

## Смещённые эллиптические Гауссовы пучки с внутренним орбитальным угловым моментом

А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, Д.С. Калинкина<sup>2</sup>, А.Г. Налимов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Рассмотрены параксиальные световые пучки, составленные из Гауссовых пучков, смещённых с оптической оси, фаза которых подобрана специальным образом, чтобы суперпозиция была инвариантной к распространению в пространстве, то есть без изменения формы поперечного сечения. Путём решения системы пяти нелинейных уравнений составлена суперпозиция в виде инвариантного внеосевого эллиптического Гауссова пучка. Получено выражение для орбитального углового момента такого пучка. Показано, что он складывается из двух составляющих. Первая из них равна моменту относительно центра пучка и возрастает с его эллиптичностью. Вторая квадратично зависит от расстояния от центра масс до оптической оси (аналог теоремы Штейнера). Показано, что ориентация эллипса в поперечной плоскости не влияет на нормированный орбитальный угловой момент.

**Ключевые слова:** световой пучок с неоднородной эллиптической поляризацией, топологический заряд, внутренний орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Ковалёв, А.А. Смещённые эллиптические Гауссовы пучки с внутренним орбитальным угловым моментом / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, Д.С. Калинкина, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 6. – С. 809-817. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-916.

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV, Kalinkina DS, Nalimov AG. Off-axis elliptic Gaussian beams with an intrinsic orbital angular momentum. Computer Optics 2021; 45(6): 809-817. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-916.

### Введение

При изучении световых полей особое место занимают поля, инвариантные к распространению в пространстве. Среди непараксиальных полей это, в первую очередь, плоские волны, пучки Бесселя [1], Матье [2] и параболические пучки [3]. Среди параксиальных полей это пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса [4], Гауссовы пучки с произвольно расположенными оптическими вихрями [5], а также некоторые их суперпозиции [6, 7]. В [8] описана общая процедура расчёта параксиальных инвариантных к распространению полей с поперечным распределением интенсивности в форме произвольной замкнутой кривой.

В ряде задач, однако, некоторые преимущества получаются при использовании световых пучков с эллиптическим сечением. Например, как показано в [9], при передаче данных через турбулентную атмосферу использование эллиптических вихревых пучков позволяет уменьшить индекс сцинтилляции [10]. В [11] вихревым пучкам с дробным топологическим зарядом придаётся эллиптичность для увеличения производительности и информационной безопасности передачи данных. В [12] исследуются частично-когерентные четырёхлепестковые эллиптические Гауссовы пучки в турбулентной атмосфере. Показано, что эллиптичность позволяет менять число лепестков при распространении. В оптической манипуляции мик-

рообъектами вытянутое распределение интенсивности удобно для удерживания частицы вдоль одной координаты [13]. В [14, 15, 16] эллиптические Гауссовы пучки используются для увеличения производительности записи термохимических лазерно-индуцированных периодических поверхностных структур.

Интерес к эллиптическим пучкам побуждает к их аналитическим исследованиям. Параксиальное распространение светового пучка описывается интегральным преобразованием Френеля [17], ядро которого имеет вид экспоненты с квадратичным показателем, поэтому возможно аналитическое описание Гауссова пучка с произвольной эллиптичностью, углом наклона, положением центра, параболической кривизной волнового фронта. Такое описание есть в работе [18]. Однако свойством инвариантности такие пучки не обладают и при распространении в пространстве форма их поперечного сечения меняется. В нашей работе [19] были рассмотрены инвариантные эллиптические Гауссовы пучки с оптическим вихрем в центре и был установлен их орбитальный угловой момент. При распространении в пространстве такие пучки поворачиваются вокруг своего центра.

В данной работе мы рассматриваем параксиальные инвариантные к распространению эллиптические Гауссовы пучки (правда, пока без вихрей), аналогичные [19], но положение центра эллипса и его наклон к координатным осям может быть произвольным. Для

этого мы составили непрерывную суперпозицию элементарных спиральных световых пучков [8] на плоскости и, решив нелинейную систему пяти уравнений для определения весовых коэффициентов этой суперпозиции, получили аналитическое выражение для распределения комплексной амплитуды. Также получена формула для орбитального углового момента таких пучков. Подобно теореме Штейнера в механике, он состоит из двух слагаемых. Одно из них (совпадает с выражением (4) в [20]) равно моменту относительно центра пучка и возрастает с его эллиптичностью. Второе слагаемое квадратично зависит от расстояния от центра масс до оптической оси. Оказалось, что ориентация эллипса в поперечной плоскости (угол наклона к координатным осям) на нормированный орбитальный угловой момент не влияет.

**1. Инвариантные к распространению внеосевые Гауссовы пучки**

В [8] (формула (6.1)) показано, что любая функция вида

$$E_{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{qw_0}\right), \quad (1)$$

где  $(x, y, z)$  – декартовы координаты,  $w_0$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $q = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = kw_0^2/2$  – расстояние Рэлея,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число света с

длиной волны  $\lambda$ ,  $f(x \pm iy)$  – произвольная целая аналитическая функция, является решением параксиального стационарного уравнения Гельмгольца (уравнения типа Шрёдингера):

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

и описывает световое поле, инвариантное к распространению в свободном пространстве, то есть форма поперечного сечения не меняется, а только увеличивается в масштабе и поворачивается.

Широкий выбор функций  $f(\cdot)$  позволяет описывать оптические поля с самыми разными физическими свойствами. Например, если взять косинус:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right), \quad (3)$$

где  $\alpha_0$  – комплексный параметр, то получается косинусный вихревой пучок с распределением интенсивности в виде двух пятен (рис. 1а,в) и с бесконечным ТЗ, поскольку пучок содержит бесконечное число оптических вихрей (рис. 1б,г).

Если же вместо косинуса взять экспоненту, то есть рассмотреть пучок вида

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right), \quad (4)$$

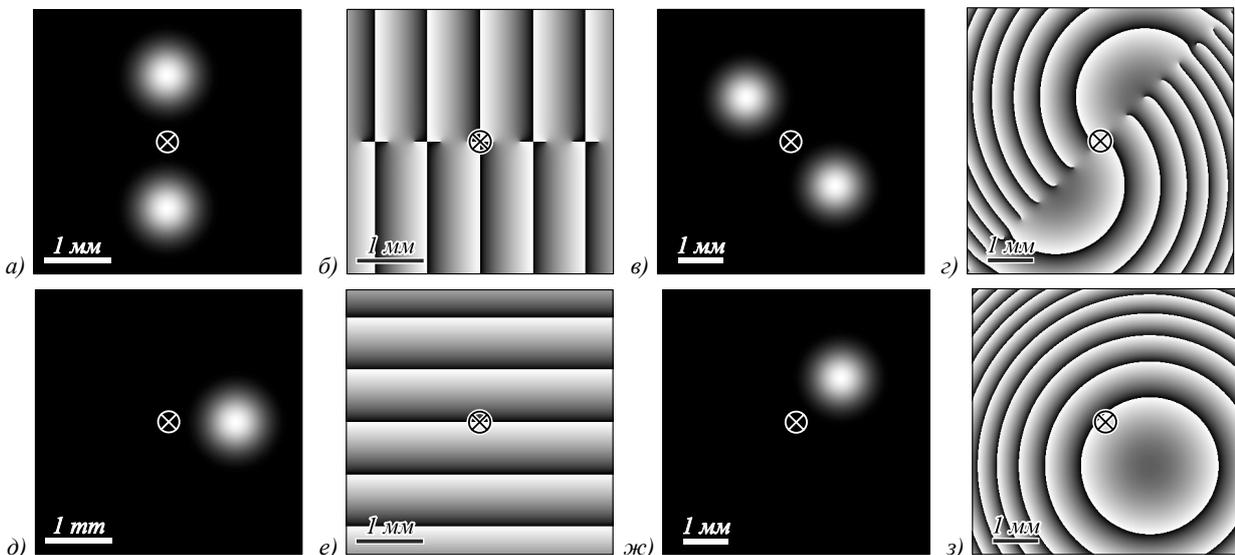


Рис. 1. Распределение интенсивности (а, в, д, ж) и фазы (б, г, е, з) вихревого косинусного пучка (3) и элементарного спирального пучка (4) в начальной плоскости (а, б, д, е) и на расстоянии Рэлея (в, г, ж, з) при следующих параметрах расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 0,5$  мм, масштабирующий множитель  $\alpha_0 = w_0/4$ , расчётная область  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 2$  мм (в начальной плоскости) и  $R = 2$  мм (на расстоянии Рэлея). Крест в центре показывает оптическую ось, вокруг которой происходит поворот дифракционной картины при распространении (на расстоянии Рэлея картина поворачивается на 45 градусов)

то логично ожидать, что вместо двух световых пятен получится одно. Такой пучок описан в [8] и назван элементарным спиральным пучком. В отличие от вихревого косинусного пучка с рис. 1а-г распределение интенсивности пучка (4) содержит одно внеосев-

ное пятно (рис. 1д, ж), а ТЗ такого пучка равен нулю, так как пучок не содержит оптические вихри (рис. 1(г, з)). То есть замена в (1) косинуса на близкую в математическом смысле экспоненту приводит к пучку с кардинально иным распределением фазы.

Обозначим  $1/\alpha_0 = [2q/(w_0^2|q|^2)](x_c - iy_c)$ , где  $x_c, y_c$  – вещественные числа (зависящие от  $z$ ). Тогда, выделив в (4) явно мнимую и вещественную части в экспонентах и разделив на постоянный множитель  $\exp[(x_c^2 + y_c^2)/(w_0^2|q|^2)] = \exp[|w_0/(2\alpha_0)|^2]$ , перепишем (4) в виде:

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ -\frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{w^2} + i \frac{2}{w^2} (x_c y - y_c x) + \frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) - i\zeta \right], \quad (5)$$

где  $w(z), R(z), \zeta(z)$  – ширина пучка, радиус кривизны волнового фронта и фаза Гоу на расстоянии  $z$  [4]:

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\ R(z) &= z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right), \\ \zeta(z) &= \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) видно, что  $x_c$  и  $y_c$  – декартовы координаты максимума интенсивности (центра Гауссова пучка) на расстоянии  $z$ , связанные с координатами центра  $(x_{c0}, y_{c0})$  в начальной плоскости следующим образом:

$$\begin{aligned} x_c &= (w/w_0)(x_{c0} \cos \zeta - y_{c0} \sin \zeta), \\ y_c &= (w/w_0)(y_{c0} \cos \zeta + x_{c0} \sin \zeta). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (5) также видно, что поле представляет собой смещённый с оптической оси Гауссов пучок и к волновому фронту добавлена наклонная плоская волна, наклон которой согласован со смещением центра светового пятна и направлен перпендикулярно направлению от оптической оси до этого центра (рис. 1д, е). Это согласование обеспечивает инвариантность пучка при распространении в пространстве, благодаря которой расширение Гауссова пучка пропорционально его удалению от оптической оси.

Пучок (4), (5) является базовым для построения других инвариантных к распространению световых пучков. В случае совокупности таких пучков их оси лежат на однополостном гиперboloиде, ось которого совпадает с оптической осью, что и обеспечивает устойчивость составного пучка в целом. В [8] подробно рассмотрена процедура расчёта инвариантных пучков в форме плоской кривой. Так, например, формируя суперпозицию бесконечного числа пучков (5) с центрами  $(x_c, y_c)$ , расположенными на отрезке или на эллипсе, можно получить инвариантный пучок соответственно в форме отрезка или эллипса (рис. 2). Если вместо эллипса взять окружность, то можно показать аналитически, что сложение пучков (5) вдоль

окружности приводит (с точностью до коэффициентов) к однокольцевому (то есть с нулевым радиальным индексом) пучку Лагерра–Гаусса.

Ниже мы рассмотрим аналитически суперпозицию пучков (5), но не вдоль плоской кривой, как в [8], а на всей декартовой плоскости, и аналитически опишем внеосевой эллиптический Гауссов пучок, поворачивающийся вокруг оптической оси и инвариантный к распространению в пространстве.

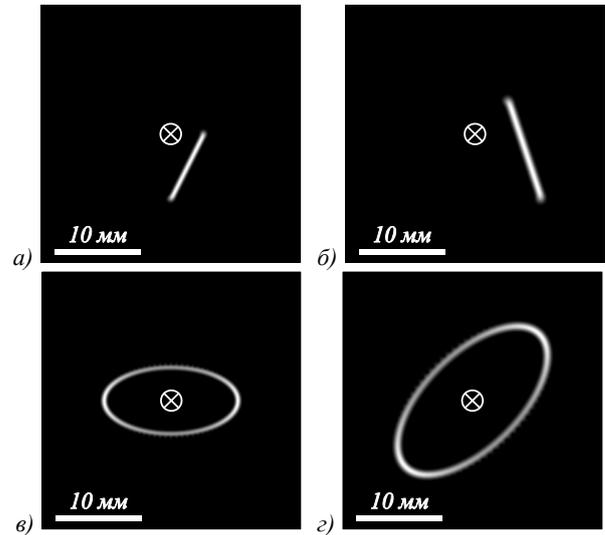


Рис. 2. Распределение интенсивности (а, в, д, ж) вихревого инвариантного пучка в форме отрезка (а, б) и в форме эллипса (в, д) в начальной плоскости (а, в) и на расстоянии Рэлея  $z = z_0$  (б, д) при следующих параметрах расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w_0 = 500$  мкм, начальная точка отрезка  $(0, -15w_0)$ , конечная точка отрезка  $(7,5w_0, 0)$ , горизонтальный радиус эллипса –  $16w_0$ , вертикальный радиус эллипса –  $8w_0$ , расчётная область на всех изображениях  $|x|, |y| \leq R (R = 15 \text{ мм})$ . Крест в центре показывает оптическую ось, вокруг которой происходит поворот дифракционной картины при распространении. Распределения в начальной плоскости получены сложением пучков (5) с центрами, расположенными вдоль отрезка или эллипса, а распределения на расстоянии Рэлея получены численно с помощью преобразования Френеля, чтобы подтвердить теорию

### 2. Структурно-инвариантные эллиптические Гауссовы пучки

С учётом (7), формула (5) может быть переписана в следующем виде (через координаты центра пучка в начальной плоскости):

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2} + \frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) - i\zeta - \frac{x_{c0}^2 + y_{c0}^2}{w_0^2} + \frac{2}{qw_0^2} (x + iy)(x_{c0} - iy_{c0}) \right]. \quad (8)$$

Рассмотрим непрерывную суперпозицию пучков (8), весовые коэффициенты которой находятся в квадратично-экспоненциальной зависимости от координат центров пучков:

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2} + \frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) - i\zeta \right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -p_{xx} \frac{x_{c0}^2}{w_0^2} - p_{yy} \frac{y_{c0}^2}{w_0^2} - 2p_{xy} \frac{x_{c0} y_{c0}}{w_0^2} - 2p_x \frac{x_{c0}}{w_0} - 2p_y \frac{y_{c0}}{w_0} \right] \times \exp \left[ -\frac{x_{c0}^2 + y_{c0}^2}{w_0^2} + \frac{2}{qw_0^2} (x + iy)(x_{c0} - iy_{c0}) \right] dx_{c0} dy_{c0}. \tag{9}$$

Приведём подобные слагаемые в экспонентах в (9):

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2} + \frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) - i\zeta \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -(1 + p_{xx}) \frac{x_{c0}^2}{w_0^2} - (1 + p_{yy}) \frac{y_{c0}^2}{w_0^2} - 2p_{xy} \frac{x_{c0} y_{c0}}{w_0^2} \right] \exp \left[ -\frac{2}{w_0} \left( p_x - \frac{x + iy}{qw_0} \right) x_{c0} - \frac{2}{w_0} \left( p_y + i \frac{x + iy}{qw_0} \right) y_{c0} \right] dx_{c0} dy_{c0}. \tag{10}$$

Интеграл от экспоненты с квадратичным показателем хорошо известен и потому

$$E(x, y, z) = \frac{w_0^3}{w} \frac{\pi}{\sqrt{G}} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2} + \frac{ik}{2R} (x^2 + y^2) - i\zeta \right] \exp \left\{ \frac{1 + p_{xx}}{G} \times \left( p_y + i \frac{x + iy}{qw_0} \right)^2 + \frac{1 + p_{yy}}{G} \left( p_x - \frac{x + iy}{qw_0} \right)^2 - \frac{2p_{xy}}{G} \left( p_x - \frac{x + iy}{qw_0} \right) \left( p_y + i \frac{x + iy}{qw_0} \right) \right\}, \tag{11}$$

где  $G = (1 + p_{xx})(1 + p_{yy}) - (p_{xy})^2$ .

В системе координат, повернутой на угол, равный фазе Гоу, и нормированной на ширину пучка  $w$ :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} \cos \zeta & \sin \zeta \\ -\sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{12}$$

комплексная амплитуда равна

$$E(x, y, z) = \frac{w_0^3}{w} \frac{\pi}{\sqrt{G}} \exp \left[ -u^2 - v^2 + iz_0 |q|^2 \times \times R^{-1} (u^2 + v^2) - i\zeta \right] \exp \left\{ \frac{1 + p_{xx}}{G} [p_y + i(u + iv)]^2 + \frac{1 + p_{yy}}{G} [p_x - (u + iv)]^2 - \frac{2p_{xy}}{G} [p_x - (u + iv)][p_y + i(u + iv)] \right\}, \tag{13}$$

или

$$E(x, y, z) = C_0 \exp(-A_{xx}u^2 - A_{yy}v^2 - A_{xy}uv - A_xu - A_yv), \tag{14}$$

где

$$C_0 = \frac{w_0^3}{w} \frac{\pi}{\sqrt{G}} \times \exp \left( -i\zeta + \frac{1 + p_{xx}}{G} p_y^2 + \frac{1 + p_{yy}}{G} p_x^2 - \frac{2p_{xy}}{G} p_x p_y \right),$$

$$A_{xx} = 1 - iz_0 |q|^2 R^{-1} + \frac{p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}}{G},$$

$$A_{yy} = 1 - iz_0 |q|^2 R^{-1} - \frac{p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}}{G},$$

$$A_{xy} = 2i \frac{p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}}{G}, \tag{15}$$

$$A_x = \frac{-2}{G} \times \left[ ip_y (1 + p_{xx}) - p_x (1 + p_{yy}) - ip_{xy} (p_x + ip_y) \right],$$

$$A_y = i \frac{-2}{G} \times \left[ ip_y (1 + p_{xx}) - p_x (1 + p_{yy}) - ip_{xy} (p_x + ip_y) \right].$$

Вещественные части этих коэффициентов определяют положение, размеры и ориентацию эллиптического светового пятна. Чтобы световое пятно было расположено в начальной плоскости в точке с координатами  $(x_0, y_0)$  (центр пятна), повернуто на угол  $\alpha$  от оси  $x$  и имело размеры  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  (рис. 3), необходимо выполнение следующих условий (полагаем все коэффициенты суперпозиции  $p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}, p_x, p_y$  вещественными):

$$\begin{cases} \frac{1}{w_0^2} \left( 1 + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{G} \right) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_y^2}, \\ \frac{1}{w_0^2} \left( 1 - \frac{p_{xx} - p_{yy}}{G} \right) = \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_y^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_x^2}, \\ \frac{1}{w_0^2} \frac{4p_{xy}}{G} = \left( \frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \right) \sin 2\alpha, \\ \frac{1}{w_0} \frac{2}{G} [(1 + p_{yy}) p_x - p_{xy} p_y] = -2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_y^2} \right) x_0 - \left( \frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \right) y_0 \sin 2\alpha, \\ \frac{1}{w_0} \frac{2}{G} [(1 + p_{xx}) p_y - p_{xy} p_x] = -2 \left( \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_x^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_y^2} \right) y_0 - \left( \frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2} \right) x_0 \sin 2\alpha. \end{cases} \tag{16}$$

Система (16) содержит 5 нелинейных уравнений, однако, как оказалось, её можно решить аналитически. Сложив первое уравнение со вторым, получим следующее условие:

$$\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} = \frac{2}{w_0^2}. \tag{17}$$

Оно означает, что из пучков (5) невозможно составить эллиптическое пятно произвольного размера. Поперечные размеры эллипса должны быть связаны соотношением (17), которое означает, что среднее степенное степени  $-2$  [22] от этих размеров (то есть  $[(\sigma_x^{-2} + \sigma_y^{-2})/2]^{-1/2}$ ) равно радиусу перетяжки  $w_0$  элементарных спиральных пучков (4), (5), из которых строится суперпозиция. Далее будем называть  $w_0$  эффективным радиусом перетяжки в том смысле, что эллиптический Гауссов пучок распространяется в пространстве с той же фазовой скоростью (фазой Гоу), что и круглый Гауссов пучок с радиусом перетяжки  $w_0$ .

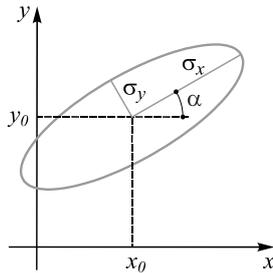


Рис. 3. Параметры эллиптического распределения интенсивности

Как оказалось, остальные параметры эллипса ( $x_0, y_0, \alpha$ ) могут быть произвольными и система (16) при любых их значениях имеет решение. Подставив найденные значения  $p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}, p_x, p_y$  в (13), получим:

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ -\left(1 - iz_0 |q|^2 R^{-1} - \mu\right) u^2 - \left(1 - iz_0 |q|^2 R^{-1} + \mu\right) v^2 + 2i\mu uv \right] \times \exp \left\{ -2 \left[ \frac{x_0}{w_0} (\mu - 1) + i \frac{y_0}{w_0} (\mu + 1) \right] (u + iv) - i\zeta \right\}, \tag{18}$$

где

$$\mu = \gamma e^{-2i\alpha}, \tag{19}$$

$$\gamma = 1 - \frac{w_0^2}{\sigma_x^2} = \frac{w_0^2}{\sigma_y^2} - 1. \tag{20}$$

Возвращаясь от координат (12) к исходным координатам, получим окончательное выражение для распределения комплексной амплитуды:

$$E(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ -\left( \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2R} - \frac{\mu}{w^2} e^{-2i\zeta} \right) x^2 - \left( \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2R} + \frac{\mu}{w^2} e^{-2i\zeta} \right) y^2 + 2i \frac{\mu}{w^2} e^{-2i\zeta} xy \right] \times \exp \left\{ -2 \left( \frac{1}{w^2} - \frac{ik}{2R} \right) \left[ x_0 (\mu - 1) + iy_0 (\mu + 1) \right] (x + iy) - i\zeta \right\}. \tag{21}$$

На рис. 4 показаны распределения интенсивности и фазы двух пучков (21) в начальной плоскости и на расстоянии Рэлея.

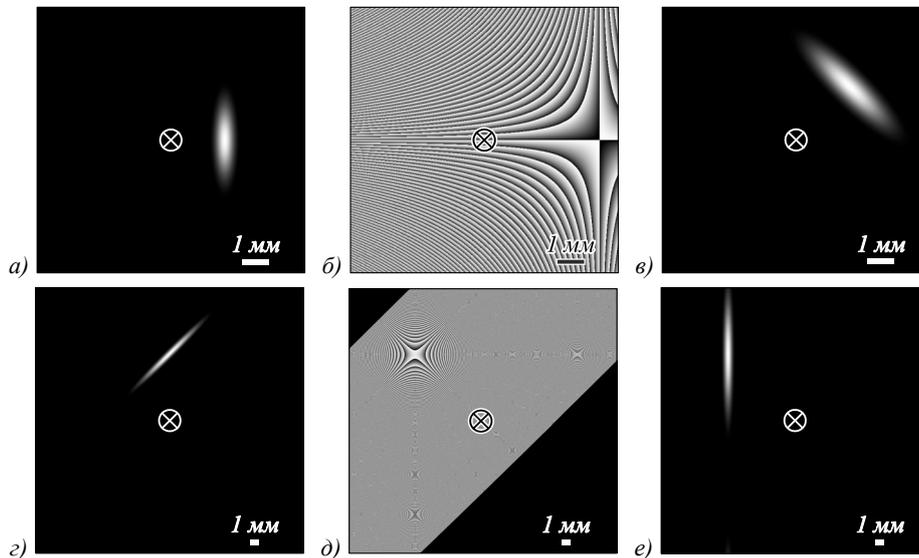


Рис. 4. Распределение интенсивности (а, в, г, е) и фазы (б, д) инвариантного внеосевого эллиптического Гауссова пучка в начальной плоскости (а, б, г, д) и на расстоянии Рэлея  $z = z_0$  (в, е) при следующих параметрах расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиусы перетяжки Гауссова пучка  $\sigma_x = 1425$  мкм и  $\sigma_y = 365$  мкм ( $w_0 = 500$  мкм) (а–в) и  $\sigma_x = 4583$  мкм и  $\sigma_y = 355$  мкм ( $w_0 = 500$  мкм) (г–е), координаты центра Гауссова пучка  $(x_0, y_0) = (2, 0)$  мм (а–в) и  $(x_0, y_0) = (0, 7,5)$  мм (г–е), угол наклона большей оси эллипса к оси  $x$   $\alpha = \pi/2$  (а–в) и  $\alpha = \pi/4$  (г–е), расчётная область  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 5$  мм (а–в) и  $R = 15$  мм (г–е). Крест в центре показывает оптическую ось, вокруг которой происходит поворот дифракционной картины при распространении. Распределения в начальной плоскости получены по формуле (21), а на расстоянии Рэлея получены численно с помощью преобразования Френеля и для сравнения тоже по формуле (21) (отличия визуально не видны). Область равномерной фазы (д) – область сверхмалой интенсивности, которую расчётная программа не отличает от точного нуля

Из рис. 4 видно, что, действительно, после распространения в свободном пространстве распределения интенсивности изменились только масштабно и повернулись относительно начала координат.

Оба эти пучка при распространении приобретают такую же фазу Гоу, как у круглого Гауссова пучка с радиусом перетяжки  $w_0 = 500$  мкм. Поэтому суперпозиция таких пучков также распространяется без изменения своей формы.

Например, из таких пучков можно составить инвариантную к распространению двухлепестковую суперпозицию. Такие пучки используются в микроскопии отдельных молекул и для улучшения продольного разрешения в изображающих системах [23]. На рис. 5 показаны распределения интенсивности и фазы двухлепесткового пучка, составленного из двух противоположных эллиптических Гауссовых пучков (21) в начальной плоскости и на расстоянии Рэлея.

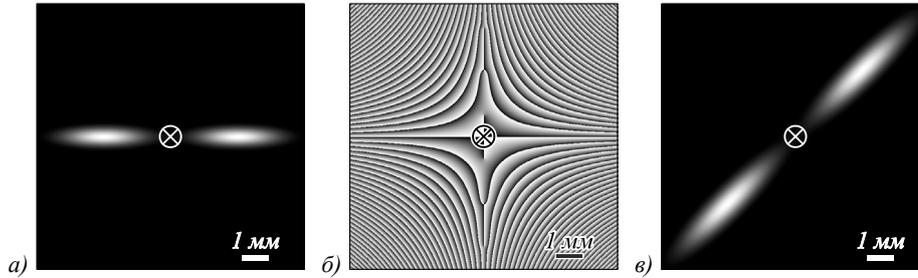


Рис. 5. Распределение интенсивности (а, в) и фазы (б) инвариантного двухлепесткового пучка в начальной плоскости (а, б) и на расстоянии Рэлея  $z = z_0$  (в) при следующих параметрах расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиусы перетяжки двух противоположных эллиптических Гауссовых пучков  $\sigma_x = 1617$  мкм и  $\sigma_y = 362$  мкм ( $w_0 = 500$  мкм), координаты центров пучков  $(x_0, y_0) = (\pm 2,5, 0)$  мм, угол наклона большей оси эллипса к оси  $x$   $\alpha = 0$ , расчётная область  $|x|, |y| \leq R$  ( $R = 5$  мм).

Крест в центре показывает оптическую ось, вокруг которой происходит поворот дифракционной картины при распространении

Аналогично можно располагать эллиптические пучки на окружности для передачи информации. Например, если 16 эллиптических Гауссовых пучков расположены на окружности и используются для передачи двух байтов, то число 27000 (в бинарной системе 0110100101111000) может передаваться пучком, показанным на рис. 6.

Как видно из рис. 6, на расстоянии Рэлея данный пучок повернулся на 45 градусов, а в дальней зоне – почти на 90 градусов, но форма у него не изменилась и остаётся такой же, как в начальной плоскости. При этом если в начальной плоскости не задавать поле (21) со специально подобранной фазой, а задать суперпозицию эллиптических Гауссовых пучков с распределением интенсивности, показанным на рис. 6а, д, но с плоским волновым фронтом, то в дальней зоне распределение интенсивности искажается из-за взаимодействия Гауссовых пучков между собой (рис. 6з, э).

### 3. Энергия и орбитальный угловой момент

Энергия и орбитальный угловой момент произвольного паракиального светового поля находятся по следующим формулам [21]:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (22)$$

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) \times \left[ x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right] dx dy. \quad (23)$$

Подставив в эти формулы комплексную амплитуду (21), получим выражения для энергии и ОУМ вносевое эллиптического инвариантного пучка:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2\sqrt{1-\gamma^2}} \exp \left\{ 2 \frac{r_0^2}{w_0^2} [1 - \gamma \cos(2\varphi_0 - 2\alpha)] \right\}, \quad (24)$$

$$J_z = 2 \frac{r_0^2}{w_0^2} (1 - \gamma \cos 2\beta) W + \frac{\pi w_0^2 \gamma}{2\sqrt{1-\gamma^2}} \left( \frac{\gamma}{1-\gamma^2} + 2 \frac{r_0^2}{w_0^2} \cos 2\beta \right) \times \exp \left\{ 2 \frac{r_0^2}{w_0^2} [(1 + \gamma) \sin^2 \beta + (1 - \gamma) \cos^2 \beta] \right\}. \quad (25)$$

Разделив ОУМ на энергию, получим нормированный ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = 2 \frac{r_0^2}{w_0^2} + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} = 2 \frac{r_0^2}{w_0^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_x} - \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right)^2. \quad (26)$$

Как видно из (26), при смещении пучка от оптической оси нормированный ОУМ возрастает квадратично с расстоянием  $r_0$ , что согласуется с теоремой Штейнера. Также из (26) видно, что на ОУМ влияет эллиптичность пучка, но его наклон к осям координат на ОУМ не влияет. При  $r_0 = 0$  приведённое выражение совпадает с полученным в [19].

Численный расчёт подтверждает формулу (26). Так, для пучка на рис. 4а-в теоретическое значение ОУМ равно 35,328. При численном расчёте по формулам (22) и (23) получены значения 35,022 в начальной плоскости (рис. 4а) и 34,881 на расстоянии Рэлея (рис. 4в). Для более узкого пучка на рис. 4з-е теоретическое значение ОУМ равно 491. При расчёте получены значения 420 в начальной плоскости (рис. 4з) и 392 на расстоянии Рэлея (рис. 4е). Более

существенная ошибка для пучка с рис. 4г-е объясняется его более близким расположением к краям рас-

чётной области, благодаря чему в расчёт ОУМ не включена периферийная область, влияющая на ОУМ.

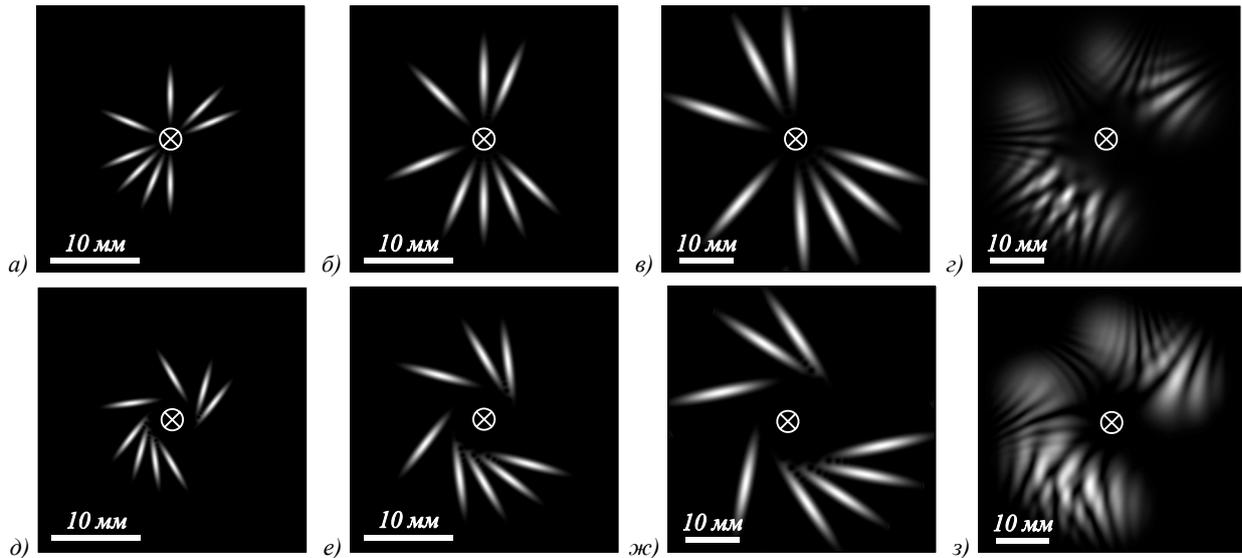


Рис. 6. Распределения интенсивности двух суперпозиций инвариантных внеосевых эллиптических Гауссовых пучков в начальной плоскости (а, д), на расстоянии Рэлея  $z = z_0$  (б, е) и в дальней зоне  $z = 3z_0$  (в, ж), а также распределения интенсивности в дальней зоне аналогичных суперпозиций эллиптических Гауссовых пучков, но без специально подобранной фазы (то есть не инвариантных) (г, з) при следующих параметрах расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиусы перетяжки Гауссова пучка  $\sigma_x = 2500$  мкм и  $\sigma_y = 357$  мкм ( $w_0 = 500$  мкм), координаты центров Гауссовых пучков

$(x_{0p}, y_{0p}) = (r_0 \cos \varphi_p, r_0 \sin \varphi_p)$  ( $r_0 = 5$  мм,  $\varphi_p = 2\pi p / 16$ ,  $p = 1, 2, 4, 7, 9, 10, 11, 12$ ), углы наклона больших осей эллипсов к оси  $x$   $\alpha_p = \varphi_p$  (а-г) и  $\alpha_p = \varphi_p + \pi/6$  (д-з), расчётная область  $|x|, |y| \leq R$ , где  $R = 15$  мм (а, б, д, е) и  $R = 25$  мм (в, г, ж, з).

Крест в центре показывает оптическую ось, вокруг которой происходит поворот дифракционной картины при распространении. Распределения в начальной плоскости получены по формуле (21), а на расстоянии Рэлея и в дальней зоне получены численно с помощью преобразования Френеля

### Заключение

Хорошо известно, что световые поля, которые распространяются без изменения своей структуры (инвариантные к распространению), имеют бесконечную энергию. Примеры таких полей известны: плоская волна, пучки Бесселя, пучки Маттье. Любые другие инвариантные поля можно построить с помощью известного преобразования [24]:

$$E(x, y) = \int_0^{2\pi} A(\varphi) \exp[ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] d\varphi,$$

где  $A(\varphi)$  – произвольная функция от угловой полярной координаты (периодическая с периодом  $2\pi$ ).

Лазерные пучки с конечной энергией могут быть только структурно-инвариантными, то есть сохранять при распространении только структуру распределения интенсивности и изменяться масштабно, и вращаться.

Впервые такие пучки (авторы их назвали спиральными пучками) были рассмотрены в 1993 году [8]. У таких пучков, смещённые они с оптической оси или нет, все винтовые сингулярности должны быть одного знака (1). Если в пучке винтовые сингулярности разных знаков, то при распространении такой пучок изменяет (сильно или не сильно) свою структуру [25]. В нашей работе структурная устойчивость эллиптического пучка (21) обеспечивается тем, что он являет-

ся суперпозицией (9) структурно-устойчивых (спиральных [8]) пучков (5).

Таким образом, в данной работе, рассмотрев непрерывную суперпозицию элементарных спиральных световых пучков [8] на плоскости и решив систему из пяти нелинейных уравнений для определения весовых коэффициентов этой суперпозиции, мы получили аналитическое описание параксиальных инвариантных к распространению в пространстве эллиптических Гауссовых пучков, смещённых с оптической оси (формула (21)).

При распространении такой пучок поворачивается, но не относительно своего центра, а относительно оптической оси. Оказалось, что смещение центра такого эллиптического пучка и его ориентация в поперечной плоскости могут быть произвольными, но радиусы перетяжки связаны между собой так, что среднее степенное степени  $-2$  [22] от этих двух радиусов перетяжки равно радиусу перетяжки круглого Гауссова пучка, распространяющегося с той же фазовой скоростью (с той же фазой Гоу) (17).

Получена формула для орбитального углового момента таких пучков (формула (26)). Подобно теореме Штейнера в механике, он состоит из двух слагаемых: одно из них равно моменту относительно своего центра масс (центра эллипса) и возрастает с эллиптичностью пучка, второе квадратично зависит от расстояния от центра масс до оптической оси. Оказалось, что ори-

ентация эллипса в поперечной плоскости на нормированный орбитальный угловой момент не влияет.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Инвариантные к распространению внеосевые Гауссовы пучки», Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в части «Структурно-инвариантные эллиптические Гауссовы пучки», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части «Энергия и орбитальный угловой момент».

### Литература

1. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli Jr., J.H. Eberly // *Physical Review Letters*. – 1987. – Vol. 58, Issue 15. – P. 1499-1501.
2. **Gutiérrez-Vega, J.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J. Gutiérrez-Vega, M. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda // *Optics Letters*. – 2000. – Vol. 25. – P. 1493-1495.
3. **Bandres, M.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M. Bandres, J. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda // *Optics Letters*. – 2004. – Vol. 29. – P. 44-46.
4. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – University Science, 1986.
5. **Indebetouw, G.** Optical vortices and their propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40, Issue 1. – P. 73-87.
6. **Abramochkin, E.G.** Generalized Gaussian beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 5. – P. S157-S161.
7. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite–Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40, Issue 5. – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
8. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2010. – ISBN: 978-5-9221-1216-1.
9. **Liu, X.** Investigation on the scintillation reduction of elliptical vortex beams propagating in atmospheric turbulence / X. Liu, J. Pu // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19, Issue 27. – P. 26444-26450.
10. **Andrews, L.C.** *Laser beam propagation through random media* / L.C. Andrews, R.L. Phillips. – Bellingham, Washington: SPIE Press, 1998.
11. **Zhang, X.** Free-space information transfer using the elliptical vortex beam with fractional topological charge / X. Zhang, T. Xia, S. Cheng, S. Tao // *Optics Communication*. – 2019. – Vol. 431. – P. 238-244.
12. **Wu, K.** Propagation of partially coherent four-petal elliptic Gaussian vortex beams in atmospheric turbulence / K. Wu, Y. Huai, T. Zhao, Y. Jin // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 23. – P. 30061-30075.
13. **Скиданов, Р.В.** Суперпозиция вихревых световых пучков для захвата и перемещения биологических микрообъектов / Р.В. Скиданов, М.А. Рыков // *Компьютерная оптика*. – 2013. – Т. 37, Issue 4. – P. 431-435. – DOI: 10.18287/0134-2452-2013-37-4-431-435.
14. **Белоусов, Д.А.** Метод обработки микроизображений для анализа структур ТЛИППС / Д.А. Белоусов, А.В. Достовалов, В.П. Корольков, С.Л. Микерин // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 6. – С. 936-945. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-936-945.
15. **Dostovalov, A.V.** Influence of femtosecond laser pulse repetition rate on thermochemical laser-induced periodic surface structures formation by focused astigmatic Gaussian beam / A.V. Dostovalov, K.A. Okotrub, K.A. Bronnikov, V.S. Terentyev, V.P. Korolkov, S.A. Babin // *Laser Physics Letters*. – 2019. – Vol. 16, Issue 2. – 026003.
16. **Dostovalov, A.V.** LIPSS on thin metallic films: New insights from multiplicity of laser-excited electromagnetic modes and efficiency of metal oxidation / A.V. Dostovalov, T.J.Y. Derrien, S.A. Lizunov, F. Přeučil, K.A. Okotrub, T. Mocek, V.P. Korolkov, S.A. Babin, N.M. Bulgakova // *Applied Surface Science*. – 2019. – Vol. 491. – P. 650-658.
17. **Goodman, J.W.** *Introduction to Fourier optics* / J.W. Goodman. – 2<sup>nd</sup> ed. – New York: McGraw-Hill, 1996. – 491 p.
18. **Cai, Y.** Decentered elliptical Gaussian beam / Y. Cai, Q. Lin // *Applied Optics*. – 2002. – Vol. 41. – P. 4336-4340.
19. **Kotlyar, V.V.** Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 2. – P. 657-666. – DOI: 10.1364/OE.27.000657.
20. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 1. – P. 141-156. – DOI: 10.1364/OE.26.000141.
21. **Berry, M.V.** Orbital and spin angular momentum in conical diffraction / M.V. Berry, M.R. Jeffrey, M. Mansuripur // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2005. – Vol. 7. – P. 685-690.
22. **Bullen, P.S.** *Handbook of means and their inequalities* / P.S. Bullen. – Chap. III. – Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 2003. – P. 175-265.
23. **Backlund, M.P.** The double-helix point spread function enables precise and accurate measurement of 3D single-molecule localization and orientation / M.P. Backlund, M.D. Lew, A.S. Backer, S.J. Sahl, G. Grover, A. Agrawal, R. Piestun, W.E. Moerner // *Proceedings of SPIE*. – 2013. – Vol. 8590. – 85900.
24. **Zannotti, A.** Shaping caustics into propagation-invariant light / A. Zannotti, C. Denz, M.A. Alonso, M.R. Dennis // *Nature Communications*. – 2020. – Vol. 11. – 3597.
25. **Izdebskaya, Y.** Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points / Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25, Issue 1. – P. 171-181.

### Сведения об авторах

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника»

---

РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

**Калинкина Дарья Сергеевна**, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетехнологический факультет. Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика. В списке научных работ 6 статей.

E-mail: [dskalinkina@gmail.com](mailto:dskalinkina@gmail.com).

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Налимов Антон Геннадьевич** см. стр. 808 этого номера.

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 27 апреля 2021 г. Окончательный вариант – 22 июня 2021 г.*

---

---

# Off-axis elliptic Gaussian beams with an intrinsic orbital angular momentum

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, D.S. Kalinkina<sup>2</sup>, A.G. Nalimov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

We discuss paraxial light beams composed of decentered Gaussian beams, with their phase selected in a special way so that their superposition is invariant as it propagates in free space, retaining its cross-section shape. By solving a system of five nonlinear equations, a superposition is constructed that forms an invariant off-axis elliptic Gaussian beam. An expression is obtained for the orbital angular momentum of this beam. It is shown that it consists of two components. The first of them is equal to the moment relative to the center of the beam and increases with increasing ellipticity. The second one quadratically depends on the distance from the center of mass to the optical axis (an analogue of Steiner's theorem). It is shown that the orientation of the ellipse in the transverse plane does not affect the normalized orbital angular momentum.

**Keywords:** light beam with non-uniform elliptical polarization, topological charge, intrinsic orbital angular momentum.

**Citation:** Kovalev AA, Kotlyar VV, Kalinkina DS, Nalimov AG. Off-axis elliptic Gaussian beams with an intrinsic orbital angular momentum. *Computer Optics* 2021; 45(6): 809-817. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-916.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under grant #18-29-20003 (Section “Invariant propagation of off-axis Gaussian beams”), the Russian Science Foundation grant #18-19-00595 (Section “Structurally-stable elliptical Gaussian beams”), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the “Crystallography and Photonics” Research Center of the RAS (Section “Energy and orbital angular momentum”).

## References

- [1] Durnin J, Miceli JJ Jr, Eberly JH. Diffraction-free beams. *Phys Rev Lett* 1987; 58(15): 1499-1501.
  - [2] Gutiérrez-Vega J, Iturbe-Castillo M, Chávez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. *Opt Lett* 2000; 25: 1493-1495.
  - [3] Bandres M, Gutiérrez-Vega J, Chávez-Cerda S. Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Opt Lett* 2004; 29: 44-46.
  - [4] Siegman AE. *Lasers*. University Science; 1986.
  - [5] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87.
  - [6] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A–Pure Appl Op* 2004; 6(5): S157-S161.
  - [7] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite–Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
  - [8] Abramochkin EG, Volostnikov VG. *Modern optics of Gaussian beams* [In Russian]. Moscow: “Fisimatlit” Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
  - [9] Liu X, Pu J. Investigation on the scintillation reduction of elliptical vortex beams propagating in atmospheric turbulence. *Opt Express* 2011; 19(27): 26444-26450.
  - [10] Andrews LC, Phillips RL. *Laser beam propagation through random media*. Bellingham, Washington: SPIE Press; 1998.
  - [11] Zhang X, Xia T, Cheng S, Tao S. Free-space information transfer using the elliptic vortex beam with fractional topological charge. *Opt Commun* 2019; 431: 238-244.
  - [12] Wu K, Huai Y, Zhao T, Jin Y. Propagation of partially coherent four-petal elliptic Gaussian vortex beams in atmospheric turbulence. *Opt Express* 2018; 26(23): 30061-30075.
  - [13] Skidanov RV, Rykov MA. The modification of laser beam for optimization of optical trap force characteristics. *Computer Optics* 2013; 37(4): 431-435. DOI: 10.18287/0134-2452-2013-37-4-431-435.
  - [14] Belousov DA, Dostovalov AV, Korolkov VP, Mikerin SL. A microscope image processing method for analyzing TLIPSS structures. *Computer Optics* 2019; 43(6): 936-945. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-936-945.
  - [15] Dostovalov AV, Okotrub KA, Bronnikov KA, Terentyev VS, Korolkov VP, Babin SA. Influence of femtosecond laser pulse repetition rate on thermochemical laser-induced periodic surface structures formation by focused astigmatic Gaussian beam. *Laser Phys Lett* 2019; 16(2): 026003.
  - [16] Dostovalov AV, Derrien TJY, Lizunov SA, Přeučil F, Okotrub KA, Mocek T, Korolkov VP, Babin SA, Bulgakova NM. LIPSS on thin metallic films: New insights from multiplicity of laser-excited electromagnetic modes and efficiency of metal oxidation. *Appl Surf Sci* 2019; 491: 650-658.
  - [17] Goodman JW. *Introduction to Fourier optics*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: McGraw-Hill; 1996.
  - [18] Cai Y, Lin Q. Decentered elliptical Gaussian beam. *Appl Opt* 2002; 41: 4336-4340.
  - [19] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams. *Opt Express* 2019; 27(2): 657-666. DOI: 10.1364/OE.27.000657.
  - [20] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141-156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.
  - [21] Berry MV, Jeffrey MR, Mansuripur M. Orbital and spin angular momentum in conical diffraction. *J Opt A–Pure Appl Op* 2005; 7: 685-690.
  - [22] Bullen PS. *Handbook of means and their inequalities*. Ch III. Dordrecht, Netherlands: Kluwer; 2003: 175-265.
-

---

[23] Backlund MP, Lew MD, Backer AS, Sahl SJ, Grover G, Agrawal A, Piestun R, Moerner WE. The double-helix point spread function enables precise and accurate measurement of 3D single-molecule localization and orientation. Proc SPIE 2013; 8590: 85900.

[24] Zannotti A, Denz C, Alonso MA, Dennis MR. Shaping caustics into propagation-invariant light. Nat Commun 2020; 11: 3597.

[25] Izdebskaya Y, Shvedov V, Volyar A. Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points. J Opt Soc Am A 2008; 25(1): 171-181.

---

#### *Authors' information*

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru).

**Darya Sergeevna Kalinkina** (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering faculty. She is a postgraduate student of Technical Cybernetics department in SSAU. She is also working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics. She is co-author of 6 scientific papers. E-mail: [dskalinkina@gmail.com](mailto:dskalinkina@gmail.com).

**Anton Gennadyevich Nalimov** (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical modeling and program complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: [anton@ipsiras.ru](mailto:anton@ipsiras.ru).

---

*Received April 27, 2021. The final version – June 22, 2021.*

---