

## Поляризация лент Мебиуса в остром фокусе обобщенного пучка Пуанкаре

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.М. Телегин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

На основе формализма Ричардса–Вольфа рассмотрена острая фокусировка обобщенного пучка Пуанкаре. Получены аналитические выражения для проекций вектора напряженности электрического поля в плоскости фокуса. На примере суперпозиции плоской волны с правой круговой поляризацией и оптического вихря с топологическим зарядом  $-1$  и левой круговой поляризацией получены выражения для распределения интенсивности и продольной проекции вектора спинового углового момента в остром фокусе. Теоретически и численно показано, что у начального пучка будет топологический заряд  $-1/2$  и в плоскости фокуса в центре имеется  $S$ -точка (точка с круговой поляризацией, которая вдоль оптической оси создает  $S$ -линию) с индексом сингулярности  $-1/2$  (звезда), а вектор большой оси эллипса поляризации при обходе вокруг оптической оси по окружности некоторого радиуса образует поляризационную одностороннюю полосу (ленту) Мебиуса порядка  $-3/2$ , имеющую три полуоборота и одну «склейку», в которой рядом находятся два вектора большой оси эллипса поляризации, направленные в противоположенные стороны.

**Ключевые слова:** поляризация лент Мебиуса, обобщенный пучок Пуанкаре, острая фокусировка, формулы Ричардса–Вольфа, спиновый угловой момент, индекс поляризационной сингулярности.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Поляризация лент Мебиуса в остром фокусе обобщенного пучка Пуанкаре / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 4. – С. 519-524. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1487.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Polarization Möbius strip at the tight focus of a generalized Poincaré beam. Computer Optics 2024; 48(4): 519-524. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1487.

### Введение

В [1] показано теоретически, что в параксиальном пучке, представляющем собой осевую суперпозицию Гауссова пучка с левой круговой поляризацией и пучка Лагерра–Гаусса (ЛГ) с азимутальным номером  $l$  и радиальным номером  $0$  с правой круговой поляризацией, формируются поляризационные ленты Мебиуса. В центре такой суперпозиции (на оптической оси пучка) формируется  $S$ -линия. Если пучок ЛГ наклонить к оптической оси на малый угол, то при обходе  $S$ -точки (точки с круговой поляризацией) в сечении пучка по окружности с центром на оптической оси вектор большой оси эллипса поляризации описывает полосу Мебиуса с числом полуоборотов (twist numbers), увеличивающимся с ростом радиуса окружности. Для параксиального наклонного пучка это число полуоборотов равно числу пересечений окружности некоторого радиуса с линиями скачков фазы на  $\pi$  (при пересечении такой линии вектор поляризации меняет свое направление на противоположенное). И так как таких линий в сечении пучка не ограничено, то и число полуоборотов ленты Мебиуса будет не ограничено [1]. В [2] экспериментально наблюдали поляризационную полосу Мебиуса в

остром фокусе той же суперпозиции, что и в [1]. Показано, что при выборе азимутального числа у пучка ЛГ, равного  $-1$ , в фокусе вокруг центральной  $S$ -точки формируется поляризационная полоска Мебиуса, у которой вектор большой оси эллипса поляризации делает 3 полуоборота, так как индекс поляризационной сингулярности  $S$ -точки равен  $-3/2$ . Кроме этих двух основных работ, известно еще много других, аналогичных работ, в которых описываются поляризационные ленты Мебиуса. Например, в параксиальных лазерных векторных пучках ленты Мебиуса рассмотрены в работах [3–6]. Например, в [6] показано, что если у  $S$ -точки целый индекс поляризации, то при обходе такой точки по окружности вектор большой (и малой) оси эллипса поляризации образует двухстороннюю твист-поверхность (скрученную поверхность) с четным числом полуоборотов (twisted ribbon). Лента Мебиуса в сходящихся векторных пучках изучалась в [7–11]. В [7] показано, что в плоскости фокуса Гауссова пучка с линейной поляризацией также имеются  $S$ -точки с круговой поляризацией, но расположенные не на оптической оси, а смещенные с оптической оси. И показано численно и экспериментально, что вокруг этих  $S$ -точек вектор поляризации большой оси эллипса поляризации описывает ленту

Мёбиуса с одним полуоборотом (с индексом сингулярности  $+1/2$  или  $-1/2$ ). В [8] с помощью моделирования показали, как можно сформировать экзотические поляризионные ленты Мёбиуса в фокусе. В [11] рассмотрены поляризионные ленты Мёбиуса в фокусе тригонометрических пучков с линейной поляризацией. У таких пучков также имеются С-точки, смещенные с оптической оси, вокруг которых вектор поляризации описывает ленту Мёбиуса.

Заметим, что во всех перечисленных работах световое поле в фокусе не описывалось с помощью явных аналитических соотношений для компонент вектора напряженности электрического поля и не было дано теоретического объяснения появления поляризионной ленты Мёбиуса в фокусе. В данной работе на основе формализма Ричардса–Вольфа [12] мы получим аналитические выражения, которые можно рассматривать как объяснение эксперимента в [2].

### 1. Обобщенные пучки Пуанкаре в остром фокусе

Рассмотрим начальное векторное поле в виде обобщенного пучка Пуанкаре [13], вектор Джонса которого имеет вид:

$$\mathbf{E}(\theta, \varphi) = \alpha A(\theta) e^{i n \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \beta A(\theta) e^{i m \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – комплексные постоянные,  $A(\theta)$  – радиально-симметричная амплитуда двух оптических вихрей (например, Гауссова функция),  $\theta$  – угол, образованный оптической осью и прямой, соединяющей точку на начальном сферическом фронте с центром фокальной плоскости,  $n$  и  $m$  – топологические заряды оптического вихря с правой круговой поляризацией и с левой круговой поляризацией соответственно,  $\varphi$  – азимутальный угол в сечении пучка. Используя формулы из [14], можно получить проекции вектора напряженности электрического поля в плоскости фокуса:

$$\begin{aligned} E_x &= \alpha i^{n-1} e^{i n \varphi} (I_{0,n} + e^{i 2 \varphi} I_{2,n+2}) + \\ &+ \beta i^{m-1} e^{i m \varphi} (I_{0,m} + e^{-i 2 \varphi} I_{2,m-2}), \\ E_y &= \alpha i^n e^{i n \varphi} (I_{0,n} - e^{i 2 \varphi} I_{2,n+2}) + \\ &+ \beta i^m e^{i m \varphi} (-I_{0,m} + e^{-i 2 \varphi} I_{2,m-2}), \\ E_z &= -2 \alpha i^n e^{i(n+1)\varphi} I_{1,n+1} + 2 \beta i^m e^{i(m-1)\varphi} I_{1,m-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) входят функции  $I_{\nu,\mu}$ , зависящие от радиальной  $r$  и продольной  $z$  переменных:

$$\begin{aligned} I_{\nu,\mu} &= 2 k f \int_0^\alpha \sin^{\nu+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{1/2}(\theta) \times \\ &\times A(\theta) e^{i k z \cos \theta} J_\mu(k r \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ ,  $f$  – фокусное расстояние фокусирующей линзы,  $\alpha$  – максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий числовую

апертуру апланатической линзы  $NA = \sin \alpha$ ,  $J_\mu(\xi)$  – функция Бесселя первого рода  $\mu$ -го порядка.

В [1, 2] выбраны следующие параметры суперпозиции (1):  $n = 0$ ,  $m = -1$ ,  $\alpha = \beta = 1$ . При этом вместо (1) получим начальный пучок вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta, \varphi) &= A(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + A(\theta) e^{-i \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \\ &= 2 A(\theta) e^{-i \varphi / 2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi / 2) \\ -\sin(\varphi / 2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) видно, что топологический заряд начального пучка равен  $-1/2$  и индекс поляризионной сингулярности у поля (4) также равен  $-1/2$ . Действительно, у поля (4) в сечении имеется неоднородная линейная поляризация и линия с поляризионной сингулярностью при  $\varphi = 0$ . На этой прямой (горизонтальная полуось) линейная поляризация не определена, так как при углах немного больших  $\varphi = 0$  поляризация направлена горизонтально вправо, а при углах немного меньших  $2\pi$  поляризация направлена горизонтально влево. При обходе центра пучка по замкнутому контуру против часовой стрелки вектор линейной поляризации поворачивается на  $\pi$  по часовой стрелке, то есть индекс поляризионной сингулярности поля (4) равен  $I = -1/2$ . Хотя в центре поля (4) при распространении сформируется С-точка с круговой поляризацией.

Для пучка (4) в плоскости острого фокуса вместо (2) получим:

$$\begin{aligned} E_x &= -i (I_{0,0} + e^{i 2 \varphi} I_{2,2}) + e^{-i \varphi} (I_{0,1} + e^{-i 2 \varphi} I_{2,3}), \\ E_y &= (I_{0,0} - e^{i 2 \varphi} I_{2,2}) - i e^{-i \varphi} (I_{0,1} - e^{-i 2 \varphi} I_{2,3}), \\ E_z &= -2 e^{i \varphi} I_{1,1} - 2 i e^{-i 2 \varphi} I_{1,2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что на оптической оси ( $r = 0$ ) в плоскости фокуса у вектора напряженности будут такие проекции:

$$\begin{aligned} E_x(r = 0) &= -i I_{0,0}, \\ E_y(r = 0) &= I_{0,0}, \\ E_z(r = 0) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В центре плоскости фокуса будет С-точка, то есть точка с правой круговой поляризацией. Индекс поляризионной сингулярности поля вблизи С-точки равен, как и для начального поля (4),  $I_C = -1/2$  (тип звезда).

Из (5) следует, что интенсивность осевой проекции поля в плоскости будет иметь вид:

$$I_z = |E_z|^2 = 4 (I_{1,1}^2 + I_{1,2}^2 + 2 I_{1,1} I_{1,2} \sin 3 \varphi). \quad (7)$$

Так как интенсивность зависит от тройного азимутального угла, то при обходе по некоторой окружности вокруг оптической оси на этой окружности будут лежать три максимума при углах  $\varphi = \pi/6$ ,  $5\pi/6$ ,

$3\pi/2$ , а сама интенсивность будет иметь вид трех светлых пятен с центрами в этих трех максимумах. Выражения для поперечных интенсивностей будут сложнее:

$$\begin{aligned} I_x &= |E_x|^2 = (I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + I_{0,1}^2 + I_{2,3}^2) + \\ &+ 2I_{0,0}I_{0,1} \sin \varphi + 2 \cos 2\varphi (I_{0,0}I_{2,2} + I_{0,1}I_{2,3}) + \\ &+ 2 \sin 3\varphi (I_{0,0}I_{2,3} + I_{0,1}I_{2,2}) + 2I_{2,2}I_{2,3} \sin 5\varphi, \\ I_y &= |E_y|^2 = (I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + I_{0,1}^2 + I_{2,3}^2) - \\ &- 2I_{0,0}I_{0,1} \sin \varphi - 2 \cos 2\varphi (I_{0,0}I_{2,2} + I_{0,1}I_{2,3}) + \\ &+ 2 \sin 3\varphi (I_{0,0}I_{2,3} + I_{0,1}I_{2,2}) - 2I_{2,2}I_{2,3} \sin 5\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Как показано в [15], основной вклад в энергию поля вносится слагаемыми  $I_{v,\mu}$  с нулевым первым индексом ( $I_{0,\mu}$ ). Вклад слагаемых  $I_{1,\mu}$  существенно меньше, а вклад слагаемых  $I_{2,\mu}$  ещё меньше. Поэтому в выражениях для интенсивности (8) оставим только слагаемые, содержащие произведения  $I_{0,\mu}$ . Тогда перепишем (8) приближённо в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_x &\approx I_{0,0}^2 + I_{0,1}^2 + 2I_{0,0}I_{0,1} \sin \varphi, \\ I_y &\approx I_{0,0}^2 + I_{0,1}^2 - 2I_{0,0}I_{0,1} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) видно, что интенсивность  $I_x$  будет иметь один максимум, лежащий на вертикальной оси в верхней половине, интенсивность  $I_y$  также будет иметь один максимум, лежащий на вертикальной оси, но в нижней половине. Такой вид распределения интенсивности согласуется с полученным экспериментально в [2].

Найдем далее продольную проекцию вектора спинового углового момента (СУМ)  $\mathbf{S} = \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E})$  в плоскости фокуса для начального поля (4):

$$\begin{aligned} S_z &= 2(I_{0,0}^2 + I_{2,3}^2 - I_{0,1}^2 - I_{2,2}^2) + \\ &+ 4 \sin 3\varphi (I_{0,0}I_{2,3} - I_{0,1}I_{2,2}). \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) видно, что распределение продольной составляющей СУМ похоже по структуре на распределение продольной интенсивности (7), так как тоже зависит от синуса тройного азимутального угла. Поэтому распределение СУМ (10) вблизи оптической оси будет иметь, как и интенсивность (7), три максимума, лежащих на углах  $\varphi = \pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$ . А минимальные значения СУМ будут лежать на углах  $\varphi = \pi/2, 7\pi/6, -\pi/6$ . Минимальное значение продольной составляющей СУМ, близкое к нулю, означает, что эллипс поляризации в этих точках почти перпендикулярен к плоскости фокуса. Далее мы покажем, что примерно в этих точках (точнее на этих углах) происходят перевороты поляризационной полоски Мебиуса, которую формирует большая (или малая) ось эллипса поляризации, когда ее перемещаешь по некоторой окружности с центром в С-точке на оптической оси.

## 2. Эллипс поляризации в плоскости фокуса обобщенного пучка Пуанкаре

Чтобы найти расположение большой и малой осей эллипса поляризации для точек фокальной плоскости, следует воспользоваться формулами Берри [16]. В [16] приведены формулы для расчета индекса поляризационных сингулярностей произвольных векторных полей. Следуя этой работе, запишем, что вектор электрического поля  $\mathbf{E}$  можно представить через действительные вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , которые вытянуты вдоль большой и малой осей эллипса поляризации в данной точке пространства:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= e^{i\gamma}(\mathbf{A} + i\mathbf{B}), \quad I = |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|, \\ \gamma &= \frac{1}{2} \arg(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}), \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|}} \text{Re}(\mathbf{E} \sqrt{\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}}), \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}|}} \text{Im}(\mathbf{E} \sqrt{\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}}), \\ \mathbf{S} &= \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}) = 2(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнении (11) точкой обозначено скалярное произведение комплексных векторов  $\mathbf{E}$ , крестом " $\times$ " обозначено векторное произведение,  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  – вещественные и мнимые части числа,  $\mathbf{S}$  – с одной стороны, вектор СУМ, а с другой стороны, вектор нормали к плоскости поляризационного эллипса, образованного вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $I$  – интенсивность, выраженная через проекции векторов осей поляризационного эллипса. Выделим в поле (5) действительные и мнимые части, чтобы получить проекции векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= e^{-i3\varphi/2}(\mathbf{A} + i\mathbf{B}), \\ A_x &= I_{0,0} \sin(3\varphi/2) + I_{2,2} \sin(7\varphi/2) + \\ &+ I_{0,1} \cos(\varphi/2) + I_{2,3} \cos(3\varphi/2), \\ A_y &= I_{0,0} \cos(3\varphi/2) - I_{2,2} \cos(7\varphi/2) + \\ &+ I_{0,1} \sin(\varphi/2) + I_{2,3} \sin(3\varphi/2), \\ A_z &= -2I_{1,1} \cos(5\varphi/2) - 2I_{1,2} \sin(\varphi/2), \\ B_x &= -I_{0,0} \cos(3\varphi/2) - I_{2,2} \cos(7\varphi/2) + \\ &+ I_{0,1} \sin(\varphi/2) - I_{2,3} \sin(3\varphi/2), \\ B_y &= I_{0,0} \sin(3\varphi/2) - I_{2,2} \sin(7\varphi/2) - \\ &- I_{0,1} \cos(\varphi/2) + I_{2,3} \cos(3\varphi/2), \\ B_z &= -2I_{1,1} \sin(5\varphi/2) - 2I_{1,2} \cos(\varphi/2). \end{aligned} \quad (12)$$

Вектора (12) лежат в плоскости эллипса поляризации, но они не ортогональны между собой. Они были бы ортогональны, если бы мы получили их с помощью выражений 4 и 5 в (11). Но (12) получено как представление поля  $\mathbf{E}$  в виде суммы реальной и мнимой частей. А эта операция не однозначная, так как имеется функ-

ция  $\gamma$ . Но если учесть только слагаемые, дающие основной вклад, то вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в (12) будут приближенно ортогональны и будут иметь координаты:

$$\begin{aligned} A_x &\approx I_{0,0} \sin(3\varphi/2) + I_{0,1} \cos(\varphi/2), \\ A_y &\approx I_{0,0} \cos(3\varphi/2) + I_{0,1} \sin(\varphi/2), \\ A_z &= -2I_{1,1} \cos(5\varphi/2) - 2I_{1,2} \sin(\varphi/2) \approx 0, \\ B_x &\approx -I_{0,0} \cos(3\varphi/2) + I_{0,1} \sin(\varphi/2), \\ B_y &\approx I_{0,0} \sin(3\varphi/2) - I_{0,1} \cos(\varphi/2), \\ B_z &= -2I_{1,1} \sin(5\varphi/2) - 2I_{1,2} \cos(\varphi/2) \approx 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Вблизи оптической оси вторыми слагаемыми можно также пренебречь по сравнению с первыми, тогда получим для вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} A_x(kr \ll 1) &\approx I_{0,0} \sin(3\varphi/2), \\ A_y(kr \ll 1) &\approx I_{0,0} \cos(3\varphi/2), \\ A_z(kr \ll 1) &\approx 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения (14) легко анализировать. Мы уже показывали, что вблизи оптической оси формируется С-точка с индексом  $I_c = -1/2$ . Из (14) видно, что на некотором удалении от центра фокуса конец вектора  $\mathbf{A}$  совершает не один, а три полуповорота на угол  $\pi$ . То есть индекс поляризации эллиптического поля на некотором удалении от центра в плоскости фокуса равен  $I_c = -3/2$ . Действительно, при  $\varphi = 0$  вектор  $\mathbf{A}$  направлен вертикально вверх, при  $\varphi = 2\pi/3$  – вертикально вниз, при  $\varphi = 4\pi/3$  – опять вертикально вверх и при  $\varphi = 2\pi$  – вертикально вниз. Заметим, что в [2] индекс поля в фокусе имеет положительный знак ( $I_c = 3/2$ ). Это происходит потому, что картины интенсивности в данной работе и в работе [2] повернуты друг относительно друга на  $\pi$ . Итак, согласно (14), при движении в плоскости фокуса по окружности с центром на оптической оси вектор  $\mathbf{A}$ , принадлежащий эллипсу поляризации, будет «заметать» одностороннюю поверхность типа Мёбиуса с тремя «переворотами» (полуоборотами) на углах  $\varphi = \pi/3, \pi, 5\pi/3$  и местом «склейки» (где совмещаются два вектора  $\mathbf{A}$ , направленные в противоположенные стороны) при  $\varphi = 0, 2\pi$ . Заметим, что описанная здесь лента Мёбиуса отличается от аналогичной, полученной в [2], поворотом на  $\pi/2$ . Знак ленты Мёбиуса определяется так: если при обходе окружности по часовой стрелке лента поворачивается также по часовой, то индекс поляризации положительный, если при движении по окружности против часовой стрелки и лента Мёбиуса поворачивается против часовой (как на рис. 1), то индекс поляризации отрицательный.

### 3. Двухсторонние поляризационные ленты с четным числом полуоборотов

Если у обобщенного пучка Пуанкаре (1) выбрать топологические заряды  $n=0$  и  $m=-2$ , то вместо начального поля (4) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta, \varphi) &= A(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + A(\theta) e^{-i2\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \\ &= 2A(\theta) e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

У поля (15) топологический заряд равен  $-1$ , а само поле представляет собой оптический вихрь с цилиндрической поляризацией в виде модифицированной радиальной поляризации, у которой вектора линейной поляризации расположены вдоль гипербол. Вектор линейной поляризации у поля (15) при обходе оптической оси по окружности делает два полуоборота, то есть индекс поляризации равен  $-1$ . На оптической оси имеется V-точка сингулярности, то есть линейная поляризация не определена. В плоскости фокуса у поля (15) будут следующие проекции вектора напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} E_x &= -i(I_{0,0} + e^{i2\varphi} I_{2,2}) + i e^{-i2\varphi} (I_{0,2} + e^{-i2\varphi} I_{2,4}), \\ E_y &= (I_{0,0} - e^{i2\varphi} I_{2,2}) + e^{-i2\varphi} (I_{0,2} - e^{-i2\varphi} I_{2,4}), \\ E_z &= -2e^{i\varphi} I_{1,1} + 2e^{-i3\varphi} I_{1,3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) видно, что на оптической оси имеется С-точка с правой круговой поляризацией, а индекс поляризации сингулярности будет такой же, как и в начальном поле  $I_c = -1$ .

Продольная плотность спина в плоскости фокуса для поля (15) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} S_z &= 2(I_{0,0}^2 + I_{2,4}^2 - I_{0,2}^2 - I_{2,2}^2) + \\ &+ 4 \cos 4\varphi (I_{0,0} I_{2,4} - I_{0,2} I_{2,2}). \end{aligned} \quad (17)$$

Распределение продольной интенсивности в плоскости фокуса будет иметь вид:

$$I_z = |E_z|^2 = 4(I_{1,1}^2 + I_{1,3}^2 - 2I_{1,1} I_{1,3} \cos 4\varphi). \quad (18)$$

Из (17) и (18) видно, что в отличие от случая (7) и (10) картина интенсивности и картина продольного спина будет не в виде треугольника, а в виде квадрата, так как и интенсивность, и СУМ зависят от азимутального угла  $\varphi$ , умноженного на 4.

С учетом (14) из (16) следует, что приближенно (вблизи оптической оси) проекции большой оси эллипса поляризации можно представить, как:

$$\begin{aligned} A_x &\approx I_{0,0} \cos(2\varphi) - I_{0,2}, \\ A_y &\approx -I_{0,0} \sin(2\varphi), \\ A_z &\approx 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) следует, что в правом верхнем квадранте вектор большой оси эллипса поляризации будет направлен преимущественно вниз, в левом верхнем квадранте – вверх, в левом нижнем квадранте – вниз, и в правом нижнем квадранте – вверх. То есть вектор оси эллипса поляризации при обходе центральной С-

точки сделает 4 полуоборота. И значит, индекс поляризации сингулярности будет равен  $I_s = -2$ .

#### 4. Моделирование

На рис. 1 показано распределение интенсивности в плоскости фокуса для пучка (4) при  $A(\theta) = 1$  и при числовой апертуре фокусирующей линзы  $NA = 0,95$ . Длина волны света – 532 нм. Интенсивность рассчитана с помощью интегралов Ричардса–Вольфа [12]. На рис. 1 видно, что интенсивность имеет вид треугольника с вершиной, направленной вниз. В [2] такой треугольник был направлен вершиной вверх. Поляризация показана в виде эллипсов с большой осью в виде стрелочки. Красные эллипсы – это эллипсы поляризации, у которых большая ось имеет положительную проекцию на ось  $z$ , а синие эллипсы – это эллипсы поляризации, у которых большая ось имеет отрицательную проекцию на ось  $z$  (оптическая ось). Рассматривая эллипсы, лежащие на некоторой окружности (она выделена на рис. 1 белым пунктиром), можно заметить, что в правой верхней четверти окружности вектор большой оси эллипса поляризации направлен вниз, в правой нижней четверти – направлен вверх, в левой нижней четверти – направлен вниз, и в левой верхней четверти – направлен вверх. Поэтому можно говорить, что вектор большой оси эллипса поляризации при обходе по некоторой окружности вокруг оптической оси «замечает» плоскость Мебиуса, у которой есть три «переворота» (полуоборота) на углах примерно  $\varphi = \pi/6, 3\pi/2, 5\pi/6$  и «склейка» (где совмещаются два вектора большой оси эллипса поляризации, направленные в противоположенные стороны) при  $\varphi = \pi/2$ . Заметим, что лента Мебиуса на рис. 1 оказалась повернутой по сравнению с теоретической, полученной на основе приближения (14), на угол  $\pi/2$ . Также заметим, что вблизи центра при обходе  $S$ -точки эллипсы поляризации лежат на трех гиперболах и поворачиваются всего на один полуоборот, то есть индекс поляризационной сингулярности  $S$ -точки действительно равен  $-1/2$ .

Если у векторного пучка Пуанкаре (1) выбрать топологические заряды  $(n, m) = (0, -2)$ , то в фокусе интенсивность будет иметь вид квадрата (желто-красная область на рис. 2). В центре будет  $S$ -точка с индексом поляризационной сингулярности  $-2$ . То есть при обходе  $S$ -точки по окружности некоторого радиуса (белая пунктирная линия на рис. 2) большая ось эллипса поляризации будет совершать 4 полуоборота. Знак минус возникает потому, что при обходе по окружности против часовой стрелки твист-поверхность также поворачивается против часовой стрелки. На рис. 2 на окружности в правом верхнем квадранте эллипсы направлены вниз, в левом верхнем квадранте – вверх, в левом нижнем квадранте – вниз, и в правом нижнем квадранте – вверх. Поэтому рис. 2 подтверждает правильность выражения (19). В трехмерном пространстве вектор большой оси эллипса поляризации будет формировать ленту с четным числом

полуоборотов, которая в отличие от ленты Мебиуса (рис. 1) является двухсторонней (так как число полуоборотов четное, то число полных оборотов целое) и которая в англоязычных статьях называется twisted ribbon [4]. Заметим, что если обходить  $S$ -точку на рис. 2 внутри квадрата интенсивности, то эллипсы поляризации сделают всего два полуоборота и, значит, индекс  $S$ -точки действительно равен  $-1$ .

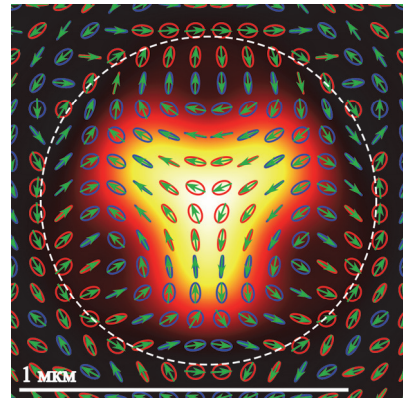


Рис. 1. Распределение интенсивности в плоскости фокуса для начального поля (4) в виде цветного (желто-красного) треугольника с вершиной, направленной вниз, и эллипсы поляризации с большой осью в виде стрелки: красные эллипсы имеют положительную проекцию на оптическую ось, а синие – отрицательную. Белая горизонтальная стрелка внизу картины показывает 1 мкм. Белым пунктиром выделена окружность, на которой формируется лента Мебиуса с тремя полуоборотами и индексом  $-3/2$

Заметим также, что на рис. 1 и 2 имеются отдельные субволновые области, в которых эллипсы поляризации имеют разный цвет. Красные эллипсы имеют положительный наклон на оптическую ось, а синие эллипсы – отрицательный. То есть там, где эллипсы красные, продольный СУМ положительный, а там, где эллипсы синие, – СУМ отрицательный. Поэтому в фокусе обоих световых полей (4) и (15) проявляется продольный спиновый эффект Холла, когда области с разным продольным спином разделены в пространстве [17, 18].

#### Заключение

В работе на основе теории Ричардса–Вольфа [12] получены точные выражения проекций вектора напряженности электрического поля в плоскости фокуса для обобщенного пучка Пуанкаре. На примере двух частных случаев пучков Пуанкаре с топологическими зарядами  $(n, m) = (0, -1)$  и  $(n, m) = (0, -2)$  показано, что в обоих случаях в центре плоскости фокуса формируется  $S$ -точка с круговой поляризацией, окруженная эллипсами поляризации, которые при обходе по окружности некоторого радиуса с центром в  $S$ -точке совершают 3 и 4 полуоборота. В трехмерном пространстве векторы большой оси эллипса поляризации при обходе по окружности формируют одностороннюю поверхность Мебиуса (в случае нечетного числа полуоборотов)

или двухстороннюю твист-полоску (в случае четного числа полуоборотов). Показано также, что в обоих случаях в разных областях плоскости фокуса эллипсы поляризации имеют положительные и отрицательные наклоны на оптическую ось. То есть эллипсы с продольным спином разного знака разделены в плоскости фокуса, что демонстрирует наличие продольного спинового эффекта Холла.

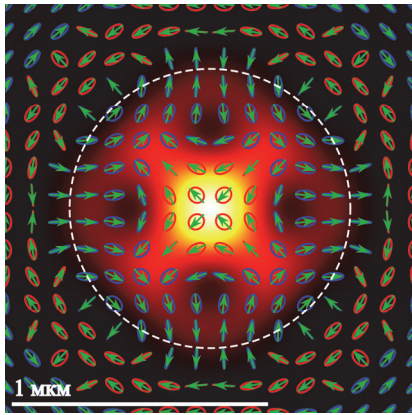


Рис. 2. Распределение интенсивности в плоскости фокуса для начального поля (1) с  $n = 0$ ,  $m = -2$  в виде цветного (желто-красного) квадрата и эллипсы поляризации с большой осью в виде стрелки (зеленые): красные эллипсы имеют положительную проекцию на оптическую ось, а синие – отрицательную. Белая горизонтальная стрелка внизу картины показывает 1 мкм. Белым пунктиром выделена окружность, на которой формируется двухсторонняя лента с четырьмя полуоборотами и индексом  $-2$

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-12-00137) в части теории и по государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части моделирования.

### References

- [1] Freund I. Multitwist optical Möbius strips. *Opt Lett* 2010; 35(2): 148-150. DOI: 10.1364/OL.35.000148.
- [2] Bauer T, Banzer P, Karimi E, Orlov S, Rubano A, Marucci L, Santomato E, Boyd RW, Leuchs G. Observation of optical polarization Möbius strips. *Science* 2015; 347(6225): 964-966. DOI: 10.1126/science.1260635.
- [3] Freund I. Cones, spirals, and Möbius strips, in elliptically polarized light. *Opt Commun* 2005; 249(1-3): 7-22. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.12.052.
- [4] Freund I. Optical Möbius strips, twisted ribbons, and the index theorem. *Opt Lett* 2011; 36(23): 4506-4508. DOI: 10.1364/OL.36.004506.
- [5] Freund I. Optical Möbius strips and twisted ribbon cloaks. *Opt Lett* 2014; 39(4): 727-730. DOI: 10.1364/OL.39.000727.
- [6] Galvez EJ, Dutta I, Beach K, Zeosky JJ, Jones JA, Khajavi B. Multitwist Möbius strips and twisted ribbons in the polarization of paraxial light beams. *Sci Rep* 2017; 7: 13653. DOI: 10.1038/s41598-017-13199-1.
- [7] Bauer T, Neugebauer M, Leuchs G, Banzer P. Optical polarization Möbius strips and points of purely transverse spin density. *Phys Rev Lett* 2016; 117: 013601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.013601.
- [8] Wan C, Zhan Q. Generation of exotic optical polarization Möbius strips. *Opt Express* 2019; 27(8): 11516-11524. DOI: 10.1364/OE.27.011516.
- [9] Tekce K, Otte E, Denz C. Optical singularities and Möbius strip arrays in tailored non-paraxial light fields. *Opt Express* 2019; 27(21): 29685-29696. DOI: 10.1364/OE.27.029685.
- [10] Freund I. Polarization Möbius strips on elliptical paths in three-dimensional optical fields. *Opt Lett* 2020; 45(12): 3333-3336. DOI: 10.1364/OL.392331.
- [11] Pang X, Hu M, Liu W, Zhao X. Photonics wheels and polarization Möbius strips in highly-confined trigonometric beams. *IEEE Photonics J* 2022; 14(5): 6553708. DOI: 10.1109/JPHOT.2022.3205640.
- [12] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc R Soc Lond A* 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [13] Beckley AM, Brown TG, Alonso MA. Full Poincaré beams. *Opt Express* 2010; 18(10): 10777-10785. DOI: 10.1364/OE.18.010777.
- [14] Kotlyar VV, Nalimov AG, Stafeev SS. Exploiting the circular polarization of light to obtain a spiral energy flow at the subwavelength focus. *J Opt Soc Am B* 2019; 36(10): 2850-2855. DOI: 10.1364/JOSAB.36.002850.
- [15] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. *Micromachines* 2023; 14(2): 494. DOI: 10.3390/mi14020494.
- [16] Berry MV. Index formulae for singular lines of polarization. *J Opt A-Pure Appl Opt* 2004; 6: 675-678. DOI: 10.1088/1464-4258/6/7/003.
- [17] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA, Zaitsev VD. Spin Hall effect before and after the focus of a high-order cylindrical vector beam. *Appl Sci* 2022; 12(23): 12218. DOI: 10.3390/app122312218.
- [18] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kozlova ES, Butt MA. High-order orbital and spin Hall effects at the tight focus of laser beams. *Photonics* 2022; 9(12): 970. DOI: 10.3390/photonics9120970.

### Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр. 510 этого номера.

**Телегин Алексей Михайлович**, в 2009 году окончил СГАУ с дипломом по специальности «Радиотехника», в 2012 году защитил диссертацию, к.ф.-м.н., доцент кафедры конструирования и технологии электронных систем и устройств Самарского университета, с.н.с. Института космического приборостроения Самарского университета. Область научных интересов: космическое приборостроение, сенсоры. E-mail: [talex85@mail.ru](mailto:talex85@mail.ru)

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 27 декабря 2023 г. Окончательный вариант – 26 января 2024 г.



---

# Polarization Möbius strip at the tight focus of a generalized Poincaré beam

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.M. Telegin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

Based on the Richards-Wolf formalism, we investigate tight focusing of a generalized Poincaré beam. Analytical expressions are derived for all components of the electric field strength vector in the focal plane. For superposition of a right-handed circularly polarized plane wave with a left-handed circularly polarized optical vortex with topological charge  $-1$ , we obtain expressions for the intensity distribution and the longitudinal component of the spin angular momentum vector at the tight focus. We demonstrate both theoretically and numerically that the initial beam has topological charge  $-1/2$  and, in the center of the focal plane, there is a C-point (a point with circular polarization which makes a C-line along the optical axis) with the singularity index of  $-1/2$  (star), whereas the vector of major axis of the polarization ellipse makes along a certain-radius circle around the optical axis a single-side polarization Möbius stripe of the order  $-3/2$ , which has three half-turnovers and one stitching, where two opposite major axis vectors of the polarization ellipse meet.

**Keywords:** polarization Möbius stripe, generalized Poincaré beam, tight focusing, Richards-Wolf formulae, spin angular momentum, polarization singularity index.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Polarization Möbius strip at the tight focus of a generalized Poincaré beam. *Computer Optics* 2024; 48(4): 519-524. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1487.

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-12-00137, theory). This work was also performed within the State assignment of NRC "Kurchatov Institute" (numerical simulation).

---

## Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0003-1737-0393.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS, NRC "Kurchatov Institute". He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru) ORCID: 0000-0002-0488-4267.

**Aleksey Mikhailovich Telegin**, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of the Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: [talex85@mail.ru](mailto:talex85@mail.ru)

---

*Received December 27, 2023. The final version – January 26, 2024.*

---