

# Прямое измерение общего орбитального углового момента в астигматических структурированных пучках и потеря ими нескольких степеней свободы

А.В. Воляр<sup>1</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>2</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4;

<sup>2</sup> Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки

Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН),

443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

## Аннотация

В статье показано, что модель астигматического структурированного пучка, полученная ABCD матричным методом, оказывается более простой и наглядной по сравнению с подходом на основе интегральных преобразований (статья **Воляр, А.В.** Управление гигантскими всплесками орбитального углового момента структурированных Лагерр–Гауссовых пучков в среде с общим астигматизмом / А.В. Воляр, Е.Г. Абрамочкин, М.В. Брецько, С.И. Халилов, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 1. – С. 35-46. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1395). Мы детально изучили физические механизмы формирования экстремальных значений орбитального углового момента после цилиндрической линзы при общем астигматизме. Исследования спектра мод структурированного пучка позволили разработать новый метод измерения общего в структурированном пучке, основанный на единственном измерении перекрестного момента интенсивности при компьютерной обработке картины интенсивности. Показано, что в основе таких упрощенных измерений лежит вырождение недиагональных элементов **W** и **M** субматриц, что снижает число дополнительных степеней свободы структурированного пучка с десяти до семи.

**Ключевые слова:** структурированный свет, астигматические пучки, ABCD-матрицы, орбитальный угловой момент, моменты интенсивности.

**Цитирование:** **Воляр, А.В.** Прямое измерение общего орбитального углового момента в астигматических структурированных пучках и потеря ими нескольких степеней свободы / А.В. Воляр, Е.Г. Абрамочкин, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 6. – С. 832-840. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1506.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Akimova YE. Direct measuring the total orbital angular momentum in astigmatic structured beams and the loss of several degrees of freedom. Computer Optics 2024; 48(6): 832-840. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1506.

## Введение

Быстрое развитие технологий современной фотоники предъявляет особые требования к методам измерений основных параметров структурированных вихревых пучков [1]. Структурированные пучки можно рассматривать как отдельные многофункциональные волновые системы [2], способные переносить множество степеней свободы благодаря орбитальному угловому моменту (ОУМ) и спиновому угловому моменту (СУМ), числу мод в различных функциональных базисах и т.д. [3]. Наибольшее распространение как в оптических исследованиях, так и в технических приложениях получил дифракционный метод разложения структурированного пучка на голографических вилочных решетках [4, 5], отличающийся относительной простотой и элегантностью, позволяющих работать даже на уровне единичных фотонов [6]. Дифрагированные пучки формируют в плоскости наблюдения пространственную матрицу, где каждому радиальному  $n$  и азимутальному  $\ell$  числу

соответствует свое пространственное положение. Общий ОУМ  $\ell_z$  вычисляется по сумме относительно вклада мод. Энергетическая эффективность этого подхода не может превысить  $1/N$ , где  $N$  – общее число мод в пучке. Кроме того, для измерения необходимо разрушить весь структурированный пучок. Также в процессе измерений теряется информация о начальных фазах мод. Аналогичными недостатками обладает и интерференционный подход [7], хотя ряд дополнительных измерений, сопряженный с компьютерной обработкой, позволяет получить данные об относительных фазах мод. Наиболее надежным, но весьма громоздким для оперативных исследований, а также сложным для компьютерной обработки данных является метод Шака–Гартмана [8], который позволяет измерять как веса мод, так и форму волнового фронта. Тем не менее, этот подход дает полную информацию о фазовых сингулярностях, а следовательно, ОУМ сложных пучков. Однако его применение связано с полным разрушением структуры сложного вихревого пучка.

Наряду с рассмотренными подходами, существуют методы, позволяющие получить информацию об ОУМ мод за счет одного снимка картины интенсивности. Так, авторы статьи [9] показали, что для получения полного спектра мод в базисе функций Лагерра–Гаусса достаточно обработать единственную картину интенсивности, чтобы найти корреляционную функцию. Далее компьютерный алгоритм позволяет определить спектр ОУМ-мод. Аналогичным подходом снимка единственной картины интенсивности воспользовались также авторы статей [10–12], которые для обработки картины интенсивности измеряли спектр мод (амплитуды и фазы) в базисе ЛГ-функций и функций Эрмита–Гаусса (ЭГ) применили технику моментов интенсивности высших порядков [13]. Однако все рассмотренные подходы не позволяют непосредственно измерять ОУМ, только посредством цепочки дополнительных расчетов.

В этом плане нас заинтересовал подход Альперина и соавторов [14], которые для прямого измерения ОУМ в структурированных пучках использовали метод моментов интенсивности второго порядка при компьютерной обработке картины интенсивности. Они показали, что при соответствующей обработке картины интенсивности перекрестный момент интенсивности  $M_{xy}$  оказывается прямо пропорциональным общему ОУМ пучка. Таким образом, единственное измерение момента интенсивности позволяет непосредственно измерять общий ОУМ. Однако авторы показали, что этот подход применим только к пучкам с ортогональной симметрией. Котляр и соавторы [15] распространили этот подход на пучки с неортогональной симметрией, что потребовало уже два последовательных измерения моментов интенсивности. Таким образом, проведенный краткий обзор показал некоторую закономерность в том, что чем меньше измерений требуется для определения модового состава структурированного пучка и, в частности, для прямого измерения его общего ОУМ, тем больше неопределенностей возникает для других физических параметров и ограничений к симметрии пучка. Поэтому нас заинтересовал вопрос, какая общая физическая характеристика структурированного пучка теряется при прямом измерении его общего ОУМ?

Целью нашей статьи явилось теоретическое и экспериментальное исследование преобразования модового состава и ОУМ в структурированных ЛГ-пучках в оптической системе с простым и общим астигматизмом на основе симплектических  $4 \times 4$  ABCD-матриц, дополненных симплектическими  $4 \times 4$  матрицами моментов интенсивности второго порядка.

### 1. Симплектические преобразования структурированных пучков в системе с общим астигматизмом

Согласно Арнауду и Когельнику [16], оптическая система с общим астигматизмом должна содержать последовательность астигматических линз с различ-

ным наклоном осей. Такая система не обладает меридиональными плоскостями симметрии, и ее называют неортогональной системой с общим астигматизмом в плоскости наблюдения (см. рис. 1). Но, с другой стороны, потеря меридиональной симметрии вносит в пучок 10 дополнительных степеней свободы. Как правило, для описания такой системы используются интегральные астигматические преобразования стигматических пучков, рассмотренные в нашей недавней статье [17]. Но мы выбрали более простой матричный подход, приемлемый для инженерных разработок.

#### 1.1. Структура пучков

Рассмотрим прохождение структурированного Лагерра–Гауссова (сЛГ) пучка через оптическую систему, содержащую цилиндрическую линзу, оси которой повернуты на угол  $\phi$  относительно лабораторных координат (рис. 1б). Комплексную амплитуду сЛГ-пучка в плоскости  $z = 0$  запишем в виде [18]:

$$sLG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \times \sum_{j=0}^N (\pm 1)^j \varepsilon_j P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(0) HG_{N-j,j}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$HG_{N-j,j}(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \times H_{N-j}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) H_j\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right), \quad (2)$$

где  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $N = 2n + \ell$ ,  $P_j^{(n+\ell-j, n-j)}(\cdot)$  – многочлен Якоби,  $w_0$  – радиус перетяжки пучка,  $\varepsilon_j = 1 + \varepsilon e^{ij\theta}$  – коэффициенты, содержащие амплитудный  $\varepsilon$  и фазовый  $\theta$  управляющие параметры,  $n$  и  $\ell$  – радиальное и азимутальное числа соответственно. Для простоты будем считать, что цилиндрическая линза имеет фокусное расстояние  $f_x$  ( $f_x \rightarrow \infty$ ).

Поскольку пучки Эрмита–Гаусса (ЭГ) являются собственными модами астигматического элемента, то каждую ЭГ-моду (2) в астигматическом элементе представим в виде суммы (см. [19], а также формулу (3.8) в [20]):

$$HG_{n,m}(x', y') = HG_{n,m}(x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k c_k^{(n,m)}(\phi) HG_{n+m-k,k}(x, y), \quad (3)$$

$$c_k^{(n,m)}(\phi) = (\cos \phi)^{n-k} (\sin \phi)^{m-k} P_k^{(n-k, m-k)}(-\cos 2\phi).$$

По сути, это означает, что ЭГ-моды в выражении (3) масштабируются независимо вдоль осей  $x$  и  $y$ . В данном случае мы все еще остаемся в рамках простого астигматизма. Если же далее пучок проходит через другой астигматический элемент с иной ориентацией осей или же наблюдатель детектирует пучок в лабораторной системе координат, то мы уже сталкиваемся

с общим астигматизмом [21], когда преобразования вдоль новых осей связаны между собой. Очевидно, в такой ситуации мы не можем оставаться в рамках

стандартного формализма  $2 \times 2$  ABCD-матриц [22], а должны воспользоваться подходом на основе симплектических  $4 \times 4$  матриц в виде [23]

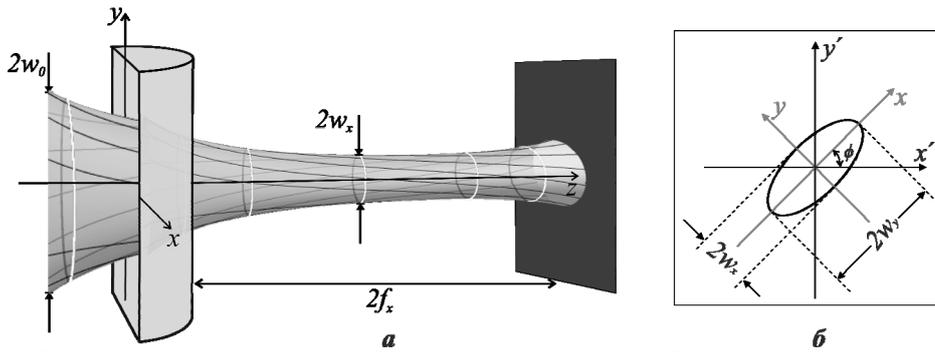


Рис. 1. (а) Эскиз распространения света после цилиндрической линзы; (б) форма астигматического пучка

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где **A**, **B**, **C**, **D** –  $2 \times 2$  матричные блоки. Здесь **A** и **D** блоки отвечают за независимое масштабирование вдоль  $x$  и  $y$  осей до перехода в новые координаты, в то время как недиагональные блоки **B** и **C** характеризуют связь между преобразованиями вдоль  $x$  и  $y$  осей. Поэтому в соответствии с рис. 1 мы можем использовать ABCD-формализм для масштабирования вдоль  $x$  и  $y$  осей, оставаясь в координатах астигматического элемента до момента детектирования пучка в лабораторных координатах. В результате получаем комплексную амплитуду астигматического сЛГ (асЛГ) пучка в плоскости наблюдения в виде

$$\text{asLG}_{n,\ell}(x', y', z | \varepsilon, \theta, \phi) = \frac{(-1)^n}{2^{n+\ell} n!} \sum_{j=0}^N C_j \text{HG}_{N-j,j}(x', y' | \bar{q}_{x,y}), \quad (4)$$

$$C_j = (-1)^j e^{ij\Gamma_{xy}} \sum_{k=0}^N (-i)^k c_k^{(n,n+\ell)} \times (\pi/4) \varepsilon_k c_j^{(N-k,k)} (-\cos \phi), \quad (5)$$

где  $x \rightarrow x/w_0$ ,  $y \rightarrow y/w_0$ , комплексные параметры  $\bar{q}_{x,y}(z)$  описываются формулами (4)–(9) в нашей недавней статье [18]. Здесь важно отметить, что переход из лабораторных координат  $(x', y')$  в повернутые координаты  $(x, y)$  в выражении (3) не означает, что пучок подвержен общему астигматизму. Дело в том, что этот переход важен только для формального математического описания и не влияет на симметрию матрицы **S**. Очевидно, что обратный переход в лабораторные  $(x', y')$  координаты не изменит структуру пучка. Когда пучок распространяется через астигматический элемент, но мы остаемся в повернутых  $(x, y)$  координатах, следует говорить о простом астигматизме, поскольку не возникает перепутывание между преобразованиями вдоль  $x$  и  $y$  направлениями (т.е. не перепутываются элементы блочных матриц в симплектической матрице **S**. направлениями (т.е. не перепутыва-

ются элементы блочных матриц в симплектической матрице  $(x', y')$  [23].

Теоретические и экспериментальные картины интенсивности асЛГ-пучков с равными квантовыми числами  $n = \ell = 12$  при общем астигматизме изображены на рис. 2 и показывают эволюцию их состояний при распространении вдоль  $z$ . Начальные состояния сЛГ-пучков перед астигматическим элементом определяются управляющим параметром  $\theta = 0,078\pi$ , соответствующим первому основному максимуму ОУМ [18]. На фоне каждой картины интенсивности отображается эллипс астигматизма асЛГ-пучка, построенный на основе формализма моментов интенсивности второго порядка. Степень эллиптичности и угол наклона эллипса указывают на влияние астигматизма на структуру пучка. После кадров с теоретическими распределениями интенсивности и эллипсов астигматизма приведена строка с экспериментальными результатами (см. параграф «Эксперимент»). Можно визуально сравнить теоретические и экспериментальные диаграммы интенсивности, чтобы увидеть хорошее согласование симплектических ABCD матричных преобразований с экспериментом. Более точная оценка согласования задается степенью корреляции  $Q = 0,95$ . Сразу после астигматического элемента ( $Z = z/z_0 = 0,1$ ) воспроизводится тонкая картина интенсивности со слегка нарушенной осевой симметрией, характерной для ЛГ-моды. В плоскости двойного фокуса ( $Z = 2f_x = 1$ ) цилиндрической линзы наблюдается типичное преобразование мод, которое позволяет измерять топологические заряды вихревых пучков [12, 24] с квантовыми числами  $(n, \ell)$ . Кроме того, в этой плоскости экспериментально воспроизводится асЛГ-пучок лишь со слегка искаженной прямоугольной симметрией.

### 1.2. Преобразования ОУМ

Удельный ОУМ устойчивых структурированных пучков в базисе невихревых ЭГ-мод находится как [25]

$$\ell_z(Z | \varepsilon, \theta, \phi) = 2 \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)!(j+1)! \text{Im}(C_j^* C_{j+1}) / J_{00} \quad (6)$$

с общей интенсивностью

$$J_{00} = \sum_{j=0}^N (N-j)! |C_j|^2.$$

Основные свойства ОУМ (6) лучше всего проявляются в асЛГ-пучках с одинаковыми радиальными и азимутальными числами  $n = \ell$ .

Более подробно характеристики ОУМ показаны на рис. 3. Рис. 3а иллюстрирует положение всплесков ОУМ в зависимости от параметра  $\theta$  и указывает на основной всплеск ОУМ вблизи нулевого параметра  $\theta$ . Так, для относительно небольших  $n = \ell = 4$  чисел фазовый параметр равен  $0,236$  (около  $13^\circ$ ), тогда как для  $n = \ell = 12$  его значение становится равным  $\theta = 0,062$  ( $3,5^\circ$ ). Это означает, что даже незначительное нарушение осевой симметрии ЛГ-моды (т.е. разрушение ее вырожденных кольцевых дислокаций и появление пар топологических вихревых диполей), вызванное общим астигматизмом, приводит к нарушению баланса между положительными и отрицательными вихревыми топологическими зарядами в диполях, ОУМ резко возрастает, становится порядка суммы радиального и азимутального чисел:  $\ell_z \sim n + \ell$ . Кривые на рис. 3б по-

казывают, в какой плоскости следует наблюдать пучок с максимально возможным ОУМ: плоскость наблюдения должна располагаться в фокальной плоскости цилиндрической линзы  $Z=0,5$ , а небольшое смещение от нее приводит к резкому уменьшению ОУМ. Более того, такое оптимальное положение плоскости наблюдения не зависит от чисел  $n$  и  $\ell$ . Если установить угол оси астигматического элемента равным  $\phi = \pi/2$ , то ОУМ меняет знак на противоположный (см. рис. 3в).

Дальнейшее смещение плоскости наблюдения существенно не изменяет ОУМ, так что при  $Z \gg 1$  мы имеем  $\ell_z \rightarrow n+1$ , несмотря на яркое структурированное преобразование картины интенсивности (см. рис. 2).

## 2. Симплектические преобразования моментов интенсивности

### 2.1. Симплектическая матрица моментов интенсивности

Астигматические преобразования описываются унифицированным образом в рамках симплектических матриц  $4 \times 4$ . Симплектическая матрица моментов интенсивности второго порядка в оптике записывается как [26, 27]

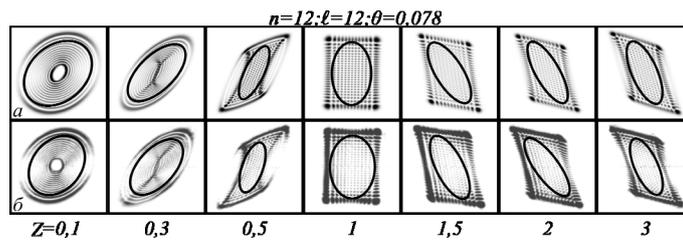


Рис. 2. Картины интенсивности и эллипсы моментов интенсивности для асЛГ-пучков с  $n = \ell = 12$ , распространяющихся вдоль Z-оси и подверженных общему астигматизму: (а) теория, (б) эксперимент,  $z_0 = 1$  м,  $f_x = 0,5$  м

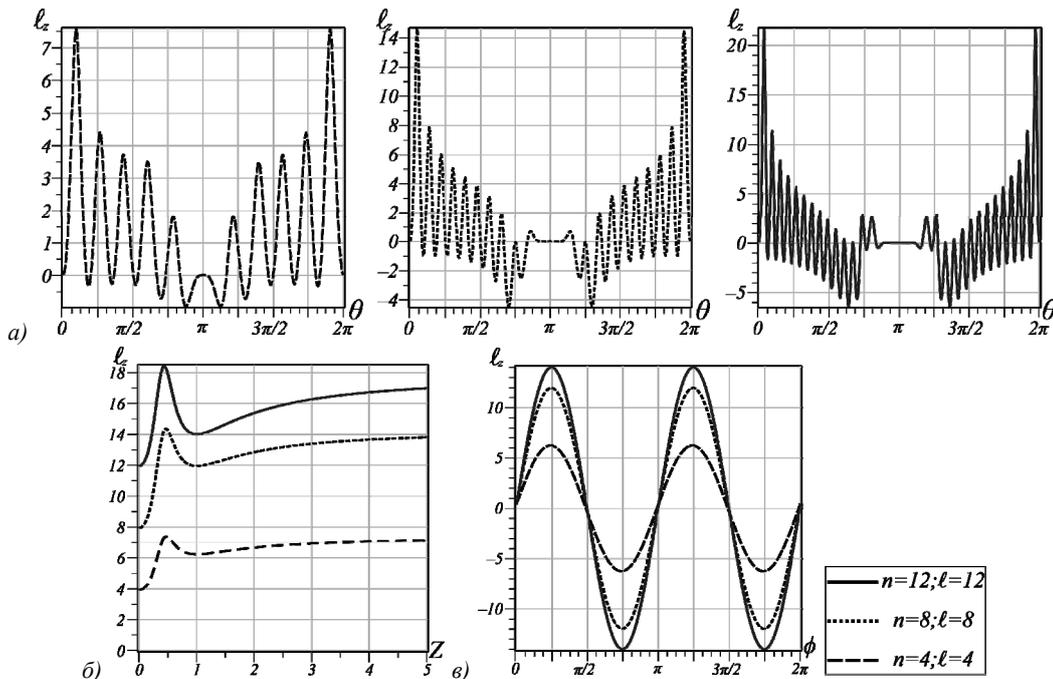


Рис. 3. Зависимость ОУМ  $\ell_z$  с различными числами ( $n, \ell$ ) от (а)  $\theta$ -параметра с  $\phi = \pi/4$  и  $Z = 1$ ; (б) от  $Z$  в области главного всплеска ОУМ, (в) от угла  $\phi$ ;  $z_0 = 1$  м,  $f_x = 0,5$  м

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \times \int \begin{pmatrix} x^2 & xy & xp_x & xp_y \\ yx & y^2 & yp_x & yp_y \\ p_x x & p_x y & p_x^2 & p_x p_y \\ p_y x & p_y y & p_y p_x & p_y^2 \end{pmatrix} I(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{p}, \quad (7)$$

где индекс  $T$  означает транспонирование,  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)^T$ ,  $I(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  – функция распределения Вигнера [27]. Эволюцию матрицы интенсивности вдоль оптической системы удобно описывать соотношением  $\mathbf{P}_{out} = \mathbf{S} \mathbf{P}_{in} \mathbf{S}^T$ .

В этом параграфе мы сосредоточимся на рассмотрении координатной матрицы  $\mathbf{W}$  и матрицы кручения  $\mathbf{M}$ . Это позволит, с одной стороны, изучить их вырождение при определенных условиях, а с другой стороны, значительно упростить метод измерения общего ОУМ, если заметить, что при этом резко уменьшает количество степеней свободы структурированного пучка. Диагональные элементы  $W_{xx}$  и  $W_{yy}$  матрицы  $\mathbf{W}$  характеризуют квадраты радиусов пучка вдоль  $x$  и  $y$  направлений, в то время как недиагональный элемент  $W_{xy} = W_{yx}$  указывает на асимметрию картины интенсивности пучка. Нondiagonalные элементы  $M_{12} = \langle xp_y \rangle$  и  $M_{21} = \langle yp_x \rangle$  матрицы  $\mathbf{M}$  определяют степень кручения пучка, в то время как их разность задает удельный ОУМ,  $\ell_z = M_{12} - M_{21}$ , [27].

Чтобы понять необычное поведение сЛГ-пучков с нарушенной симметрией в астигматической системе, заглянем в геометрию этих пучков, скрытую в симплектических матричных преобразованиях. Для этого используется геометрия матрицы  $\mathbf{W}$ , а именно, связанный с ней эллипс [27], записанный в виде

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{\det \mathbf{W}} (W_{yy} x^2 + W_{xx} y^2 - 2W_{xy} xy) = 1. \quad (8)$$

Угол наклона эллипса задается соотношением

$$\psi_{\mathbf{W}} = \arctan \left( \frac{W_{xy}}{W_{xx} - W_{yy}} \right). \quad (9)$$

Используя выражения (6) и (7), запишем элементы матрицы  $\mathbf{W}$ :

$$W_{xy} = (\bar{w}_x(z) \bar{w}_y(z) / 2J_{00}) \times \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)! (j+1)! \operatorname{Re}(C_j C_{j+1}^*), \quad (10)$$

$$W_{xx} = (\bar{w}_x(z) / 4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2N-2j+1)(N-j)! |C_j|^2, \quad (11)$$

$$W_{yy} = (\bar{w}_y(z) / 4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2j+1)(N-j)! |C_j|^2. \quad (12)$$

Эллипсы моментов интенсивности матрицы  $\mathbf{W}$  на рис. 2, полученные из соотношений (8), (10–12), от-

слеживают деформацию картины интенсивности вдоль оси  $Z_1$ , но их направления не всегда совпадают с деформированной картиной интенсивности из-за неравномерности распределения основных максимумов интенсивности. На рис. 4а–г изображена эволюция эллипсов моментов интенсивности на фоне распределений интенсивности с различными параметрами  $\theta$  и  $\varepsilon$  для двух групп пучков: стандартные сЛГ-пучки с  $\varepsilon = 1$  и гибридные пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ) [28] (т.е. сЛГ-пучки с  $\varepsilon \gg 1$ ) при распространении в свободном пространстве (рис. 4б) и астигматической системе (рис. 4г). Направления осей эллипса строго соответствуют форме распределения интенсивности только для ЭЛГ-пучков, хотя астигматизм старается синхронизировать оси эллипса и распределения интенсивности (рис. 4в) для стандартного аСЛГ-пучка.

### 2.2. Прямое измерение общего ОУМ и вырождение симплектической матрицы

Следует отметить, что еще в конце прошлого века авторы статей [21, 29] основывали классификацию лазерных пучков на соответствии между направлением соответствующих осей эллипса для матриц  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{U}$ . Мы не будем углубляться в тонкости этой классификации, но сосредоточимся на обсуждении проблемы потери степеней свободы в структурированных пучках при согласовании осей эллипсов матриц  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{M}$ . Действительно, стигматический пучок имеет только три независимых параметра, в то время как их количество в пучке с общим астигматизмом увеличивается до десяти [29], что соответствует появлению 10 дополнительных степеней свободы. Как изменится количество независимых параметров (степеней свободы) при совпадении осей эллипса матриц  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{M}$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратим внимание на тот факт, что ОУМ в уравнении (6) определяется через мнимую часть произведения амплитуд мод  $C_j C_{j+1}^*$ , в то время как перекрестный момент интенсивности в (10) задается действительной частью произведения амплитуд этих же мод. Фактически, это указывает на неявную связь между матрицами  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{M}$ . Если следовать рекомендации авторов статьи [30], то эту связь следует искать в ориентации соответствующих эллипсов этих матриц. Но, чтобы упростить математические выкладки, вспомним, что разность nondiagonalных элементов матрицы  $\mathbf{M}$  задает удельный ОУМ  $\ell_z = M_{12} - M_{21}$ . Поэтому более целесообразно рассмотреть отношение  $\ell_z(\theta) / 4W_{xy}(\theta)$  и записать

$$\Phi(\theta) = \arctan \left( \frac{\ell_z(\theta)}{4W_{xy}(\theta)} \right). \quad (13)$$

На рис. 5а–к представлены зависимости  $\Phi(\theta)$  двух различных групп пучков: пучков сЛГ с  $\varepsilon = 1$  и

гибридных ЭЛГ-пучков с  $\varepsilon = 10^3$ . Прямые линии на рис. 5а, б для сЛГ- ( $\varepsilon = 1$ ) и ЭЛГ-  $\varepsilon = 10^3$  в свободном пространстве задают простую связь между матрицами **W** и **M**. Более того, на рис. 5е, ж представлены зависимости  $W_{xy}(\theta)$  и  $\ell_z(\theta)$  соответственно, которые идентичны. Это указывает на вырождение **W** и **M** матриц для пучков в свободном пространстве. В оптической системе с простым астигматизмом ( $\phi = 0$ ) амплитуды ЭГ-мод описываются формулой (18) в нашей статье [18], которая отличается от формулы (5) множителем  $\exp(i\pi/2)$  в плоскости наблюдения  $Z = 2f_x$ . Это значит, что действительные и мнимые части в произведении  $C_j C_{j+1}^*$  в формулах (6) и (10) ме-

няются местами. Для наблюдаемых величин  $W_{xy}(\theta)$  и  $\ell_z(\theta)$  это означает сдвиг на  $\pi/2$  вдоль оси  $\theta$ , что и наблюдается на рис. 5з, д как для  $\varepsilon = 1$ , так и для  $\varepsilon \gg 1$  (см. рис. 5и, к). Таким образом, матрицы **W** и **M** остаются вырожденными и в случае простого астигматизма. Но, с другой стороны, это также означает потерю трех степеней свободы как для сЛГ-пучка в свободном пространстве, так и для асЛГ-пучка в системе с простым астигматизмом. Однако, как видно из рис. 5в, з, простая зависимость между  $W_{xy}(\theta)$  и  $\ell_z(\theta)$  в среде с общим астигматизмом исчезает, а следовательно, снимается и вырождение симплектической матрицы **P**.

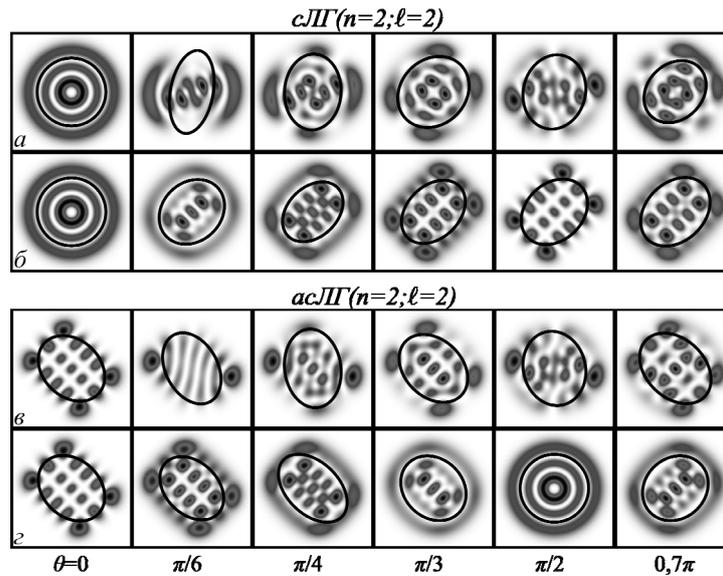


Рис. 4. Распределения интенсивности сЛГ- и гибридных ЭЛГ-пучков с  $n = \ell = 2$  в свободном пространстве (а–б) и в оптической системе с простым астигматизмом  $\phi = 0$  (в–з) для двух значений амплитудного параметра  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = 1$  (а), (в) и  $\varepsilon = 10^3$  (б), (з), и различных значений фазового параметра  $\theta$ . Также показаны соответствующие эллипсы моментов интенсивности **W**

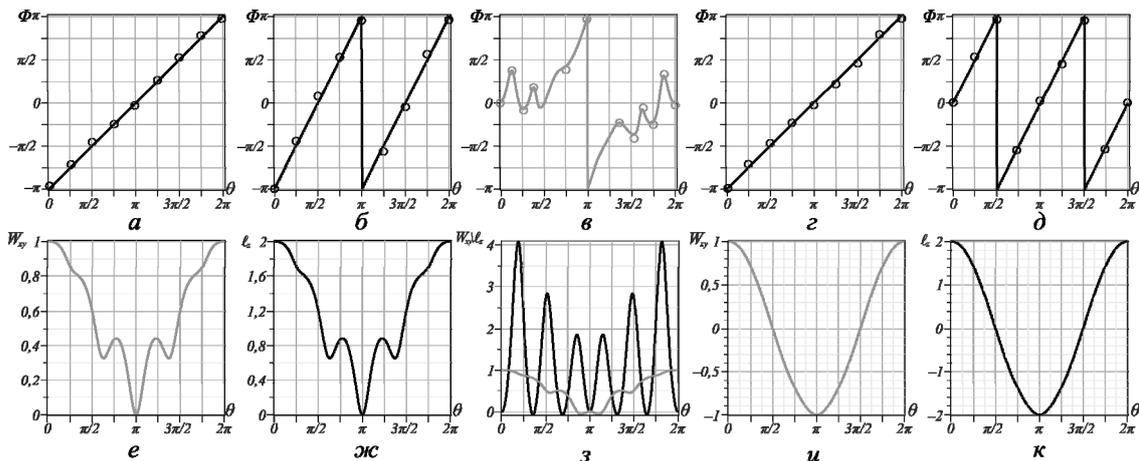


Рис. 5. Угловой параметр  $\Phi(\theta)$  для сЛГ-моды с  $n = \ell = 2$  и  $\varepsilon = 1$  (а) и для ЭЛГ-моды с  $n = \ell = 2$  и  $\varepsilon = 10^3$  (б) в свободном пространстве, в системе с простым астигматизмом  $\phi = 0$  (в, г) и в системе с общим астигматизмом  $\phi = \pi/4$  (в). Момент интенсивности  $W_{xy}$  и ОУМ  $\ell_z$  в свободном пространстве (е, ж) и системе с простым астигматизмом (и, к). Момент интенсивности  $W_{xy}$  и ОУМ для общего астигматизма  $\phi = \pi/4$  (з). Кружочки на рисунках (а)–(д) соответствуют экспериментально полученным значениям

Вообще говоря, для определения связи между элементом и ОУМ приходится решать систему из 10 уравнений [31].

С другой стороны, линейная зависимость (13) позволяет быстро найти общий ОУМ структурированного пучка за счет измерения момента интенсивности

$W_{xy}$ , избегая измерения всего спектра ЭГ-мод. Действительно, из (13) и рис. 5а находим  $\Phi(\theta)/\theta = 1$ , откуда получаем

$$\ell_z(\theta) = -4W_{xy}(\theta) \cdot \cot(\theta/2). \quad (14)$$

В случае, когда сЛГ-пучок превращается в ЭЛГ-пучок, повернутый на  $3\pi/4$  относительно стандартного состояния ЭЛГ-моды [29], выражение (14) превращается в

$$\begin{aligned} \ell_z(\theta) &= -4W_{xy}(\theta) \cdot \cot(\theta), \\ \theta &\in (-\pi, \pi) \end{aligned} \quad (15)$$

По сути, определение общего ОУМ  $\ell_z(\theta)$  сводится к одному измерению перекрестного момента интенсивности  $W_{xy}(\theta)$ . При других значениях амплитудного параметра  $\varepsilon \neq 1$  вырождение матрицы  $\mathbf{P}$  снимается, и пользоваться формулой (14) нельзя. Возникновение вырождения симплектической матрицы  $\mathbf{P}$  моментов интенсивности означает потерю 3 дополнительных степеней свободы из 10 возможных. Важно отметить, что в случае стандартного ЭЛГ-пучка перекрестный момент интенсивности равен нулю  $W_{xy} = 0$  [20] при любых значениях управляющего параметра, и проблема вырождения  $\mathbf{P}$  матрицы теряет смысл, поскольку согласно классификации в [30] гибридные ЭЛГ-пучки относятся к классу стигматических пучков, в то время как стоит только ЭЛГ-пучок повернуть на некоторый угол вокруг оси распространения, как проблема вырождения  $\mathbf{P}$  матрицы возвращается. Заметим, что вырождение блочных матриц  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{M}$  означает потерю информации о трех элементах блочной матрицы  $\mathbf{M}$ . Фактически, эти элементы задают характеристический эллипс астигматизма блока  $\mathbf{M}$ , который становится идентичным характеристическому эллипсу координатной матрицы  $\mathbf{W}$ . Однако различие этих эллипсов не приводит к резкому изменению структуры пучка и его переход в многообразие пучков с общим астигматизмом. Пучок еще остается в многообразии пучков с простым астигматизмом [29, 30] до тех пор, пока измерения осуществляются в повернутых координатах и перепутывания элементов блочных матриц. При переходе в лабораторные координаты  $(x', y')$  (или прохождение пучка через следующий астигматический элемент с иной ориентацией осей) возникает перепутывание элементов блочных матриц в симплектических матрицах  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{P}$ , и пучок с простым астигматизмом становится пучком с общим астигматизмом.

### 3. Эксперимент

Основной задачей нашего эксперимента явилось измерение спектра ЭГ-мод  $C_j$  при различных параметрах  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $Z$ , чтобы на их основе воспроизвести эллипсы матрицы  $\mathbf{W}$ , а также подтвердить на эксперименте соотношение (14) и (15). Эксперимент основан как на методах измерения моментов интенсивности второго порядка

матрицы  $\mathbf{W}$ , так и моментов интенсивности высших порядка при измерении спектра ЭГ-мод [11, 12]. Важной особенностью нового метода измерения общего ОУМ является то, что для измерения моментов интенсивности требуется только один снимок картины интенсивности в плоскости наблюдения. Для определения ОУМ достаточно ограничиться компьютерной обработкой картины интенсивности для вычисления матричного элемента  $W_{xy}$  и использовать выражения (14) и (15). Измерение и вычисление перекрестных моментов интенсивности и ОУМ осуществлялись в соответствии с рекомендациями ISO1146-2:2021 [30], которые позволяют также измерять все 10 элементов симплектической матрицы интенсивности второго порядка. Для построения эллипсов матрицы  $\mathbf{W}$  в (8) уже требуется измерить три элемента  $W_{xx}$ ,  $W_{yy}$  и  $W_{xy}$ . Для экспериментальной проверки выражений (14) и (15) потребовался целый комплекс измерений спектра ЭГ-мод (амплитуд и фаз) как в свободном пространстве, так и системе с цилиндрической линзой (сЛГ- и аСЛГ-пучки). Для измерений был выбран базис ЭГ-мод [11]. Что касается измерения фаз, то в процессе обработки картины интенсивности структурированного пучка определяются перекрестные элементы матрицы интенсивности, включающие синусы и косинусы разности фаз каждой пары мод. Полагая, что фаза основной моды равна нулю, последовательно определяются начальные фазы мод.

Для измерения матричных элементов  $W_{ij}$  и спектров ЭГ-мод достаточно подвергнуть компьютерной обработке картину интенсивности пучка, расположенную в двойном фокусе цилиндрической линзы, спектры квадрата амплитуд  $|C_k|^2$  и фаз  $\beta_k$  которых представлены на рис. 6 (при изучении эволюции картины интенсивности и эллипсов матрицы  $\mathbf{W}$  на рис. 2 и рис. 4).

Сравнение экспериментальных и теоретических картин интенсивности, а также эллипсов матрицы  $\mathbf{W}$  для системы с общим астигматизмом на рис. 2 показало их согласование со степенью корреляции 0,96. Сравнение теории и эксперимента на рис. 5а–в, д показало степень корреляции 0,94, что лежит в интервале относительной ошибки измерений.

### 4. Обсуждение и выводы

Вырожденные кольцевые дислокации, присущие стандартным ЛГ-пучкам, разрушаются в структурированных сЛГ-пучках, порождая пары топологических вихревых диполей, вызывая быстрые осцилляции ОУМ при изменении фазового  $\theta$ -параметра сЛГ, в то время как ОУМ не превышает азимутального числа  $\ell$  исходного пучка ЛГ. Перераспределение энергии между оптическими вихрями в топологических диполях, вызванное астигматическими элементами в оптической системе, формирует сложный узор картины интенсивности, что приводит к резким всплескам ОУМ, величина которых может быть порядка суммы азимутального и радиального чисел  $\ell + n$ . Здесь важно заметить, что даже свободный от

оптических вихрей фундаментальный гауссов пучок, подверженный астигматическому преобразованию на астигматической линзе, приобретает гигантский ОУМ, физическая природа которого подробно рассмотрена в статье Котляра и соавторов [32]. Однако, когда в формировании ОУМ структурированного пучка участвует разрушение вырожденных оптических вихрей и кольцевых дислокаций, приходится

привлекать новый уровень описаний, основанный на симплектических преобразованиях. Чтобы проанализировать тонкую структуру таких многопараметрических вихревых пучков, мы предложили использовать комбинацию методов симплектических матриц ABCD для описания распространения пучков и симплектических матриц моментов интенсивности для анализа скрытых свойств структурированных пучков.

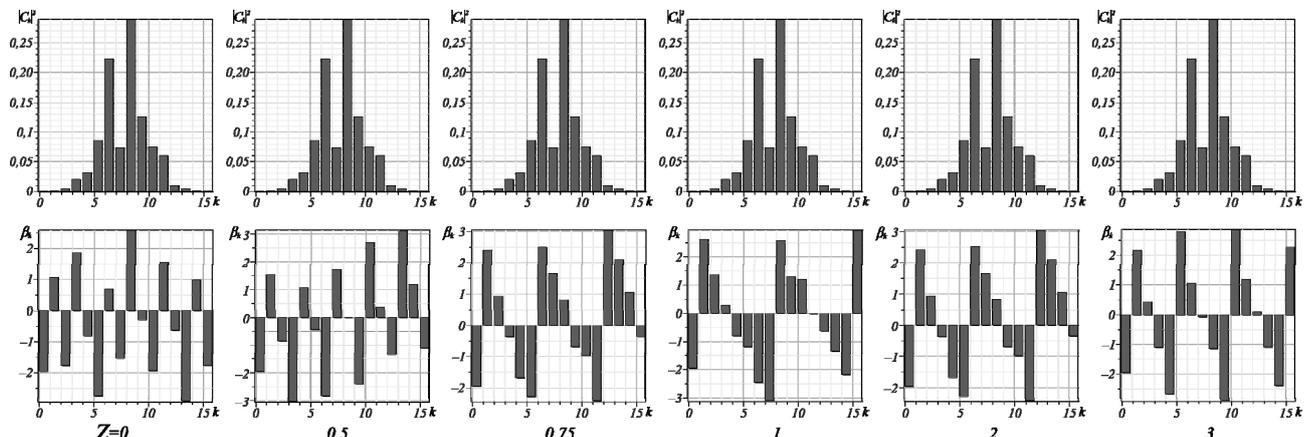


Рис. 6. Эволюция экспериментального спектра амплитуд  $C_j$  и фаз  $\beta_j$  аСЛГ-пучка с  $n = \ell = 12$ ,  $\theta = 0,078$ ,  $\varepsilon = 1$  в системе с общим астигматизмом  $\phi = \pi/4$ . Фазовый параметр  $\theta$  соответствует первому максимуму ОУМ

Мы показали, что модель астигматического структурированного пучка, полученная ABCD матричным методом, оказывается более простой и наглядной по сравнению с моделью, полученной с помощью интегральных преобразований [17], и занимает значительно меньше времени при компьютерном моделировании эволюции аСЛГ-пучков с большими квантовыми числами. Мы детально изучили физические механизмы формирования сверхвысоких значений ОУМ после цилиндрической линзы при общих астигматических преобразованиях.

Теоретически обоснован и экспериментально подтвержден новый метод измерения общего ОУМ структурированного ЛГ-пучка, основанный на единственном измерении  $W_{xy}$  момента интенсивности в результате компьютерной обработки снимка картины интенсивности. Мы обнаружили, что такая возможность простых измерений общего ОУМ проявляется благодаря вырождению симплектической матрицы  $\mathbf{P}$  моментов интенсивности как при свободном распространении структурированного пучка, так и его распространении через оптическую систему с простым астигматизмом. Заметим, что в общем случае астигматизм оптической системы вводит дополнительные 10 степеней свободы в структурированный пучок. Однако внутренняя симметрия аСЛГ-пучка такова, что две блочных матрицы симплектического преобразования оказываются вырожденными, что и способствует простому соотношению между перекрестным моментом интенсивности и ОУМ, но при этом теряется три дополнительных степени свободы. Простой астигматизм не изменяет существенно симметрию пучка, так что матрица моментов интенсивности  $\mathbf{P}$

остается вырожденной. Вырождение матрицы  $\mathbf{P}$  снимается в системах с общим астигматизмом.

### Благодарности

Авторы благодарят С.И. Халилова за предоставленные экспериментальные результаты.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №24-22-00278) в части «Комплексная амплитуда структурированного пучка Лагерра–Гаусса» и «Астигматическое преобразование структурированного пучка Лагерра–Гаусса».

### References

- [1] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. Nat Photonics 2021; 15: 253-262. DOI: 10.1038/s41566-021-00780-4.
- [2] Porfirev AP, Kuchmizhak AA, Gurbatov SO, Juodkazis S, Khonina SN, Kulchin YuN. Phase singularities and optical vortices in photonics. Phys Usp 2022; 65: 789-811. DOI: 10.3367/UFNe.2021.07.039028.
- [3] He C, Shen Y, Forbes A. Towards higher-dimensional structured light. Light Sci Appl 2022; 11: 205. DOI: 10.1038/s41377-022-00897-3.
- [4] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Diffraction optical elements matched to the Gauss-Laguerre modes. Opt Spectrosc 1998; 85(4): 636-644.
- [5] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Laakkonen P, Turunen J. Gauss-Laguerre modes with different indices in prescribed diffraction orders of a diffractive phase element. Opt Commun 2000; 175(4-6): 301-308. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00472-7.
- [6] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. Nature 2001; 412: 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [7] Soskin MS, Gorshkov VN, Vasnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. Phys Rev A 1997; 56: 4064-4075. DOI: 10.1103/PhysRevA.56.4064.

- [8] Chen M, Roux FS, Olivier JC. Detection of phase singularities with a Shack-Hartmann wavefront sensor. *J Opt Soc Am A* 2007; 24: 1994-2002. DOI: 10.1364/JOSAA.24.001994.
- [9] Otte E, Bobkova V, Trinschek S, Rosales-Guzmán C, Denz C. Single-shot all-digital approach for measuring the orbital angular momentum spectrum of light. *APL Photonics* 2022; 7(8): 086105. DOI: 10.1063/5.0086536.
- [10] Volyar AV, Abramochkin EG, Egorov YuA, Bretsko MV, Akimova YaE. Digital sorting of Hermite-Gauss beams: mode spectra and topological charge of a perturbed Laguerre-Gauss beam. *Computer Optics* 2020; 44(4): 501-509. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-747.
- [11] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum. *Computer Optics* 2019; 43(4): 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
- [12] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Ya, Bretsko M, Egorov Yu. Fast oscillations of orbital angular momentum and Shannon entropy caused by radial numbers of structured vortex beams. *Appl Opt* 2022; 61(21): 6398-6407. DOI: 10.1364/AO.464178.
- [13] Alperin SN, Niederiter RD, Gopinath JT, Siemets KE. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41(21): 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
- [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Methods for determining the orbital angular momentum of a laser beam. *Computer Optics* 2019; 43(1): 42-53. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
- [15] Arnaud JA, Kogelnik H. Gaussian light beams with general astigmatism. *Appl Opt* 1969; 8: 1687-1693. DOI: 10.1364/AO.8.001687.
- [16] Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Control of giant orbital angular momentum bursts of structured Laguerre-Gaussian beams in a medium with general astigmatism. *Computer Optics* 2024; 48(1): 35-46. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1395.
- [17] Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Orbital angular momentum burst control in astigmatic structured beams in ABCD-matrix transforms. *Computer Optics* 2024; 48(2): 171-179. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1411.
- [18] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [19] Abramochkin E, Volostnikov V. Modern optics of Gaussian beams [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publishers; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
- [20] Nemes G, Serna J. Laser beam characterization with use of second order moments: an overview. DPSS (Diode Pumped Solid State) lasers: applications and issues 1998; MQ: MQ2. DOI: 10.1364/DLAI.1998.MQ2.
- [21] Gerrard A, Burch JM. Introduction to matrix methods in optics. London, New York: Wiley; 1975. ISBN: 0-486-68044-4.
- [22] Alieva T, Bastiaans MJ. Alternative representation of the linear canonical integral transform. *Opt Lett* 2005; 30: 3302-3304. DOI: 10.1364/OL.30.003302.
- [23] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Determination of an optical vortex topological charge using an astigmatic transform. *Computer Optics* 2016; 40(6): 781-792. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-781-792.
- [24] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of structurally stable laser beams. *Computer Optics* 2022; 46(4): 517-521. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1108.
- [25] Luneburg RK. Mathematical theory of optics. Berkeley: University of California Press; 1966. ISBN: 978-0520007802.
- [26] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. *J Opt Soc Am A* 2003; 20: 1635-1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
- [27] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Hermite-Laguerre-Gauss beams. *Phys Wave Phenom* 2010; 18: 14-22. DOI: 10.3103/S1541308X10010036.
- [28] Nemes G, Siegman AE. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J Opt Soc Am A* 1994; 11: 2257-2264. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002257.
- [29] ISO 11146-2:2021. Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 2: General astigmatic beams. Geneva, Switzerland: ISO; 2021.
- [30] Nemes G. Intrinsic and geometrical beam classification, and the beam identification after measurement. *Proc SPIE* 2003; 4932: 624-635. DOI: 10.1117/12.472380.
- [31] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018, 26(1): 141-156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.

#### Сведения об авторах

**Воляр Александр Владимирович** – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com)

**Абрамочкин Евгений Григорьевич** – доктор физико-математических наук (2006), ведущий научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru)

**Брецько Михаил Владимирович** – кандидат физико-математических наук (2022), старший преподаватель кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика. E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com)

**Акимова Яна Евгеньевна** – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru)

ГРНТИ:29.31.15

Поступила в редакцию – 14 февраля 2024 г. Окончательный вариант – 12 апреля 2024 г.

---

# Directly measuring the total orbital angular momentum in astigmatic structured beams and the loss of several degrees of freedom

A.V. Volyar<sup>1</sup>, E.G. Abramochkin<sup>2</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,  
295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4;

<sup>2</sup> Lebedev Physical Institute, 443011, Samara, Russia, Novo-Sadovaya 221

## Abstract

In this article, a model of the astigmatic structured beam obtained by the ABCD matrix method is shown to be simpler and more visual compared to the approach of integral transforms [Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Control of giant orbital angular momentum bursts of structured Laguerre-Gaussian beams in a medium with general astigmatism. *Computer Optics* 2024; 48(1): 35-46. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1395]. We study in detail physical mechanisms of shaping super-high orbital angular momentum (OAM) after a cylindrical lens during general astigmatic transformations. We also theoretically substantiate and experimentally confirm a new technique for measuring a total OAM in the structured beam based on a single measurement of the crossed intensity moment as a result of computer processing of the intensity pattern. It is shown that such simplified measurements are based on the degeneracy of the off-diagonal elements **W** and **M** of the submatrices, which reduces the number of additional degrees of freedom of the structured beam from ten to seven.

**Keywords:** structural light, astigmatic beams, ABCD matrices, orbital angular momentum, intensity moments.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Akimova YE. Direct measuring the total orbital angular momentum in astigmatic structured beams and the loss of several degrees of freedom. *Computer Optics* 2024; 48(6): 832-840. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1506.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the Russian Science Foundation under project No. 24-22-00278 (Sections “Complex amplitude of a structured Laguerre-Gaussian beam” and “Astigmatic transformation of a structured Laguerre-Gaussian beam”).

---

## Authors' information

**Alexander Vladimirovich Volyar**, (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.

E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com)

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962) graduated from Kuibyshev State University (1984), majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor's Degree in Physics in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests include complex analysis, special functions, and mathematical physics equations.

E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru)

**Mikhail Vladimirovich Bretsko**, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. Co-author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics. E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com)

**Yana Evgenievna Akimova**, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her Ph. D. in Physics in 2022. Co-author of about 40 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics. E-mail: [ak1mova.yana@yandex.ru](mailto:ak1mova.yana@yandex.ru)

---

Received February 14, 2024. The final version – April 12, 2024.

---