# Спин-орбитальное преобразование светового поля сразу за идеальной сферической линзой

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалев<sup>1,2</sup>, С.С. Стафеев<sup>1,2</sup>, Е.С. Козлова<sup>1,2</sup>, А.М. Телегин<sup>2</sup> <sup>1</sup>Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

#### Аннотация

Формулы Ричардса-Вольфа не только адекватно описывают световое поле в остром фокусе, но и позволяют описать световое поле сразу за идеальной сферической линзой, то есть на сходящемся сферическом волновом фронте. Зная все проекции векторов напряженности светового поля сразу за линзой, можно найти продольные компоненты спинового и орбитального угловых моментов. При этом продольная проекция спинового углового момента сразу за линзой либо остается нулем, либо уменьшается. Это означает, что сразу за линзой проявляется эффект спин-орбитального преобразования, когда часть «спина переходит в орбиту». При этом сумма продольных проекций спинового и орбитального угловых моментов сохраняется. Что касается спинового эффекта Холла, то он не формируется сразу за линзой, а появляется по мере фокусировки. То есть сразу за линзой нет эффекта Холла, а в фокусе он максимальный. Это происходит потому, что сразу за линзой формируются два оптических вихря с топологическими зарядами 2 и – 2 и со спином разного знака, то есть с левой и правой круговой поляризацией. Но так как амплитуды этих вихрей одинаковые, то суммарный спин равен нулю. По мере фокусировки и в самом фокусе амплитуда у оптических вихрей становится разной, и поэтому появляются области со спином разного знака (эффект Холла). Например, если в начальном поле присутствовал оптический вихрь с топологическим зарядом n и линейной поляризацией, то сразу за линзой появятся два дополнительных оптических вихря с топологическими зарядами n+2 и n-2 и разными спинами. Эти вихри распространяются с разной расходимостью, и поэтому в фокусе будут иметь разную амплитуду, и их спины уже не будут компенсировать друг друга. Также найден общий вид начальных световых полей, у которых в фокусе продольная компонента поля нулевая. В этом случае у вектора спинового углового момента отличной от нуля может быть только продольная компонента. Вектор спинового углового момента, вытянутый в фокусе только вдоль оптической оси, используют в задачах магнетизации.

<u>Ключевые слова</u>: спиновый угловой момент, орбитальный угловой момент, топологический заряд, эффект Холла, спин-орбитальная конверсия, формулы Ричардса – Вольфа, острая фокусировка.

<u>Цитирование</u>: Котляр, В.В. Спин-орбитальное преобразование светового поля сразу за идеальной сферической линзой / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, С.С. Стафеев, Е.С. Козлова, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 3. – С. 325-333. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1447.

<u>Citation</u>: Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Kozlova ES, Telegin AM. Spin-orbital conversion of the light field immediately behind an ideal spherical lens. Computer Optics 2024; 48(3): 325-333. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1447.

#### Введение

В современной оптике много внимания уделяется эффектам спин-орбитальной конверсии и спиновому эффекту Холла. Эти фундаментальные и универсальные эффекты заключаются в том, что свет с круговой поляризацией, когда отражается или проходит через градиентные (неоднородные) среды, приобретает поперечный сдвиг [1, 2]. Если свет с правой круговой поляризацией, который обладает положительным спиновым угловым моментом (СУМ), проходит через *q*-пластину [3] или через элемент с метаповерхностью [4], то на выходе появляется оптический вихрь с левой круговой поляризацией, который обладает орбитальным угловым моментом (ОУМ). С этим эффектом связаны многие другие оптические эффекты, например, эффект «оптических колес» [5], оптический эффект Магнуса [6], эффект магнетизации [7]. Оптический эффект Холла впервые был обнаружен в 2007 году [8]. В [8] свет с линейной поляризацией после прохождения через многослойный микрорезонатор в дальней зоне дифракции формировал пучок в виде узкого кольца интенсивности, на котором были области с левой и правой эллиптической поляризацией. Преобразование светового пучка с начальной линейной поляризацией в пучок, в котором имеются области с разным спином, то есть области с левой и правой круговой поляризацией, и называется спиновым эффектом Холла [9]. Оптический эффект Холла наблюдали при отражении от раздела сред [10], при прохождении многослойных структур [11] и метаповерхностей [12, 13], а также в фокусе сферической линзы [14].

В данной работе с помощью теории Ричардса– Вольфа [15] мы детально исследуем прохождение света через сферическую линзу и вызванное этим преобразование продольных составляющих плотности СУМ и ОУМ. Мы покажем, что спин-орбитальная конверсия происходит сразу за линзой, а спиновый эффект Холла сразу за линзой равен нулю и достигает своего максимума в фокусе. Мы также приведем общий вид начального светового поля, у которого в фокусе нет продольной проекции вектора напряженности электрического поля. У таких полей вектор спина и пропорциональный ему вектор магнетизации имеют только продольную проекцию и направлены вдоль оптической оси.

# 1. Плотность спина, орбитальный угловой момент и поток энергии сразу за сферической линзой

Согласно теории Ричардса–Вольфа [15, 16] все проекции светового поля вблизи острого фокуса описываются с помощью интегралов вида:

$$\mathbf{E}(\rho, \psi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} B(\theta, \varphi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \varphi) \times \\ \times \exp\left\{ik \left[\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi) + z \cos \theta\right]\right\} \sin \theta d\theta d\varphi,$$
(1)

где **E** ( $\rho$ ,  $\psi$ , z) – напряжённость электрического и магнитного полей в фокусе,  $B(\theta, \phi)$  – амплитуда электрического поля во входном зрачке широкоапертурной оптической системы ( $\theta$  – полярный угол,  $\phi$  – азимутальный),  $T(\theta)$  – функция аподизации линзы, f – фокусное расстояние,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны (в моделировании считалась равной 532 нм),  $\alpha$  – максимальный полярный угол, определяемый числовой апертурой линзы (NA = sin  $\alpha$ ), **P** ( $\theta$ ,  $\phi$ ) – вектор поляризации для напряжённости электрического и магнитного полей сразу за сферической линзой, имеющий вид:

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^{2} \phi(\cos \theta - 1) \\ \sin \phi \cos \phi(\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \cos \phi \end{bmatrix} a(\theta, \phi) + \\ + \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \phi(\cos \theta - 1) \\ 1 + \sin^{2} \phi(\cos \theta - 1) \\ -\sin \theta \sin \phi \end{bmatrix} b(\theta, \phi),$$
(2)

где  $a(\theta, \phi)$  и  $b(\theta, \phi) - \phi$ ункции, описывающие состояние поляризации *х*- и *у*-компонент напряжённостей начального (сразу перед линзой) электрического поля

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$
(3)

и магнитного поля

$$H(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -b(\theta, \varphi) \\ a(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$
 (4)

Функция аподизации рефракционной линзы имеет вид  $T(\theta) = \cos(\theta)^{1/2}$ , а если линза дифракционная (зонная пластинка Френеля), то функция аподизации имеет другой вид  $T(\theta) = \cos(\theta)^{-3/2}$  [17].

Из соотношений (2)-(4) получим проекции светового поля сразу за сферической линзой, то есть проекции векторов напряженности светового поля на сферическом волновом фронте:

$$E_{x} = (1 + C(\theta)\cos^{2}\phi)a(\phi) + \frac{C(\theta)\sin(2\phi)}{2}b(\phi),$$

$$E_{y} = \frac{C(\theta)\sin(2\phi)}{2}a(\phi) + (1 + C(\theta)\sin^{2}\phi)b(\phi),$$

$$E_{z} = -\sin\theta(a(\phi)\cos\phi + b(\phi)\sin\phi),$$

$$H_{x} = -(1 + C(\theta)\cos^{2}\phi)b(\phi) + \frac{C(\theta)\sin(2\phi)}{2}a(\phi), (5)$$

$$H_{y} = -\frac{C(\theta)\sin(2\phi)}{2}b(\phi) + (1 + C(\theta)\sin^{2}\phi)a(\phi),$$

$$H_{z} = -\sin\theta(-b(\phi)\cos\phi + a(\phi)\sin\phi),$$

$$C(\theta) = \cos\theta - 1.$$

Зная проекции светового поля сразу за сферической линзой, можно найти плотность спина или продольную проекцию вектора спинового углового момента сразу за линзой:

$$S_{z}(\theta,\phi) = 2\operatorname{Im}(E_{x}^{*}E_{y}) = 2\cos\theta\operatorname{Im}(a^{*}b)$$
(6)

и продольную проекцию вектора орбитального углового момента сразу за линзой:

$$L_{z} = \operatorname{Im}\left(E_{x}^{*}\frac{\partial E_{x}}{\partial \varphi} + E_{y}^{*}\frac{\partial E_{y}}{\partial \varphi} + E_{z}^{*}\frac{\partial E_{z}}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= 2(1 - \cos\theta)\operatorname{Im}(a^{*}b) + (1 - 2\sin^{2}\theta\cos^{2}\varphi) \times$$

$$\times \operatorname{Im}\left(a^{*}\frac{da}{d\varphi}\right) - \sin^{2}\theta\sin^{2}\varphi\operatorname{Im}\left(a^{*}\frac{db}{d\varphi}\right) +$$

$$+ (1 - 2\sin^{2}\theta\sin^{2}\varphi)\operatorname{Im}\left(b^{*}\frac{db}{d\varphi}\right) -$$

$$-\sin^{2}\theta\sin^{2}\varphi\operatorname{Im}\left(b^{*}\frac{da}{d\varphi}\right).$$
(7)

Напомним, что вектор СУМ определяется выражением [18]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi\omega} \operatorname{Im} \left( \mathbf{E}^* \times \mathbf{E} \right), \tag{8}$$

где  $\omega$  – угловая частота света. А вектор ОУМ определяется следующим выражением [19]:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{8\pi\omega} \sum_{p=x,y,z} \operatorname{Im} \left( E_p^* \left( \mathbf{r} \times \nabla \right) E_p \right).$$
(9)

Постоянную 1/(8πω) в (8) и (9) будем опускать. Аналогично (6) и (7) можно найти поперечные и продольные проекции вектора Пойнтинга (потока энергии) сразу за линзой. Вектор Пойнтинга определяется выражением [15]:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \right), \tag{10}$$

где Е и Н – векторы напряжённости электрического и магнитного полей, знаки «\*» и «×» – комплексное сопряжение и векторное произведение, Re и Im – действительная и мнимая части комплексного числа, а c – скорость света в вакууме. Далее будем опускать константу  $c/(2\pi)$ . Подставим (5) в (10), получим:

$$P_{x} = \sin \theta \left( \left| a \right|^{2} + \left| b \right|^{2} \right) \cos \varphi,$$
  

$$P_{y} = \sin \theta \left( \left| a \right|^{2} + \left| b \right|^{2} \right) \sin \varphi,$$
  

$$P_{z} = \cos \theta \left( \left| a \right|^{2} + \left| b \right|^{2} \right).$$
(11)

Используя радиальную (*P<sub>r</sub>*) и азимутальную (*P<sub>φ</sub>*) проекции вектора Пойнтинга, вместо (11) запишем:

/ -

• •

$$P_{r} = \sin \theta \left( \left| a \right|^{2} + \left| b \right|^{2} \right),$$

$$P_{\phi} = 0,$$

$$P_{z} = \cos \theta \left( \left| a \right|^{2} + \left| b \right|^{2} \right).$$
(12)

В заключение этого параграфа приведем выражения для найденных здесь величин сразу перед линзой, то есть в начальной плоскости. Используя проекции векторов начального поля (3) и (4) и определения (8)–(10), получим:

$$S_{0z} = 2 \operatorname{Im}(a^*b),$$

$$L_{0z} = \operatorname{Im}\left(a^* \frac{da}{d\varphi} + b^* \frac{db}{d\varphi}\right),$$

$$P_{0z} = |a|^2 + |b|^2.$$
(13)

# 2. Спин-орбитальное преобразование сразу за сферической линзой

Из сравнения первого уравнения в (13) и уравнения (6) видно, что сразу за линзой продольная плотность спина уменьшилась:

$$S_{z}(\theta,\phi) = 2\cos\theta \operatorname{Im}(a^{*}b) \le 2\operatorname{Im}(a^{*}b) = S_{0z}.$$
 (14)

Это означает, что сразу за сферической линзой происходит спин-орбитальное преобразование и «часть спина переходит в орбиту». Уравнение (7) громоздкое, поэтому мы докажем предыдущее утверждение для случая, когда начальное поле не зависит от азимутального угла (например, плоская волна с круговой поляризацией). То есть *a* и *b* в (3) и (4) – это комплексные величины. Тогда получим ( $0 < \theta < \pi/2$ ):

$$L_{0z} = 0,$$
  

$$L_z = 2(1 - \cos\theta) \operatorname{Im}(a^*b).$$
(15)

Из (15) видно, что у начального поля ОУМ был равен нулю, а сразу за линзой продольная компонента ОУМ отлична от нуля. Причем сумма продольных СУМ и ОУМ сохранилась и равна начальной продольной проекции СУМ:

$$L_z + S_z = 2(1 - \cos\theta)\operatorname{Im}(a^*b) + + 2\cos\theta\operatorname{Im}(a^*b) = 2\operatorname{Im}(a^*b) = S_{0z}.$$
(16)

То есть уменьшение начального СУМ сразу после линзы (14) означает появление у пучка ОУМ (15). Причем величина ОУМ равна величине, на которую уменьшился СУМ, так, что сумма ОУМ и СУМ сохраняется после линзы. Заметим, что после линзы только радиальный поток энергии (12) отличен от нуля, так как свет сходится в фокус, а азимутальный поток равен нулю. Однако появление ОУМ сразу после линзы означает, что поперечный азимутальный поток энергии начинает возрастать и в фокусе достигает наибольшего значения, которое для начального поля с круговой поляризацией равно [20]:

$$P_{\varphi} = I_{1,1} \left( I_{0,0} + I_{2,2} \right). \tag{17}$$

Функции  $I_{\nu,\mu}$  в (17) обозначают следующие интегралы, где первый индекс – тип интеграла ( $\nu = 0, 1, 2$ ), а второй индекс ( $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ ) равен порядку функции Бесселя  $J_{\mu}(\xi)$  под интегралом:

$$I_{\nu,\mu} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda}\right) \int_{0}^{\theta_{0}} \sin^{\nu+1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{3-\nu}\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \cos^{1/2}\left(\theta\right) A(\theta) e^{ikz\cos\theta} J_{\mu}(\xi) d\theta,$$
(18)

где f — фокусное расстояние сферической линзы, ( $r, \varphi, z$ ) — цилиндрические координаты,  $\theta_0$  — максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий числовую апертуру апланатической линзы NA = sin ( $\theta_0$ ),  $\xi = kr \sin(\theta)$ .

Рассмотрим другой частный случай. Пусть функция  $a(\phi)$  зависит от азимутального угла  $\phi$ , а *b* равна нулю. Этому случаю соответствует начальное вихревое поле с линейной поляризацией:

,

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \exp(in\varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
(19)

где *n* – топологический заряд вихревого поля. Тогда в начальной плоскости СУМ будет равен нулю, а ОУМ отличен от нуля:

$$S_{0z} = 0,$$

$$L_{0z} = \operatorname{Im}\left(a^* \frac{da}{d\varphi}\right) = n,$$

$$P_{0z} = |a|^2.$$
(20)

Сразу за линзой для начального поля (19) получим:

$$S_{z} = 0,$$

$$L_{z} = (1 - 2\sin^{2}\theta\cos^{2}\phi)\operatorname{Im}\left(a^{*}\frac{da}{d\phi}\right),$$

$$P_{z} = \cos\theta|a|^{2}.$$
(21)

Из (21) видно, что СУМ после линзы будет попрежнему нулевой, а продольная проекция ОУМ уменьшается по сравнению с начальной плоскостью (20) и зависит от азимутального угла.

# 3. Усиление эффекта Холла по мере фокусировки

Из (5) видно, что сразу после линзы поперечные проекции электрического поля будут иметь вид:

$$\mathbf{E}_{\perp} = \cos^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) \binom{a}{b} - \frac{1}{2}\sin^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i2\phi} \times \\ \times \binom{a-ib}{ia-b} - \frac{1}{2}\sin^{2}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i2\phi} \binom{a+ib}{-ia-b}.$$
(22)

Из (22) видно, что сразу после сферической линзы формируются два оптических вихря с топологическими зарядами 2 и –2 и с разными спинами. СУМ второго и третьего слагаемых в (22),  $(E_{1x}, E_{1y}) = (a - ib, ia - b),$   $(E_{2x}, E_{2y}) = (a + ib, -ia - b)$ имеет разные знаки:

$$S_{1z} = 2(E_{1x}^*E_{1y}) = |a|^2 - |b|^2 = -S_{2z} = 2(E_{2x}^*E_{2y}).$$

Но в сумме, так как амплитуды второго и третьего слагаемых в (22) одинаковые, спин второго и третьего слагаемых равен нулю. И если первое слагаемое (начальное поле) не имеет спина,  $S_{0z} = 2 \operatorname{Im}(a^*b) = 0$ , то и все поле сразу после линзы будет иметь линейную поляризацию, в общем случае неоднородную. По мере распространения поля (22) дополнительные вихри с топологическими зарядами 2 и – 2 будут иметь разную амплитуду, и у поля (22) появятся локальные области с разным спином, то есть проявится спиновый эффект Холла. Например, если  $a(\phi) = \exp(in\phi)$  и  $b(\phi) = 0$ , то начальное поле представляет собой оптический вихрь с топологическим зарядом *n* и линейной поляризацией. Для такого поля в плоскости фокуса получим выражение для поперечного электрического поля [21]:

$$\mathbf{E}_{f}(\phi, r) = i^{n-1} e^{in\phi} \left\{ \begin{pmatrix} 2I_{0,n} \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i2\phi} I_{2,n+2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + e^{-i2\phi} I_{2,n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$
(23)

В (23) интегралы I<sub>0,n</sub>, I<sub>2,n+2</sub> и I<sub>2,n-2</sub> определены в (18). Из (23) видно, что в отличие от (22), у второго и третьего слагаемых со спином разного знака амплитуды разные,  $I_{2,n+2}$  и  $I_{2,n-2}$ , если *n* отлично от нуля. Амплитуды разные потому, что оптические вихри с разным топологическим зарядом имеют разную расходимость из-за дифракции в свободном пространстве. Поэтому при сложении их спины не компенсируются, и у светового поля в фокусе будут области с разным спином, то есть области, в которых поляризация либо левая эллиптическая, либо правая эллиптическая. То есть в фокусе начального поля  $a(\phi) = \exp(in\phi)$  и  $b(\phi) = 0$  будет иметь место спиновый эффект Холла, хотя в начальной плоскости и сразу за линзой у светового поля был нулевой спин (линейная поляризация).

# 4. Световые поля с нулевой продольной компонентой поля в фокусе

Заметим, что третье уравнение в (5) позволяет получить условие, которому должно удовлетворять начальное световое поле, чтобы сразу после линзы и в фокусе у него не было бы продольной компоненты поля. Действительно, приравнивая третью компоненту электрического поля к нулю, получим уравнение:

$$a(\varphi)\cos\varphi + b(\varphi)\sin\varphi = 0.$$
(24)

Из (24) сразу следует, что продольная проекция электрического вектора равна нулю у азимутальной поляризации:

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$
(25)

и у обратной азимутальной поляризации

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$
 (26)

Можно показать, что поле с начальной поляризацией вида

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi + 1 \end{pmatrix}$$
(27)

также будет удовлетворять уравнению (24) и не будет иметь продольной составляющей в фокусе. Из (24) следует, что у светового поля, у которого нет продольной компоненты в фокусе, не будет также продольной компоненты СУМ сразу за линзой:  $S_z = 2\cos\theta \operatorname{Im}(a^*b) = -2\cos\theta \cot\phi \operatorname{Im}(a^*a) = 0.$ (28)

Общее решение уравнения (24) будет иметь вид:

$$E(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a(\theta, \varphi) \\ b(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} f(\varphi),$$
(29)

где  $f(\varphi)$  – любая непрерывная функция. Например, при  $f(\varphi) = \cos(\varphi)$  поле (29) совпадает с полем (27). При  $f(\varphi) = \exp(in\varphi)$  поле (29) является азимутальным векторным полем с внедренным оптическим вихрем с топологическим зарядом *n*. У такого поля в фокусе сферической линзы появляется отличная от нуля СУМ [22], хотя в начальной плоскости СУМ равен нулю (28). Световые поля, у которых в фокусе продольная компонента вектора напряженности электрического поля равна нулю, интересны для оптического намагничивания материалов на основе обратного эффекта Фарадея [22]. Так как если продольная компонента поля равна нулю, то вектор магнетизации, который пропорционален продольной компоненте СУМ и равен

$$\mathbf{M} = i\gamma \left( \mathbf{E}^* \times \mathbf{E} \right), \tag{30}$$

где  $\gamma$  – коэффициент связи, пропорциональный магнито-оптической чувствительности материала, имеет только продольную компоненту:

$$M_z = -2\gamma \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \tag{31}$$

Покажем, что в фокусе вихревого поля с топологическим зарядом n и с азимутальной поляризацией, которое имеет вид (29) и не имеет продольной проекции электрического вектора, будет иметь место спиновый эффект Холла. Действительно, начальный вектор Джонса такого поля имеет вид:

$$E(\varphi) = e^{in\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi\\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$
 (32)

Проекции вектора напряженности в фокусе поля (32) можно найти в [23]:

$$E_{x} = \frac{i^{n+1}}{2} e^{in\varphi} \left[ e^{i\varphi} \left( I_{0,n+1} + I_{2,n+1} \right) + e^{-i\varphi} \left( I_{0,n-1} + I_{2,n-1} \right) \right],$$
  

$$E_{y} = \frac{i^{n}}{2} e^{in\varphi} \left[ e^{i\varphi} \left( I_{0,n+1} + I_{2,n+1} \right) - e^{-i\varphi} \left( I_{0,n-1} + I_{2,n-1} \right) \right],$$
  

$$E_{z} = 0.$$
  
(33)

Интегралы  $I_{\mu,\nu}$ , входящие в (33), определены в (18). Из (33) видно, что световое поле в фокусе представляет собой суперпозицию оптического вихря с топологическим зарядом n+1 и левой круговой поляризацией и оптического вихря с топологическим за-

рядом n-1 и правой круговой поляризацией с разными амплитудами A и B:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = i^{n+1} \left[ A e^{i(n+1)\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + B e^{i(n-1)\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right],$$

$$A = I_{0,n+1} + I_{2,n+1},$$

$$B = I_{0,n-1} + I_{2,n-1}.$$

$$(34)$$

Из-за того, что амплитуды двух оптических вихрей со спинами разных знаков отличаются по величине, то у всего поля спин будет отличен от нуля. Действительно, найдем продольную проекцию СУМ поля (34), других проекций у вектора СУМ поля (33) не будет:

$$S_{z} = 2 \operatorname{Im} \left( E_{x}^{*} E_{y} \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( I_{0,n-1} + I_{2,n-1} \right)^{2} - \left( I_{0,n+1} + I_{2,n+1} \right)^{2} \right].$$
(35)

Из (35) видно, что распределение СУМ в фокусе имеет радиальную симметрию и на разных радиусах будет иметь разные знаки. Например, на оптической оси при r=0 и при n=1 СУМ будет положительный (правая круговая поляризация), а при n=-1 СУМ будет отрицательным (левая круговая поляризация). При n=0 СУМ во всей плоскости фокуса равен нулю, а при n, отличном от нуля и единицы, СУМ на оптической оси равен нулю, а с увеличением расстояния от оптической оси будет чередовать знаки плюс и минус. То есть в фокусе будет иметь место радиальный спиновый эффект Холла и вектор магнетизации (30) будет иметь только продольную составляющую (31).

Для полноты картины приведем выражение для полной интенсивности и для интенсивности поперечных проекций в фокусе при начальном поле (32):

$$I_{x} = A(r) + 2B(r)\cos 2\varphi,$$

$$I_{y} = A(r) - 2B(r)\cos 2\varphi,$$

$$I = I_{x} + I_{y} = A(r),$$

$$A(r) = (I_{0,n-1} + I_{2,n-1})^{2} + (I_{0,n+1} + I_{2,n+1})^{2},$$

$$B(r) = (I_{0,n-1} + I_{2,n-1})(I_{0,n+1} + I_{2,n+1}).$$
(36)

Из (36) видно, что полная интенсивность в фокусе для начального поля (32) имеет круговую симметрию, так как зависит только от радиальной переменной, I=A(r). А поперечные интенсивности имеют осевую симметрию, так как при замене угла  $\varphi$  на  $\varphi^+\pi$  картина интенсивности не меняется. Также особенность поперечной интенсивности (36) в том, что интенсивность  $I_x$  переходит в интенсивность  $I_y$  при повороте угла  $\varphi$  на  $\pi/2$ . Также из (36) видно, что при топологическом заряде n=1 или n=-1 в фокусе поля (36) формируется круглое световое пятно, так как на оптической оси интенсивность равна выражению:

$$I_{n=\pm 1}\left(r=0\right) = \left(I_{0,0} + I_{2,0}\right)^2.$$
(37)

Выражение (37) больше нуля потому, что интегралы (18) при втором индексе, равном нулю, имеют под интегралом функцию Бесселя нулевого порядка  $J_0(\xi)$ , которая в нуле равна единице:  $J_0(0)=1$ . При других значения топологического заряда в фокусе сформируется световое кольцо. Эти выводы будут подтверждены с помощью моделирования в следующем параграфе.

# 5. Моделирование

С помощью интеграла Ричардса–Вольфа моделировалась фокусировка пучка (32) с длиной волны 532 нм и топологическими зарядами 1 (рис. 1–2), 2 (рис. 3–4) и 3 (рис. 5–6) апланатическим объективом ( $T = \cos^{1/2} \theta$ ) с числовой апертурой NA=0,95. Распределения интенсивности приведены на рис. 1,3,5, а продольной компоненты спинового углового момента – на рис. 2,4,6. Из рис. 1,3,5 видно, что при n=1 фокус имеет вид круглого светового пятна, а при n=2 и n=3 фокус имеет вид кольца. Поперечные проекции интенсивности на рис. 1,3,5 переходят друг в друга при повороте на  $\pi/2$ . Продольной интенсивности у поля (32) нет. Численно

рассчитанные интенсивности продольной компоненты имели значения порядка 10<sup>-34</sup> и на рис. 1,3,5 не приведены. Продольная проекция СУМ на рис. 2, 4, 6 согласно (35) имеет круговую симметрию. При n=1 на рис. 2 видно, что СУМ максимальна на оптической оси и положительная, то есть вблизи оптической оси в фокусе у поля (32) имеет место правая круговая поляризация и вектор поляризации вращается против часовой стрелки. Поэтому такое световое поле используют для намагничивания материалов с помощью обратного эффекта Фарадея [25]. Также на рис. 2 видно, что СУМ меняет знак и центральная область с положительным спином окружена кольцевой областью с отрицательным спином. Так, что полный спин равен нулю, как и в начальной плоскости поля (32). Разделение в фокусе областей со спином разного знака является проявлением радиального спинового эффекта Холла. Из рис. 4 и 6 видно, что при топологическом заряде *n*>1 в фокусе правая эллиптическая поляризация формируется на световом кольце с центром на оптической оси, и ее окружает кольцо с левой круговой поляризацией. Чем больше значение n > 1, тем больше радиусы этих колец и тем больше вытягиваются эллипсы поляризации.











зарядом п = 2



Рис. 4. Продольная компонента спинового углового момента Sz (a) и ее сечение вдоль оси x (б) при фокусировке пучка (32) с топологическим зарядом n = 2



Рис. 5. Интенсивность I (a) и ее поперечные составляющие  $I_x$  (б),  $I_y$  (в) при фокусировке пучка (32) с топологическим зарядом n = 3



Рис. 6. Продольная компонента спинового углового момента Sz (a) и ее сечение вдоль оси x (б) при фокусировке пучка (32) с топологическим зарядом n = 3

#### Заключение

С помощью известных уравнений (1)-(4) показано, что сразу за сферической линзой продольная проекция СУМ уменьшается (6), и если до линзы не было ОУМ, то сразу после линзы ОУМ появляется (15). При этом сумма продольных СУМ и ОУМ сохраняется (16). То есть спин-орбитальная конверсия происходит сразу за сферической линзой. Но азимутальный поток энергии, который обычно присутствует у световых полей с ОУМ, сразу за линзой равен нулю (12). Азимутальный поток энергии начинает возрастать после линзы и достигает максимального значения в фокусе (13). Также спиновый эффект Холла сразу за линзой равен нулю (22), а в фокусе достигает максимума (23). Это происходит так. Сразу за линзой в сходящемся поле появляются оптические вихри с топологическими зарядами разных знаков и с круговыми поляризациями также разных знаков (22). Но так как их амплитуды равны, то суммарный спин остается равен нулю. По мере фокусировки оптические вихри с разными топологическими зарядами расходятся из-за дифракции в свободном

пространстве по-разному. Поэтому в фокусе разные вихри будут иметь разную амплитуду и их сумма будет иметь в разных областях фокальной плоскости спин разного знака (23).

Уравнения (2) позволяют найти общий вид начального векторного поля (29), которое в фокусе не имеет продольной проекции вектора напряженности электрического поля (33). У таких полей в фокусе есть только продольная проекция СУМ (35), которая может при некоторых параметрах иметь максимум на оптической оси. У таких полей вектор магнетизации имеет только продольную компоненту (31). Такие световые поля используются для намагничивания материалов за счет обратного эффекта Фарадея [24–26].

### Благодарности

Работа выполнена в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части «Введение» и «Заключение» и при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-12-00236) в части теории и моделирования.

# References

- Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys Rev A 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [2] Yao AM, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. Adv Opt Photonics 2011; 3(2): 161. DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
- [3] Willner AE, Huang H, Yan Y, Ren Y, Ahmed N, Xie G, Bao C, Li L, Cao Y, Zhao Z, Wang J, Lavery MPJ, Tur M, Ramachandran S, Molisch AF, Ashrafi N, Ashrafi S. Optical communications using orbital angular momentum beams. Adv Opt Photonicsm 2015; 7(1): 66-106. DOI: 10.1364/AOP.7.000066.
- [4] Bozinovic N, Yue Y, Ren Y, Tur M, Kristensen P, Huang H, Willner AE, Ramachandran S. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. Science 2013; 340(6140): 1545-1548. DOI: 10.1126/science.1237861.
- [5] Ding D-S, Zhou Z-Y, Shi B-S, Zou X-B, Guo G-C. Linear up-conversion of orbital angular momentum. Opt Lett 2012; 37(15): 3270-3272. DOI: 10.1364/OL.37.003270.
- [6] Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication. Phys Rev Lett 2002; 89(24): 240401. DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.240401.
- [7] Zou XB, Mathis W. Scheme for optical implementation of orbital angular momentum beam splitter of a light beam and its application in quantum information processing. Phys Rev A 2005; 71(4): 042324. DOI: 10.1103/PhysRevA.71.042324.
- [8] Tamburini F, Anzolin G, Umbriaco G, Bianchini A, Barbieri C. Overcoming the Rayleigh criterion limit with optical vortices. Phys Rev Lett 2006; 97(16): 163903. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.163903.
- [9] MacDonald MP, Paterson L, Volke-Sepulveda K, Arlt J, Sibbett W, Dholakia K. Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures. Science 2002; 296(5570): 1101-1103. DOI: 10.1126/science.1069571.
- [10] Padgett M, Bowman R. Tweezers with a twist. Nat Photonics 2011; 5(6): 343-348. DOI: 10.1038/nphoton.2011.81.
- [11] Molina-Terriza G, Torres JP, Torner L. Twisted photons. Nat Phys 2007; 3(5): 305-310. DOI: 10.1038/nphys607.
- [12] Molloy JE, Padgett MJ. Lights, action: optical tweezers. Contemp Phys 2002; 43(4): 241-258. DOI: 10.1080/0010751011011605.
- [13] Beijersbergen MW, Coerwinkel RPC, Kristensen M, Woerdman JP. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate. Opt Commun 1994; 112(5-6): 321. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90638-6.
- [14] Karimi E, Piccirillo B, Nagali E, Marrucci L, Santamato E. Efficient generation and sorting of orbital angular momentum eigenmodes of light by thermally tuned qplates. Appl Phys Lett 2009; 94(23): 231124. DOI: 10.1063/1.3154549.
- [15] Heckenberg NR, McDuff R, Smith CP, White AG. Generation of optical phase singularities by computer-

generated holograms. Opt Lett 1992; 17(3): 221-223. DOI: 10.1364/OL.17.000221.

- [16] Liu X, Huang S, Xie W, Pei Z. Topological charge parallel measurement method for optical vortices based on computer-generated holography. J Opt Technol 2022; 89(2): 94-100. DOI: 10.1364/JOT.89.000094.
- [17] Li R, Ren Y, Liu T, Wang C, Liu Z, Zhao J, Sun R, Wang Z. Generating large topological charge Laguerre–Gaussian beam based on 4K phase-only spatial light modulator. Chin Opt Lett 2022; 20: 120501. DOI: 10.3788/COL202220.120501.
- [18] Lv S, Bai Y, Luo W, Meng F, Wang R. Design of a vortex metalens with high focusing efficiency using propagation phase. Appl Opt 2022; 61(21): 6311-6315. DOI: 10.1364/AO.464090.
- [19] Shen Z, Xiang Z, Wang Z, Shen Y, Zhang B. Optical spanner for nanoparticle rotation with focused optical vortex generated through a Pancharatnam–Berry phase metalens. Appl Opt 2021; 60(16): 4820-4826. DOI: 10.1364/AO.425892.
- [20] Cao G, Lin H, Jia B, Yuan X, Somekh M, Wei S. Design of a dynamic multi-topological charge graphene orbital angular momentum metalens. Opt Express 2023; 31(2): 2102-2111. DOI: 10.1364/OE.480946.
- [21] Zhu J, Wenjing S, Dong Z. Directionally duplexed alldielectric metalens for multifunctional structured light generation. Opt Lett 2023; 48(15): 4013-4016. DOI: 10.1364/OL.495014.
- [22] Hao Q, Wang W, Hu Y, Zhang S, Zhang S, Zhang Y. Independent and intensity-adjustable dual-focused vortex beams via a helicity-multiplexing metalens. Opt Mater Express 2022; 12(10): 3872-3881. DOI: 10.1364/OME.465726.
- [23] Nalimov AG, Kotlyar VV. Multifocal metalens for detecting several topological charges at different wavelengths. Computer Optics 2023; 47(2): 201-207. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1170.
- [24] Guo Y, Zhang S, Luo X. Spin-decoupled metasurface for simultaneous detection of spin and orbital angular momenta via momentum transformation. Light Sci Appl 2021; 10: 63. DOI: 10.1038/s41377-021-00497-7.
- [25] Jin Z, Janoschka D, Deng J, Ge L, Dreher P, Frank B, Hu G, Ni J, Yang Y, Li J, Yu G, Lei D, Li G, Xiao S, Mei S, Giessen H, zu Heringdorf FM, Qiu C-W. Phyllotaxisinspired nanosieves with multiplexed orbital angular momentum. eLight 2021; 1: 5. DOI: 10.1186/s43593-021-00005-9.
- [26] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG, O'Faolain L, Kotlyar MV. A dual-functionality metalens to shape a circularly polarized optical vortex or a second-order cylindrical vector beam. Photonics Nanostruct 2021; 43: 100898. DOI: 10.1016/j.photonics.2021.100898.
- [27] Nalimov AG, Kotlyar VV. Topological charge of optical vortices in the far field with an initial fractional charge: optical "dipoles". Computer Optics 2022; 46(2): 189-195. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1073.
- [28] Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Angular and orbital angular momenta in the tight focus of a circularly polarized optical vortex. Photonics 2023; 10(2): 160. DOI: 10.3390/photonics10020160.

#### Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений Института систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. Е-mail: <u>kotlyar@ipsiras.ru</u>

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт». В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства. Е-mail: <u>alanko@ipsiras.ru</u>

Стафеев Сергей Сергеевич, 1985 года рождения. В 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук с 2012 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт». Область научных интересов: дифракционная оптика, разностное решение уравнений Максвелла, оптика ближнего поля. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com ORCID: 0000-0002-7008-8007.

Козлова Елена Сергеевна, 1989 года рождения. В 2011 году окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и информатика». Кандидат физико-математических наук с 2014 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, численные методы. Е-mail: <u>kozlova.elena.s@gmail.com</u>

**Телегин Алексей Михайлович**, в 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва с дипломом по специальности «Радиотехника», в 2012 году защитил диссертацию, к.ф.-м.н., доцент кафедры конструирования и технологии электронных систем и устройств Самарского университета, с.н.с. института космического приборостроения Самарского университета. Область научных интересов: космическое приборостроение, сенсоры. Е-mail: <u>talex85@mail.ru</u>

> ГРНТИ: 29.31.01 Поступила в редакцию 16 октября 2023 г. Окончательный вариант – 23 ноября 2023 г.

# Spin-orbital conversion of the light field immediately behind an ideal spherical lens

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, S.S. Stafeev<sup>1,2</sup>, E.S. Kozlova<sup>1,2</sup>, M.A. Telegin<sup>2</sup> <sup>1</sup>Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151; <sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

#### Abstract

The Richards-Wolf equations not only adequately describe a light field distribution at the sharp focus, but are also able to describe a light field distribution just behind an ideal spherical lens, i.e. on a converging spherical wavefront. Knowing all projections of light field strength vectors behind the lens, longitudinal components of the spin angular momentum and orbital angular momentum (SAM and OAM) can be derived. In this case, the longitudinal projection of the SAM just behind the lens either remains zero or decreases. This means that the spin-orbital conversion (SOC), where part of the "spin transfers orbit", occurs just behind the ideal spherical lens. Notably, the sum of the longitudinal projections of SAM and OAM is conserved. Regarding the spin Hall effect, it is revealed that rather than forming just behind the lens, it appears as focusing occurs. Thus, we find that while just behind the lens there is no Hall effect, it becomes maximally pronounced in the focal plane. It is because just behind the ideal spherical lens, two optical vortices with topological charges (TCs) -2 and 2 and opposite-sign spins (with right and left circular polarization) are generated. However, the total spin is equal to zero because the two vortices have the same amplitudes. The amplitudes of the optical vortices become different in the course of focusing and in the focal plane and, therefore, areas with opposite-sign spins (Hall effect) are formed. We also present a general form of the incident light fields whose longitudinal component is zero in the focal plane. In this case, the SAM vector can only have the longitudinal non-zero component. The notion of the SAM vector elongated only along the optical axis in the focal plane is applied for solving magnetization problems.

<u>Keywords</u>: spin angular momentum, orbital angular momentum, topological charge, Hall effect, spin-orbital conversion, Richards-Wolf formulas, tight focusing.

<u>Citation</u>: Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Kozlova ES, Telegin AM. Spin-orbital conversion of the light field immediately behind an ideal spherical lens. Computer Optics 2024; 48(3): 325-333. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1447.

<u>Acknowledgements</u>: This work was funded by the RF Ministry of Science and Higher Education under the government project of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Sections "Introduction" and "Conclusion") and the Russian Science Foundation under project No.23-12-00236 (Sections "Theoretical background" and "Numerical modeling").

# Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: <u>kotlyar@ipsiras.ru</u>

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part - time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub - department. He is coauthor of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices. E-mail: <u>alanko@ipsiras.ru</u>

Sergey S. Stafeev (b. 1985) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is researcher of Laser Measurements laboratory at the

Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute". Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: <u>sergey.stafeev@gmail.com</u> ORCID: 0000-0002-7008-8007.

**Elena Sergeevna Kozlova**, (b. 1989) received Master's degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara State Aerospace University (2011). She received her PhD in 2014. She is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and Assosiated Professor of Computer Science department at Samara National Research University. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics.

# E-mail: kozlova.elena.s@gmail.com

Aleksey Mikhailovich Telegin, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: <u>talex85@mail.ru</u>

Received October 16, 2023. The final version – November 23, 2023.