

## Моделирование работы космического гиперспектрометра, основанного на схеме Оффнера, в приближении волновой оптики

А.А. Расторгуев<sup>1</sup>, С.И. Харитонов<sup>2,3</sup>, Н.Л. Казанский<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Акционерное общество «Ракетно-космический центр «Прогресс», Самара, Россия;

<sup>2</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>3</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В приближении скалярной теории дифракции разработан метод расчёта функции рассеяния точки гиперспектрометра по схеме Оффнера с дифракционной решёткой. Метод последовательно учитывает ограничения и дифракцию светового пучка на элементах системы гиперспектрометра в соответствии с физикой формирования изображения. В работе рассматривается моделирование функции рассеяния точки гиперспектрометра при различных параметрах пучка и длинах волн. Результаты моделирования проверены с использованием аналитических соотношений, геометрикооптического расчёта, а также сравнения с работами других исследователей.

**Ключевые слова:** схема Оффнера, дифракционная решётка, волновая оптика, интеграл Кирхгофа, гиперспектрометр изображающий, спектрометр.

**Цитирование:** Расторгуев, А.А. Моделирование работы космического гиперспектрометра, основанного на схеме Оффнера, в приближении волновой оптики / А.А. Расторгуев, С.И. Харитонов, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 1. – С. 56-64. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1034.

**Citation:** Rastorguev AA, Kharitonov SI, Kazanskiy NL. Numerical simulation of the performance of a spaceborne Offner imaging hyperspectrometer in the wave optics approximation. *Computer Optics* 2022; 46(1): 56-64. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1034.

### Введение

На сегодняшний день для разработки изображающей гиперспектральной аппаратуры широко применяется оптическая система, основанная на схеме Оффнера [1]. Данная проекционная оптическая система состоит из двух концентрично расположенных сферических зеркал, где на вторичное зеркало нанесена дифракционная решётка [2]. В мировой практике данная оптическая система находит применение для решения задач в различных областях [3, 4]. Изображающая гиперспектральная аппаратура на основе схемы Оффнера может устанавливаться как на самолёте-носителе [3, 5], так и на борту космического аппарата [6, 7]. Одной из важных задач при проектировании такой аппаратуры является определение её способности формировать качественное изображение. Качество изображения оптической системы (ОС) гиперспектрометра для выбранной длины волны характеризуется функцией рассеяния точки и аппаратной функцией (АФ). В работе [8] сообщается, что АФ гиперспектрометра – это и есть ФРТ. Однако общеизвестно, что ФРТ ОС характеризует распределение освещённости в изображении светящейся точки [9]. АФ ОС спектрального прибора, напротив, характеризует распределение освещённости в изображении щели [10]. Это означает, что изображению щели соответствует линия (а не точечный источник) в предметной плоскости. В таком случае АФ ОС рассчитывает-

ся как свёртка дифракционной АФ с функцией щели спектрометра [11]. Аналогичный подход к расчёту характеристик гиперспектрометра используется и у зарубежных исследователей [7, 12]. При таком подходе считается, что щель спектрометра является самосветящейся, т.е. испускает излучение во всё пространство. В работе [10] со ссылкой на работу Д.С. Рождественского [13] утверждается, что происходит некогерентное освещение щели, находящейся в фокальной плоскости объектива спектрального прибора. Однако, как показано в работе [14], спектрометр по схеме Оффнера при достаточно широком входном пучке (угол раствора  $7,5^\circ$ ) имеет малые геометрические аберрации в плоскости изображения. Для космической съёмки угол раствора пучка в плоскости изображения для объектива с  $D=60$  мм и  $f=300$  мм составляет приблизительно  $5,7^\circ$ , из чего следует, что отношение апертур объектива и спектрометра с позиции работы [13] соответствует частично когерентному случаю освещения щели. В работе [15] на лабораторном макете показано, что в гиперспектрометре по схеме Оффнера потери разрешения отсутствуют. Из этого следует, что метод расчёта АФ ОС [8–12], в котором щель по своей ширине размывает изображение светящейся точки в линию, не позволяет адекватно описать работу изображающего спектрального прибора, т.к. результаты расчёта по данному методу не согласуются с экспериментальными исследованиями [15]. Обычно при моделировании формирования

изображения ОС используется монохроматическая ФРТ [9]. Для её расчёта необходимо рассмотреть прохождение когерентного излучения через элементы ОС спектрального прибора: объектив, щелевую диафрагму и спектрометр по схеме Оффнера с дифракционной решёткой.

**1. Постановка задачи**

Расчёт ФРТ (и АФ) гиперспектрометра в работах [7, 8, 12] производится с использованием приближения теории линейных систем (как свёртка ФРТ объектива, щели, спектрометра) и не учитывает последовательность дифракции световой волны на элементах гиперспектрометра (апертурной диафрагме объектива, щели и элементах спектрометра) в соответствии с физикой формирования изображения. Как известно, схема Оффнера имеет минимальный уровень геометрических aberrаций [14, 16]. Более того, данная система включает в свою конструкцию дифракционный оптический элемент (ДОО) – дифракционную решётку [17]. Это значит, что качество изображения будет определяться волновой природой света или дифракцией света на элементах схемы, и при этом геометрический подход не позволит получить точного объяснения работы такой системы.

Рассмотрим в настоящей работе метод расчёта ФРТ гиперспектрометра в приближении скалярной волновой теории, который дополнит работы [14, 16, 17]. Полученные результаты расчёта сравним с ФРТ рассчитанными в приближении геометрической оптики, а также приведёнными в работе [18].

**2. Математический аппарат, используемый при моделировании работы гиперспектрометра в рамках скалярной волновой теории**

2.1. ДОО на криволинейной поверхности

Пусть имеется криволинейная зеркальная поверхность с нанесенным ДОО. Эйконал на поверхности с ДОО описывается функцией

$$\varphi(u, v) = \varphi^o(u, v) + m\varphi^d(u, v), \tag{1}$$

где  $\varphi^o(u, v)$  – эйконал падающей волны,  $\varphi^d(u, v)$  – эйконал ДОО на поверхности.

Пусть задано параметрическое уравнение поверхности  $r = r(u, v)$ . Направление падающего и отражённого лучей удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_u = \varphi_u^o + m\varphi_u^d = (\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_u), \\ \varphi_v = \varphi_v^o + m\varphi_v^d = (\mathbf{p}_i, \mathbf{r}_v), \\ (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i) = 1, \end{cases} \tag{2}$$

где  $\mathbf{r}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$ ,  $\mathbf{r}_v = \partial \mathbf{r} / \partial v$ ,  $\varphi_u = \partial \varphi / \partial u$ ,  $\varphi_v = \partial \varphi / \partial v$ , и направляющий вектор отражённого луча  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ .

Решая (2) относительно  $p_x, p_y$ , получаем:

$$\begin{aligned} p_x &= p_z \frac{y_u \cdot z_v - y_v \cdot z_u}{x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u} + \frac{y_v \cdot \varphi_u - y_u \cdot \varphi_v}{x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u}, \\ p_y &= p_z \frac{x_v \cdot z_u - x_u \cdot z_v}{x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u} + \frac{x_u \cdot \varphi_v - x_v \cdot \varphi_u}{x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u}, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u)^T$ ,  $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v)^T$ .

В результате подстановки в третье уравнение (2) для  $p_z$  получаем:

$$p_z^{1,2} = \left( -B \pm \sqrt{B^2 - AC} \right) / A, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} A &= (y_u \cdot z_v - y_v \cdot z_u)^2 + (x_v \cdot z_u - x_u \cdot z_v)^2 + \\ &+ (x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u)^2, \\ B &= (y_u \cdot z_v - y_v \cdot z_u) \cdot (y_v \cdot \varphi_u - y_u \cdot \varphi_v) + \\ &+ (x_v \cdot z_u - x_u \cdot z_v) \cdot (x_u \cdot \varphi_v - x_v \cdot \varphi_u), \\ C &= (y_v \cdot \varphi_u - y_u \cdot \varphi_v)^2 + (x_u \cdot \varphi_v - x_v \cdot \varphi_u)^2 - \\ &- (x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u)^2. \end{aligned}$$

В зависимости от схемы расчёта из полученных корней для  $p_z$  выбирается тот, который соответствует направлению распространения луча после прохождения ДОО.

2.2. Вычисление функции эйконала спектрометра по схеме Оффнера

Рассмотрим оптическую систему спектрометра на основе схемы Оффнера. Оптическая схема состоит из двух сферических зеркал с радиусом  $R_1$  и  $R_2$  (при этом  $R_1 \approx 2R_2$ ). Центры обеих сфер находятся в точке  $O$  начала координат  $(0, 0, 0)$ . В точке с координатами  $(-L, 0, 0)$  находится точечный источник света. Свет от точечного источника проходит мимо малого зеркала  $R_2$  и попадает на большое зеркало  $R_1$ . После отражения от большого зеркала возникает сходящаяся сферическая волна. Центр этой сходящейся сферической волны находится примерно в точке  $(L, 0, 0)$ . Данная сходящаяся сферическая волна падает на малое зеркало и формирует расходящийся приближенно сферический пучок с центром в точке  $(-L, 0, 0)$  (образуется мнимый точечный источник). Далее расходящаяся сферическая волна падает на большое зеркало и отражается от него. Отраженная волна проходит мимо малого зеркала и приближенно фокусируется в точке с координатами  $(L, 0, 0)$  (рис. 1).

В случае, если на малом зеркале находится дифракционная решетка, то после отражения от малого зеркала формируется расходящаяся сферическая волна с центром в точке  $(-L - \Delta x, 0, 0)$ . После отражения от большого зеркала формируется сходящаяся сферическая волна с центром в точке  $(L + \Delta x, 0, 0)$ . Величина  $\Delta x$  зависит от периода решетки и длины волны, что позволяет использовать этот прибор в качестве

спектрального. Задача состоит в нахождении эйконала волны на большом зеркале после второго отражения. Если известен эйконал на зеркале, можно, используя интеграл Кирхгофа, рассчитать форму пятна рассеяния.

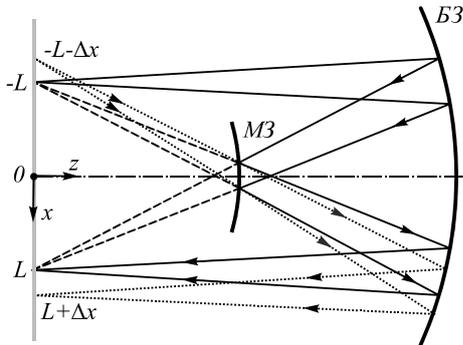


Рис. 1. Концентрическая оптическая система, состоящая из двух сферических зеркал (БЗ – большое зеркало, МЗ – малое зеркало)

Пусть из источника  $(x_0, y_0)$  падает сферическая волна. Эйконал этой волны описывается формулой:

$$\varphi_1(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2}. \quad (5)$$

Параметрическое уравнение поверхности большого зеркала представим в виде:

$$x = u_1, y = v_1, z = z_1 = \sqrt{R_1^2 - u_1^2 - v_1^2}. \quad (6)$$

Подставляя в уравнение эйконала уравнение поверхности, получаем выражение для эйконала в точке поверхности большого зеркала:

$$\varphi_1(u_1, v_1) = \sqrt{R_1^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0}. \quad (7)$$

Далее, используя соотношения, приведённые в п.2.1, находим компоненты отражённого луча  $\mathbf{p}_{12} = (p_x, p_y, p_z)^T$  как  $\mathbf{p}_{12} = k(u_1, v_1) \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{c}_1$ , где:

$$k(u_1, v_1) = \frac{\sqrt{(u_1x_0 + v_1y_0)^2 + R_1^2 (\varphi_1^2(u_1, v_1) - x_0^2 - y_0^2)}}{-R_1^2 \varphi_1(u_1, v_1)} + \frac{u_1x_0 + v_1y_0}{R_1^2 \varphi_1(u_1, v_1)}, \quad (8)$$

$$\mathbf{c}_1 = (-x_0/\varphi_1(u_1, v_1), -y_0/\varphi_1(u_1, v_1), 0)^T.$$

Пусть точка пересечения луча с малым зеркалом имеет координаты  $(u_2, v_2, z_2)$ . Тогда для вектора  $\mathbf{r}_2$  точки пересечения луча на малом зеркале будут:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 (1 + d_{12}k(u_1, v_1)) + d_{12}\mathbf{c}_1, \quad (9)$$

где расстояние от точки  $\mathbf{r}_1$  до точки пересечения луча с малым зеркалом с радиусом кривизны  $R_2$ :

$$d_{12} = -\sqrt{(\mathbf{p}_{12}, \mathbf{r}_1)^2 - R_1^2 + R_2^2} - (\mathbf{p}_{12}, \mathbf{r}_1). \quad (10)$$

Параметрическое уравнение малого зеркала имеет вид:

$$x = u_2, y = v_2, z = z_2 = \sqrt{R_2^2 - u_2^2 - v_2^2}. \quad (11)$$

Эйконал луча, падающего на малое зеркало, определяется как:

$$\Phi(u_2, v_2) = \varphi_1(u_1, v_1) + \varphi_2(u_2, v_2), \quad (12)$$

$$\text{где } \varphi_2(u_2, v_2) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

На малом зеркале расположена дифракционная решётка с эйкональной функцией:

$$\varphi^d(u_2, v_2) = \alpha t u_2 k_d / k_0. \quad (13)$$

Пусть  $\alpha = 2\Delta x / R$ , где  $\Delta x$  – смещение точки фокусировки на длине волны  $\lambda$  от точки фокусировки на длине волны  $\lambda_d$ , если на малом зеркале нет ДОО (см. рис. 1). При наличии ДОО координата точки равна  $x_\lambda = L - t\Delta x\lambda / \lambda_d$ . Это можно проверить, если продолжение луча, отражённого от малого зеркала, пересецётся с плоскостью регистратора.

Тогда после прохождения дифракционной решётки эйконал луча:

$$\Phi(u_2, v_2) = \varphi_1(u_1, v_1) + \varphi_2(u_2, v_2) + \varphi^d(u_2, v_2). \quad (14)$$

Далее, используя соотношения, приведённые в п.2.1, найдём компоненты отражённого луча  $\mathbf{p}_{23} = (p_x, p_y, p_z)^T$  как:

$$p_x = p_z \frac{u_2}{z_2} + \frac{u_2 z_1 - u_1 z_2}{z_2 \varphi_2(u_2, v_2)} + \frac{\varphi^d(u_2, v_2)}{u_2}, \quad (15)$$

$$p_y = p_z \frac{v_2}{z_2} + \frac{v_2 z_1 - v_1 z_2}{z_2 \varphi_2(u_2, v_2)}, \quad (16)$$

$$p_z = (-b + \sqrt{b^2 - ac})/a, \quad (17)$$

где

$$a = R_2^2 / z_2^2,$$

$$b = \frac{z_1(u_2^2 + v_2^2) - z_2(u_2 u_1 + v_2 v_1)}{z_2^2 \varphi_2(u_2, v_2)} + \frac{\varphi^d(u_2, v_2)}{z_2},$$

$$c = \frac{(u_2 z_1 - u_1 z_2 + z_2 \varphi_2(u_2, v_2) \varphi^d(u_2, v_2) / u_2)^2}{z_2^2 \varphi_2^2(u_2, v_2)} + \frac{(v_2 z_1 - v_1 z_2)^2}{z_2^2 \varphi_2^2(u_2, v_2)} - 1.$$

После отражения от малого зеркала луч движется в направлении большого зеркала. Координаты третьей точки пересечения  $\mathbf{r}_3 = (u_3, v_3, z_3)^T$  луча на первом зеркале определяются из соотношения:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + d_{23}\mathbf{p}_{23}, \quad (18)$$

$$\text{где } d_{23} = \sqrt{(\mathbf{p}_{23}, \mathbf{r}_2)^2 - R_2^2 + R_1^2} - (\mathbf{p}_{23}, \mathbf{r}_2).$$

Следует отметить, что координаты  $u_2, v_2$  есть функции от координат  $u_1, v_1$ . Это означает, что можно записать  $u_2 = U_2(u_1, v_1)$ ,  $v_2 = V_2(u_1, v_1)$ . По аналогии  $u_3 = U_3(u_2, v_2)$ ,  $v_3 = V_3(u_2, v_2)$ . Это приводит к зависимости:

$$\begin{aligned} u_3 &= U_3(U_2(u_1, v_1), V_2(u_1, v_1)), \\ v_3 &= V_3(U_2(u_1, v_1), V_2(u_1, v_1)). \end{aligned} \tag{19}$$

Запишем зависимость в более простом виде как  $u_3 = U_3(u_1, v_1)$ ,  $v_3 = V_3(u_1, v_1)$ . После прихода луча в точку  $u_3, v_3$  на большом зеркале эйкональная функция будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi(u_3, v_3) &= \varphi_1(u_1, v_1) + \varphi_2(u_2, v_2) + \\ &+ \varphi^d(u_2, v_2) + \varphi_3(u_3, v_3), \end{aligned} \tag{20}$$

где  $\varphi_3(u_3, v_3) = \sqrt{(u_3 - u_2)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (z_3 - z_2)^2}$ .

В результате мы получили выражение для расчёта значения эйконала на большом зеркале. Однако для вычисления функции рассеяния точки такая зависимость неудобна, так как мы получаем значения на сетке, узлы которой сложным образом зависят от узлов исходной сетки. Учитывая, что мы знаем  $U_k(u_1, v_1)$ ,  $V_k(u_1, v_1)$ , можно записать эйконал в конечной точке, как функцию от  $u_1, v_1$ . Обозначим его:

$$\begin{aligned} F(u_1, v_1) &= \varphi_1(u_1, v_1) + \varphi_2(U_2(u_1, v_1), V_2(u_1, v_1)) + \\ &+ \varphi^d(U_2(u_1, v_1), V_2(u_1, v_1)) + \\ &+ \varphi_3(U_3(u_1, v_1), V_3(u_1, v_1)). \end{aligned} \tag{21}$$

### 2.3. Вычисление функции рассеяния точки

Найдем комплексную амплитуду в плоскости регистратора в окрестности точки фокусировки. Величина амплитуды выражается с помощью интеграла Кирхгофа:

$$\begin{aligned} A(x, y, z) &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\Omega} A_3(u_3, v_3) C(x, y, z, u_3, v_3) \times \\ &\times \exp(ik\Phi(u_3, v_3)) \frac{\exp(ikR)}{R} d\sigma, \end{aligned} \tag{22}$$

где  $C(x, y, z, u_3, v_3)$  – коэффициент, учитывающий углы как вектора нормали к поверхности с направлением лучевых векторов, так и вектора нормали с выбранным направлением на плоскость регистратора, а

$$R = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + z_3^2}. \tag{23}$$

Для простоты примем, что  $C(x, y, z, u_3, v_3) = 1$ . После сведения поверхностного интеграла к двойному выражение (22) имеет вид:

$$A(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Delta} G(x, y, z, u_3, v_3) du_3 dv_3. \tag{24}$$

Имея связь между криволинейными координатами  $u_3 = U_3(u_1, v_1)$ ,  $v_3 = V_3(u_1, v_1)$ , перейдем к интегрированию от области переменных  $u_3, v_3$  к интегрированию в координатах  $u_1, v_1$ . Выражение для вычисления комплексной амплитуды приобретает вид:

$$A(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} P(x, y, z, u_1, v_1) J(u_1, v_1) du_1 dv_1, \tag{25}$$

где якобиан преобразования

$$J(u_1, v_1) = \left| \frac{\partial u_3}{\partial u_1} \frac{\partial v_3}{\partial v_1} - \frac{\partial u_3}{\partial v_1} \frac{\partial v_3}{\partial u_1} \right|, \tag{26}$$

а функция  $P(x, y, z, u_1, v_1)$  имеет вид

$$\begin{aligned} P(x, y, z, u_1, v_1) &= \\ &= A_3(u_1, v_1) \frac{\exp(ik(F(u_1, v_1) + R))}{R}. \end{aligned} \tag{27}$$

При  $\Delta u_1, \Delta v_1$  порядка длины волны функции (26), (27) изменяются медленно и интеграл можно вычислить приближённо,  $\Sigma$  – область интегрирования в переменных  $u_1, v_1$ . Данная область интегрирования определяется конусом лучей, падающих на большое зеркало.

### 2.4. Учёт щелевой диафрагмы при моделировании работы гиперспектрометра

Рассмотрим систему гиперспектрометра, состоящую из объектива и спектрометра. При большом удалении предметной плоскости объектив строит изображение в фокальной плоскости  $F$ , где располагается щелевая диафрагма и предметная плоскость спектрометра. Пусть в предметной плоскости объектива излучает когерентный точечный источник. После прохождения светового поля системы объектива на его выходной поверхности образуется поле  $E_0(\xi, \eta)$ , которое сходится в фокальной плоскости  $F$ , где находится щелевая диафрагма. После прохождения фокальной плоскости волна «дифрагирует» на щели и, расходясь, создаёт на первой поверхности большого зеркала спектрометра поле  $E_2(u, v, z)$ .

Поле  $E_1(x, y)$  в окрестности щели имеет вид:

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= \int S_0(\alpha, \beta) \exp(ik(\alpha x + \beta y)) \times \\ &\times \exp(ikF\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}) d\alpha d\beta, \end{aligned} \tag{28}$$

где разложение по углам поля на выходной поверхности объектива

$$\begin{aligned} S_0(\alpha, \beta) &= \\ &= \frac{k^2}{4\pi} \int E_0(\xi, \eta) \exp(-ik(\alpha\xi + \beta\eta)) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{29}$$

Подставляя (29) в (28), с учётом приближения Фраунгофера получаем выражение для поля в окрестности щели

$$E_1(x, y) = \frac{1}{i\lambda F} \int A(\xi, \eta) \times \exp\left(\frac{ik}{F}(\xi(x_0 - x) + \eta(y_0 - y))\right) d\xi d\eta, \quad (30)$$

где  $(x_0, y_0)$  – точка фокусировки волны в плоскости щели, а  $A(\xi, \eta)$  – комплексная амплитуда на выходной поверхности объектива [9].

Тогда поле на первой поверхности зеркала спектрометра можно найти из выражения:

$$E_2(u, v, z) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-0,5d}^{0,5d} \int_{-0,5L}^{0,5L} E_1(x, y) \frac{z}{R_2^2} \exp(ikR_2) dx dy, \quad (31)$$

где  $d$  и  $L$  – ширина и длина щели соответственно, а

$$R_2 = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}.$$

Рассмотрим далее расчёт ФРТ гиперспектрометра на основе соотношений, приведённых в п. 2.1 – 2.4.

### 3. Моделирование работы гиперспектрометра в рамках скалярной волновой теории и проверка результатов расчётов

#### 3.1. Расчёт поля после дифракции на щели

Пусть объектив является дифракционно ограниченным (абберации отсутствуют), а пропускание по зрачку объектива единичное. Для определения ограничений светового пучка (для заданной точки фокусировки) можно использовать модель трассировки лучей. Расчёт проведём с использованием параметров зеркально-линзового объектива с  $f=300$  мм, который имеет апертуру в форме кольца.

Расчитанное по формулам (30) и (31) угловое распределение интенсивности (для  $\lambda=700$  нм) после дифракции на щелевой диафрагме (шириной 11 мкм) для данного объектива показано на рис. 2б. На рис. 2а показано расчётное распределение интенсивности без учёта центрального экранирования объектива, которое немного отличается от приведённого распределения в работе [19] с другими параметрами расчёта.

Для оценки правильности результатов расчётов получим соотношения, позволяющие оценить характер распределения поля после дифракции на щели.

Выражение для поля на щели (30) запишем в виде:

$$E_1(\alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{i\lambda F} \times \int A(\xi, \eta) \exp(2\pi i(\xi\alpha_1 + \eta\beta_1)) d\alpha_1 d\beta_1, \quad (32)$$

где  $\alpha_1 = \lambda F^{-1}(x_0 - x)$ ,  $\beta_1 = \lambda F^{-1}(y_0 - y)$ .

Из выражения (32) видно, что  $E_1$  есть преобразование Фурье от функции зрачка объектива. Для зрачка в форме кольца ( $R_{01}, R_{02}$  – большой и малый радиусы) с точностью до константы:

$$E_1(x_1, y_1) = R_{01}^2 \frac{J_1(k\rho R_{01} F^{-1})}{k\rho R_{01} F^{-1}} - R_{02}^2 \frac{J_1(k\rho R_{02} F^{-1})}{k\rho R_{02} F^{-1}}, \quad (33)$$

где  $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ .

Пусть  $d(x, y)$  – функция пропускания щели спектрометра, тогда из (31) получаем:

$$E_2(\alpha_2, \beta_2, z) = C(z) \int E_1(x, y) d(x, y) \times \exp(2\pi i(\alpha_2 x + \beta_2 y)) d\alpha_2 d\beta_2 = C(z) \int A_1(\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2) D(\alpha_2 + \tilde{\alpha}_2, \beta_2 + \tilde{\beta}_2) d\tilde{\alpha}_2 d\tilde{\beta}_2. \quad (34)$$

Из выражения (34) видно, что после дифракции на щели поле представляется как корреляция зрачковой функции объектива и Фурье-образа функции щели спектрометра.

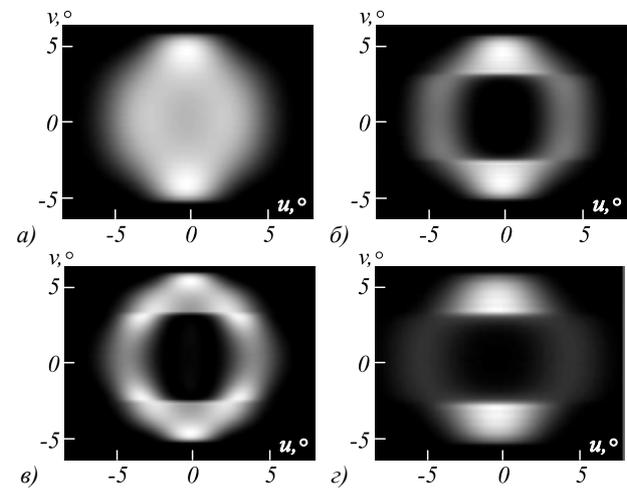


Рис. 2. Угловое распределение интенсивности для пучка (после дифракции на щели шириной 11 мкм) без учёта центрального экранирования ( $\lambda=700$  нм) (а), с учётом центрального экранирования: для длин волн 700 нм (б), 500 нм (в) и 900 нм (г)

Пусть щелевая диафрагма имеет бесконечную длину и конечную ширину  $b$ , тогда из (34) с точностью до константы получим

$$E_2(\alpha_2, \beta_2, z) = \int A_1(\tilde{\alpha}_2, \beta_2) \text{SINC}\left(\frac{\pi b(\alpha_2 + \tilde{\alpha}_2)}{\lambda z}\right) d\tilde{\alpha}_2. \quad (35)$$

На рис.3 показаны нормированные профили углового распределения интенсивности (для  $\lambda=700$  нм) в плоскости  $E_2(u, 0)$  для двух случаев. Сплошной линией показана зависимость, полученная аналитически из (35), пунктирной линией – полученная моделированием рис. 2б. Из рисунка видно, что расчёты с результатами моделирования сходятся.

Из (35) видно, что угловое распределение интенсивности в меридиональном направлении прямо про-

порционально ширине щели и обратно пропорционально длине волны. После дифракции на щели пучка с  $\lambda = 500$  нм в спектрометр попадает пучок с апертурной функцией, близкой к форме кольца рис. 2в. При увеличении длины волны  $\sim$  в 2 раза до  $\lambda = 900$  нм распределение после дифракции заметно увеличивается в меридиональном направлении (рис. 2г).

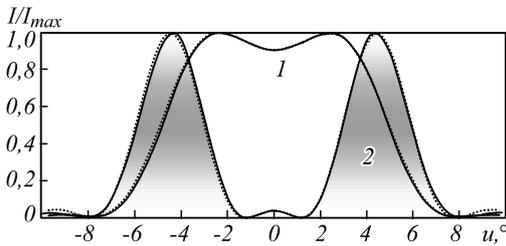


Рис. 3. Профили (перпендикулярно щели) углового распределения интенсивности для пучка без учёта (1) и с учётом (2) центрального экранирования

### 3.2. Проверочный расчёт ФРТ гиперспектрометра по схеме Оффнера

Расчёт ФРТ проведём в +1 порядке дифракции ( $\lambda = 700$  нм) для схемы Оффнера с радиусами зеркал  $R_1 = -159,6$  мм и  $R_2 = -80,6$  мм с дифракционной решёткой ( $\lambda_d = 640$  нм, частота штрихов – 30 лин/мм).

На рис. 4 и 6 показаны ФРТ для случаев расчёта без учёта и с учётом экранирования пучка вторичным зеркалом объектива. В случаях учёта щели при расчётах ФРТ в качестве зрачковой функции  $A_3(u_1, v_1)$  (27) для первого случая бралось распределение, изображённое на рис. 2а, а во втором – рис. 2б. Частотно-контрастные характеристики (ЧКХ) для двух случаев расчёта показаны на рис. 5 и 7. На изображениях ось  $x$  совпадает с направлением дисперсии и спектрометра (вдоль ширины щели). Ось  $y$  совпадает с сагиттальным направлением  $v$  (вдоль длины щели).

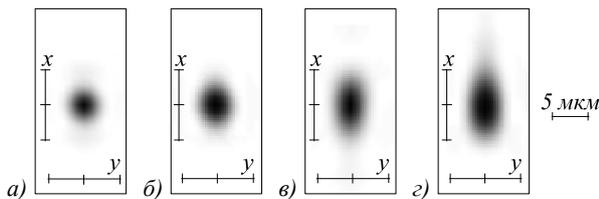


Рис. 4. ФРТ ( $\lambda = 700$  нм) без учёта центрального экранирования пучка при разных параметрах расчёта: без учёта щели и решётки (а); с учётом щели (б); с учётом решётки (в); с учётом щели и решётки (г)

Рассмотрим первый расчётный случай (рис. 4, 5). В случае (а) ФРТ имеет малый уровень aberrаций в меридиональном и дифракционно ограничена в сагиттальном направлении. Учёт щели (б) приводит к небольшому ухудшению ЧКХ в меридиональном направлении.

Учёт дифракционной решётки (в) приводит к большому астигматизму ФРТ и уменьшению диапазона пространственных частот в меридиональном направлении. Учёт щели и решётки (г) приводит к

небольшому ухудшению ЧКХ для меридионального направления по сравнению со случаем (в). Однако для всех случаев (а–г) в сагиттальном направлении ЧКХ соответствует дифракционно-ограниченной системе с круглым зрачком, что согласуется с теорией спектральных приборов [10, 11].

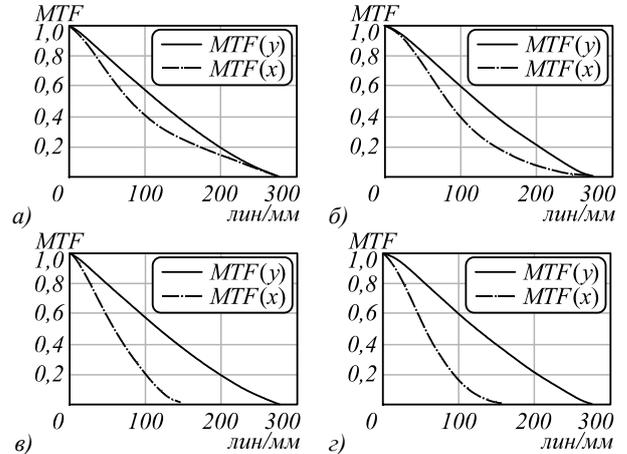


Рис. 5. ЧКХ, соответствующие ФРТ ( $\lambda = 700$  нм) без учёта центрального экранирования пучка при разных параметрах расчёта: без учёта щели и решётки (а); с учётом щели (б); с учётом решётки (в); с учётом щели и решётки (г)

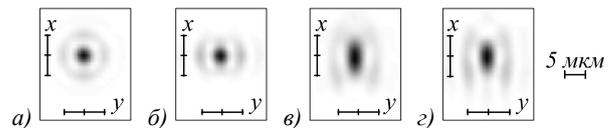


Рис. 6. ФРТ ( $\lambda = 700$  нм) с учётом центрального экранирования пучка при разных параметрах расчёта: без учёта щели и решётки (а); с учётом щели (б); с учётом решётки (в); с учётом щели и решётки (г)

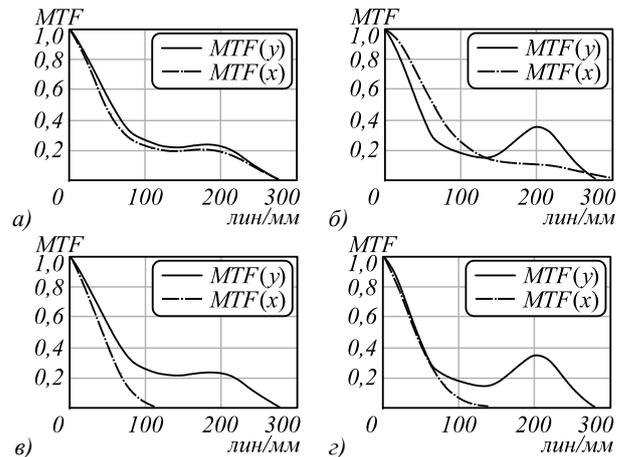


Рис. 7. ЧКХ, соответствующие ФРТ ( $\lambda = 700$  нм) с учётом центрального экранирования пучка при разных параметрах расчёта: без учёта щели и решётки (а); с учётом щели (б); с учётом решётки (в); с учётом щели и решётки (г)

Рассмотрим второй расчётный случай (рис. 6, 7). ФРТ в случае (а) соответствует практически дифракционно-ограниченной системе со зрачком в форме кольца и аналитически описывается как модуль функции (33) с учётом нормировки. Учёт щели в рас-

чѐтах (б) приводит к увеличению aberrаций из-за неравномерного пропускания по зрачку, при этом на ЧКХ для сагиттального направления снижается контраст на средних и увеличивается на высоких пространственных частотах. На ЧКХ для меридионального направления видно увеличение контраста на низких и уменьшение контраста на средних и высоких пространственных частотах. Учѐт при расчѐтах дифракционной решѐтки (в), как и в первом случае, приводит к увеличению астигматизма ФРТ в меридиональном направлении. В случае (з) показана ФРТ с учѐтом aberrаций, в меридиональном направлении вызванных астигматизмом решѐтки и в сагиттальном направлении – неравномерным пропусканием по зрачку из-за дифракции на щели.

Рассмотрим далее, как во втором случае изменение длины волны при фиксированной ширине щели 11 мкм влияет на результаты расчѐта ФРТ и ЧКХ.

### 3.3. Сравнение результатов расчѐта ФРТ

На рис. 8 показаны результаты расчѐта ФРТ в приближении волновой и геометрической оптики. Виден астигматизм пятен в меридиональном направлении, что говорит о том, что плоскость изображения гиперспектрометра совпадает с сагиттальным фокусом системы. Для  $\lambda = 500$  нм в качестве зрачковой функции в (27) использовалось распределение из рис. 2в, для  $\lambda = 700$  нм – (рис. 2б), для  $\lambda = 900$  нм – рис. 2г. Если при  $\lambda = 500$  нм рис. 2в зрачковая функция близка к кольцевому распределению, то с увеличением длины волны происходит большое уширение пучка поперѐк щели и относительное уменьшение интенсивности в центральной области апертурной

функции (рис. 2б и з). Это приводит к уменьшению контраста на средних и увеличению контраста на высоких пространственных частотах в сагиттальном направлении плоскости изображения (рис. 9), при этом на ФРТ появляются дополнительные дугообразные полосы рис. 8а–в. Дифракционное ограничение пространственных частот в сагиттальном направлении определяется апертурой объектива. Из выражения  $\nu_v = D/f\lambda$  получаем для трёх длин волн 400 лин/мм, 285,7 лин/мм, 222,2 лин/мм, что соответствует графикам на рис. 9. В меридиональном направлении ЧКХ соответствует оптической системе с астигматизмом.

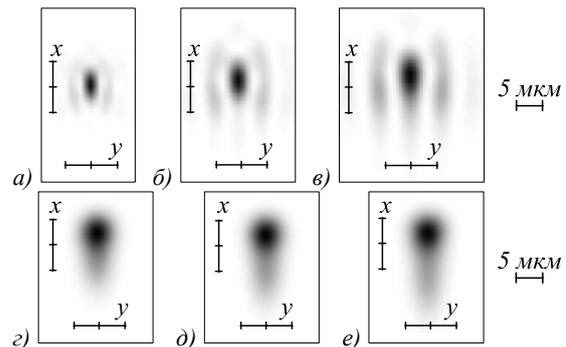


Рис. 8. ФРТ на длинах волн 500 нм (а, з), 700 нм (б, д), 900 нм (в, е). Вверху в приближении волновой оптики, внизу – в приближении геометрической оптики

Расчѐты в приближении геометрической оптики практически не обнаруживают изменений передаточных характеристик при увеличении длины волны (рис. 10). В меридиональном направлении также виден астигматизм. В сагиттальном направлении ЧКХ соответствует ФРТ, имеющей форму Гауссовой функции.

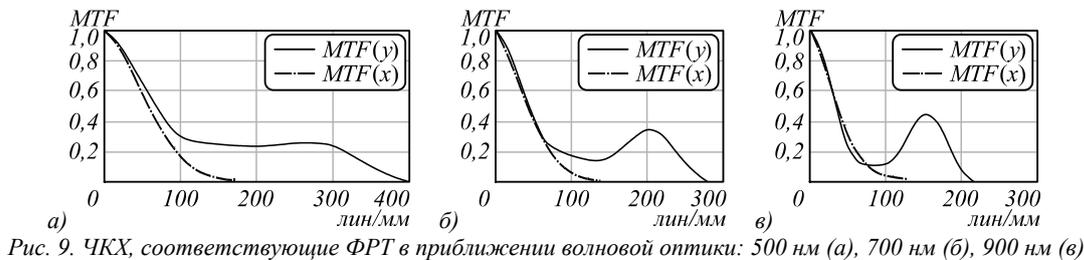


Рис. 9. ЧКХ, соответствующие ФРТ в приближении волновой оптики: 500 нм (а), 700 нм (б), 900 нм (в)

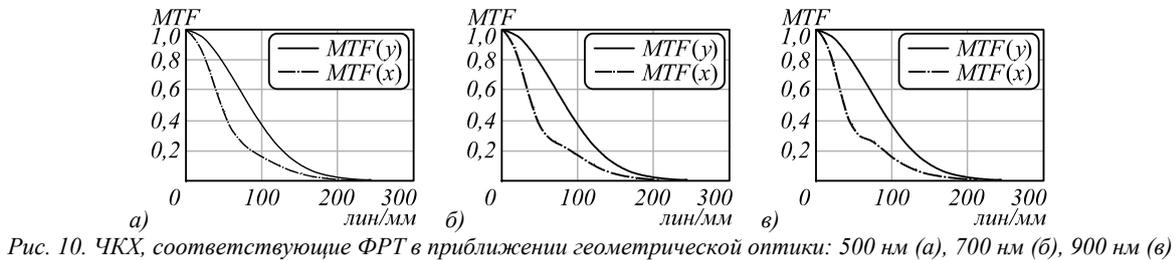


Рис. 10. ЧКХ, соответствующие ФРТ в приближении геометрической оптики: 500 нм (а), 700 нм (б), 900 нм (в)

### Заключение

В настоящей статье разработан метод расчѐта ФРТ гиперспектрометра по схеме Оффнера в приближении скалярной волновой теории. Проведена проверка результатов моделирования с использованием аналити-

ческих соотношений. ФРТ, полученные в приближении волновой и геометрической оптики, обнаруживают астигматизм в направлении дисперсии спектрометра, что соответствует результатам экспериментальных исследований, приведѐнных в [18]. В работе показано, что астигматизм обусловлен использовани-

ем дифракционной решётки в системе Оффнера. В работе также показано влияние ширины щелевой диафрагмы на ФРТ и ЧКХ для различных длин волн. Из полученных результатов следует, что фиксированная ширина щели позволяет получать качественное изображение только в заданном диапазоне длин волн. Выход за пределы диапазона при заданных параметрах расчёта приводит к уменьшению контраста в области средних частот и увеличению контраста в области высоких пространственных частот в плоскости изображения.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части создания математического аппарата, используемого при моделировании работы гиперспектрометра в рамках скалярной волновой теории, и Российского научного фонда (проект № 20-69-47110) в части моделирования работы гиперспектрометра в рамках скалярной волновой теории и проверки результатов расчёта.

### References

[1] Offner A. New concepts in projection mask aligners. *Opt Eng* 1975; 14(2): 130-132.  
 [2] Chrisp MP. Convex diffraction grating imaging spectrometer. U.S. Patent 5,880,834; 1999.  
 [3] Davis C, Bowles J, Leathers R, Korwan D, Downes TV, Snyder W, Rhea W, Chen W, Fisher J, Bissett P, Reisse RA. Ocean PHILLS hyperspectral imager: design, characterization, and calibration. *Opt Express* 2002; 10(4): 210-221.  
 [4] Mouroulis P, Sellar RG, Wilson DW, Shea JJ, Green RO. Optical design of a compact imaging spectrometer for planetary mineralogy. *Opt Eng* 2007; 46(6): 063001.  
 [5] Haring RE, Vanstone GC, Nguyen F, Rodil CA. Optomechanical Design of the incubator wide field of view imaging spectrometer. *Proc SPIE* 2000; 4093. DOI: 10.1117/12.405199.

[6] Lee JH, Kang KI, Park JH. A very compact imaging spectrometer for the micro-satellite STSAT3. *Int J Remote Sens* 2011; 32(14): 3935-3946.  
 [7] Mouroulis P, Green RO. Review of high fidelity imaging spectrometer design for remote sensing. *Optical Systems Engineering* 2018; 54(4): 040901.  
 [8] Zavarzin VI, Li AV. Methodology for calculating the apparatus function of hyperspectral equipment for remote sensing of the Earth [In Russian]. *Bulletin of MSTU Imeni NE Bauman, Ser Instrumentation* 2012; Special Issue: 82-89.  
 [9] Domnenko VM, Bursov MV, Ivanova TV. Modeling the formation of an optical image. Textbook [In Russian]. Saint-Petersburg: "NRU ITMO" Publisher; 2011.  
 [10] Peisakhon IV. Optics of spectral devices [In Russian]. Leningrad: "Mashinostroenie" Publisher; 1975.  
 [11] Skokov IV. Optical spectral devices: Textbook [In Russian]. Moscow: "Mashinostroenie" Publisher; 1984.  
 [12] Tao D, Jia G, Yuan Y, Zhao H. A digital sensor simulator of the pushbroom Offner hyperspectral imaging spectrometer. *Sensors* 2014; 14: 23822-23842.  
 [13] Rozhdestvensky DS. Coherence of rays in the formation of an image in a microscope [In Russian]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 1940; 10: 305-330.  
 [14] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Doskolovich LL, Pavelyev AV. Modeling the performance of a spaceborne hyperspectrometer based on the Offner scheme. *Computer Optics* 2015; 39(1): 70-76. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-1-70-76.  
 [15] Karpeev SV, Khonina SN, Kharitonov SI. Study of the diffraction grating on a convex surface as a dispersive element. *Computer Optics* 2015; 39(2): 211-217. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-2-211-217.  
 [16] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Karsakov SI, Khonina SN. Modeling action of a hyperspectrometer based on the Offner scheme within geometric optics. *Computer Optics* 2014; 38(2): 271-280. DOI: 10.18287/0134-2452-2014-38-2-271-280.  
 [17] Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Gornostay AV, Strelkov YuS. Modeling the reflection of electromagnetic waves at diffraction gratings applied on a freeform surfaces. *Proc SPIE* 2018; 10774: 107740F. DOI: 10.1117/12.2315797.  
 [18] Kazanskiy N, Ivliev N, Podlipnov V, Skidanov R. An airborne Offner imaging hyperspectrometer with radially-fastened primary elements. *Sensors* 2020; 20(12): 3411. DOI: 10.3390/s20123411.  
 [19] Silny JF. Resolution modeling of dispersive imaging spectrometers. *Proc SPIE* 2016; 9976: 99760A.

### Сведения об авторах

**Расторгуев Андрей Алексеевич** 1984 года рождения, в 2006 году окончил физический факультет Самарского государственного университета по специальности «Оптика», работает ведущим инженером конструктором в отделе целевой эффективности, подтверждения основных ТТХ КК и КС, гиперспектральных комплексов и методического обеспечения решения целевых задач. Область научных интересов: дистанционное зондирование Земли, моделирование работы гиперспектральной аппаратуры. E-mail: [goto.anras@gmail.com](mailto:goto.anras@gmail.com).

**Харитонов Сергей Иванович** 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры наноинженерии, ведущий научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Казанский Николай Львович** в 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет)) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 г.), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

---

*ГРНТИ: 29.31.29*

*Поступила в редакцию 31 августа 2021 г. Окончательный вариант – 20 октября 2021 г.*

---

---

# Numerical simulation of the performance of a spaceborne Offner imaging hyperspectrometer in the wave optics approximation

A.A. Rastorguev<sup>1</sup>, S.I. Kharitonov<sup>2,3</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Joint Stock Company "Rocket and Space Center" Progress", Samara, Russia;

<sup>2</sup> IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

<sup>3</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

We propose a method for calculating the point scattering function (PSF) of an Offner imaging hyperspectrometer with a diffraction grating in the approximation of scalar diffraction theory. The method consistently takes into account limitations and diffraction of a light beam by elements of the hyperspectrometer system in accordance with the physics of image formation. The PSF of the Offner imaging hyperspectrometer is numerically simulated at various beam parameters and wavelengths. The simulation results are verified using analytical relationships, a geometrical optics approach, as well as a comparison with the related works of other researchers.

**Keywords:** Offner's scheme, diffraction grating, wave optics, Kirchhoff integral, hyperspectrometer imaging, spectrometer.

**Citation:** Rastorguev AA, Kharitonov SI, Kazanskiy NL. Numerical simulation of the performance of a spaceborne Offner imaging hyperspectrometer in the wave optics approximation. *Computer Optics* 2022; 46(1): 56-64. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1034.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the RF Ministry of Science and Higher Education under a government project of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (development of mathematical tools for the numerical simulation of the performance of the Offner hyperspectrometer within scalar wave theory) and the Russian Science Foundation under project No 20-69-47110 (modeling the performance of the hyperspectrometer in using the scalar wave theory and verification of the calculation results).

---

## Authors' information

**Andrey Alekseevich Rastorguev** (b. 1984), in 2006 graduated from Physics department of Samara State University, specializing in Optics. He has been working as a leading design engineer with the Progress Center at the department of target efficiency, confirmation of the main performance characteristics of spacecraft and spacecraft, hyperspectral complexes and methodological support for solving target problems. Areas of scientific interests: earth remote sensing, modeling of hyperspectral equipment. E-mail: [goto.anras@gmail.com](mailto:goto.anras@gmail.com).

**Sergey Ivanovich Kharitonov** (b. 1961) leading researcher of Diffractive Optics laboratory in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University (presently, Samara National Research University). 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of S.I. Kharitonov scientific papers includes 87 articles, 5 patents. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Nikolay Lvovich Kazanskiy** graduated with honors (1981) from Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Mathematics (1996) degrees from Samara University. He is the Head of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics RAS", also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics department of Samara University, holding the chair at the of High-Performance Computing department at IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics RAS". He is a member of OSA, SPIE and IAPR. He co-authored 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.

Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

---

Received August 31, 2021. The final version – October 20, 2021.

---