable number of the optical vortices, which reside in the waist plane uniformly on one Cartesian axis and the topological charge of each vortex equals to power, to which the cosine function is raised. The transverse intensity distribution of such beam consists of two light spots residing on a straight line, orthogonal to a straight line with the optical vortices. Finally, the third beam is similar to the first one in many properties, but it is generated with a tilted cylindrical lens from a 1D parabolic-argument cosine grating.

**Keywords:** optical vortex, screw dislocation, topological charge, form-invariant beam, multivortex beam, orbital angular momentum.

**Citation:** Kovalev AA. Optical vortex beams with an infinite number of screw dislocations. *Computer Optics* 2021; 45(4): 497-505. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-866.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under project No. 18-29-20003 (Section "Cosine optical vortex with a parabolic argument"), the Russian Science Foundation under project No. 18-19-00595 (Section "Higher-order cosine optical vortex"), and the RF Ministry of Science and Higher Education under the government project of FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Section "Astigmatic cosine optical vortex with a parabolic argument").

## References

- [1] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A-Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268.
  - [2] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proc Math Phys Eng Sci* 1974; 336(1605): 165-190.
  - [3] Fickler R, Campbell G, Buchler B, Lam PK, Zeilinger A. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10010. *Proc Nation Acad Sciences USA* 2016; 113(48): 13642-13647.
  - [4] Basisty IV, Bazhenov VYu, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optics of light beams with screw dislocations. *Opt Commun* 1993; 103: 422-428.
  - [5] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 2019; 8: 90.
  - [6] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chávez-Cerda S. Unveiling a truncated optical lattice associated with triangular aperture using light's orbital angular momentum. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 053904.
  - [7] De Araujo LEE, Anderson ME. Measuring vortex charge with a triangular aperture. *Opt Lett* 2011; 36: 787-789.
  - [8] Melo LA, Jesus-Silva AJ, Chávez-Cerda S, Ribeiro PHS, Soares WC. Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture. *Sci Rep* 2018; 8: 6370.
  - [9] Vaity P, Banerji J, Singh RP. Measuring the topological charge of an optical vortex by using a titled convex lens. *Phys Lett A* 2013; 377: 1154-1156.
  - [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
  - [11] Shen D, Zhao D. Measuring the topological charge of optical vortices with a twisting phase. *Opt Lett* 2019; 44(9): 2334-2337.
  - [12] Liu G, Wang K, Lee Y, Wang D, Li P, Gou F, Li Y, Tu C, Wu S, Wang H. Measurement of the topological charge and index of vortex vector optical fields with a space-variant half-wave plate. *Opt Lett* 2018; 43: 823-826.
  - [13] Li Y, Han Y, Cui Z. Measuring the topological charge of vortex beams with gradually changing-period spiral spoke grating. *IEEE Photon Technol Lett* 2020; 32(2): 101-104.
  - [14] Lan B, Liu C, Rui D, Chen M, Shen F, Xian H. The topological charge measurement of the vortex beam based on
-

- 
- dislocation self-reference interferometry. *Phys Scr* 2019; 94: 055502.
- [15] Kodatskii B, Sevryugin A, Shalimov E, Tursunov I, Venediktov V. Comparative study of reference wave lacking measurement of topological charge of the incoming optical vortex. *Proc SPIE* 2019; 11153: 111530G.
- [16] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Orbital angular momentum and topological charge of a multi-vortex Gaussian beam. *J Opt Soc Am A* 2020; 37(11): 1740-1747. DOI: 10.1364/JOSAA.401561.
- [17] Fu S, Zhai Y, Zhang J, Liu X, Song R, Zhou H, Gao C. Universal orbital angular momentum spectrum analyzer for beams. *PhotonIX* 2020; 1: 19.
- [18] Soskin MS, Gorshkov VN, Vasnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. *Phys Rev A* 1997; 56(5): 4064-4075.
- [19] Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS, Hickman JM. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone. *Opt Lett* 2012; 37(12): 4552-4554.
- [20] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt Express*. 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
- [21] Zeng J, Zhang H, Xu Z, Zhao C, Cai Y, Gbur G. Anomalous multi-ramp fractional vortex beams with arbitrary topological charge jumps. *Appl Phys Lett* 2020; 117: 241103.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Porfirev AP. Evolution of an optical vortex with an initial fractional topological charge. *Phys Rev A* 2020; 102(2): 023516. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.023516.
- [23] Wang H, Liu L, Zhou C, Xu J, Zhang M, Teng S, Cai Y. Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit. *Nanophotonics* 2019; 8(2): 317-324.
- [24] Zhang Z, Qiao X, Midya B, Liu K, Sun J, Wu T, Liu W, Agarwal R, Jornet JM, Longhi S, Litchinitser NM, Feng L. Tunable topological charge vortex microlaser. *Science* 2020; 368: 760-763.
- [25] Zhang K, Wang Y, Yuan Y, Burokur SN. A Review of orbital angular momentum vortex beams generation: from traditional methods to metasurfaces. *Appl Sci* 2020; 10: 1015.
- [26] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt Commun* 1996; 125: 302-323.
- [27] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 96: 063807.
- 

#### *Author's information*

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

---

*Received January 22, 2021. The final version – March 9, 2021.*

---