

## Суперпозиция оптического вихря и плоской волны с линейными поляризациями в остром фокусе

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, С.С. Стафеев<sup>1,2</sup>, А.М. Телегин<sup>1,2</sup>, Е.С. Козлова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Рассмотрена острая фокусировка суперпозиции вихревого лазерного пучка с топологическим зарядом  $n$  с линейной поляризацией и плоской волны с такой же линейной поляризацией, направленной вдоль горизонтальной оси. В формализме Ричардса–Вольфа получены аналитические выражения для распределения интенсивности и продольной проекции спинового углового момента в плоскости фокуса. Показано, что для четных и нечетных номеров  $n$  интенсивность и спиновый угловой момент обладают разной симметрией: при четном  $n$  они симметричны относительно обеих декартовых осей, а при нечетном  $n$  они симметричны только относительно вертикальной оси. Распределение интенсивности имеет  $2n$  локальных максимумов в фокусе, и на оптической оси интенсивность при любом  $n$  отлична от нуля. Распределение продольной проекции спинового углового момента (плотность спина) в плоскости фокуса имеет  $(n+2)$  субволновых областей с положительным спиновым угловым моментом и  $(n+2)$  областей с отрицательным спиновым угловым моментом, центры которых, чередуясь, лежат на окружности некоторого радиуса с центром на оптической оси. Такое распределение спина с разным знаком демонстрирует продольный спиновый эффект Холла в фокусе. Суммарно в фокусе отрицательный и положительный спин взаимно компенсируется и равен нулю.

**Ключевые слова:** спиновый угловой момент, формулы Ричардса–Вольфа, эффект Холла, оптический вихрь, плоская волна, линейная поляризация.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Суперпозиция оптического вихря и плоской волны с линейными поляризациями в остром фокусе / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.М. Телегин, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2024. – Т. 48, № 6. – С. 851-857. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1502.

**Citation:** Kotlyar VV, Stafeyev SS, Telegin AM, Kozlova ES. Superposition of an optical vortex and a plane wave with linear polarization states at the tight focus. Computer Optics 2024; 48(6): 851-857. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1502.

### Введение

Изучение оптических эффектов в остром фокусе когерентного излучения – актуальная и интересная задача, так как в остром фокусе все шесть компонент напряженности электрического и магнитного полей дают примерно одинаковый вклад в формирование поля. Нельзя пренебрегать вкладом каких-то компонент поля, и нельзя пользоваться параксиальным приближением. Поэтому в остром фокусе известно много интересных оптических эффектов: оптические колеса [1], поляризационная лента Мёбиуса [2, 3], узлы нулей интенсивности [4–6], обратный поток энергии [7], магнетизация [8–10], спин-орбитальная конверсия [11–13], спиновый [14–16] и орбитальный [17] эффекты Холла. Остановимся немного подробнее на этих эффектах.

«Фотонные колеса» [1] формируются в фокусе за счет поперечного спинового углового момента (СУМ), когда у продольной составляющей электрического поля имеется задержка по фазе на  $\pi/2$  с одной или двумя поперечными составляющими. При

этом эллипсы вращения вектора поляризации лежат в меридиональной плоскости, которая образуется оптической осью и одной из поперечных декартовых осей. Вращение вектора поляризации в меридиональной плоскости при распространении пучка напоминает вращение колеса.

Ленты Мёбиуса представляют собой трехмерные структуры, состоящие из поверхности только с одной стороной. Эти структуры, которые можно легко продемонстрировать, разрезав бумажное кольцо, добавив поворот и затем снова соединив концы бумаги вместе, обладают интригующими математическими свойствами с точки зрения топологии и геометрии. В [2] использовали жидкокристаллическую q-пластинку для создания заданного волнового фронта лазерного пучка и получения оптической версии ленты Мёбиуса путем эффективного «обрезания и скручивания» поляризации светового пучка в остром фокусе. А далее, используя метод трехмерной нанотомографии оптических векторных полей, полностью реконструировали структуру поляризации света в фокальной области и подтвердили появление поляризационных структур

Мёбиуса. Также разные формы поляризационной ленты Мебиуса в фокусе получены в [3].

Теория узловых фотонных структур развита в [4, 5]. В [6] рассмотрены узлы нулей интенсивности (сингулярностей фазы или поляризации) в фокусе. Для узловых структур, приближающихся к масштабу длины волны, эффекты продольной поляризации становятся существенными, а электрические и магнитные поля различаются, что приводит к переплетению узловых структур в поперечной и продольной компонентах поляризации, которые называются узловым пучком поляризационных сингулярностей. В [6] анализируют их структуру с использованием полиномиальных пучковых аппроксимаций и численной теории дифракции.

В [7], сравнивая численное и экспериментальное распределения интенсивности в остром фокусе оптического вихря с топологическим зарядом 2 и левой круговой поляризацией, определили диаметр «трубки» с обратным потоком световой энергии. Для числовой апертуры 0,95 и длины волны 532 нм диаметр трубки обратного потока вдоль оптической оси составил около 300 нм. Экспериментально показано также, что при фокусировке пучка с цилиндрической поляризацией второго порядка линзой с числовой апертурой 0,95 в фокусе возникает циркулярно-симметричный поток энергии с очень слабой интенсивностью в центре (пятно Араго). Это пятно Араго формируется в результате дифракции прямого потока энергии на границе трубки обратного потока энергии.

Эффект оптической магнетизации в остром фокусе рассматривался [8–10]. Для полностью оптической магнитной записи желательно иметь фокальное пятно с чистой продольной намагниченностью. В [10] рассмотрена металинза, обладающая тройными функциями преобразователя азимутальной поляризации, винтовой фазовой пластинки и фокусирующей линзы. Комбинация «три в одном» позволяет преобразовывать линейно поляризованный падающий свет в вихревой луч первого порядка с азимутальной поляризацией и фокусировать его в пятно с дифракционным ограничением. Состояние поляризации фокального пятна измеряется как чистая круговая поляризация, что означает, что чистое продольное поле намагничивания может быть индуцировано обратным эффектом Фарадея. Латеральная ширина фокального пятна на полувысоте составляет 1,9 мкм, а экспериментальная эффективность преобразования метаповерхности составляет около 19 %.

Эффект спин-орбитальной конверсии в остром фокусе теоретически рассмотрен в [11–13]. В [12] показано, что в остром фокусе гауссова пучка с круговой поляризацией продольная компонента спинового углового момента максимальна на оптической оси, причем продольная составляющая орбитального углового момента (ОУМ) максимальна на кольце. Таким образом, можно оценить влияние СУМ и ОАМ

на движение захваченной микрочастицы в отдельности. Экспериментально продемонстрировано спин-орбитальное преобразование для гауссова пучка с круговой поляризацией, когда в фокусе возникает поперечный поток энергии (орбитальный угловой момент), который передается микрочастице и заставляет вращаться. Спин-орбитальная конверсия происходит также при прохождении света через металинзу [13].

Фотонный эффект Холла был сначала обнаружен при прохождении света с линейной поляризацией через многослойный микрорезонатор [14]. Спиновый [15] и орбитальный [16] эффекты Холла в остром фокусе заключаются в том, что начальное световое поле имеет нулевой СУМ, а в фокусе появляются разделенные в пространстве области, в которых СУМ или ОУМ имеют разные знаки [17]. То есть в фокусе появляются фотоны со спином разного знака и с топологическим зарядом разного знака.

В данной работе мы продолжаем изучать спиновый эффект Холла в остром фокусе. Ранее в работе [16] мы показали, что в остром фокусе оптического вихря с топологическим зарядом  $n$  и линейной поляризацией формируются всегда четыре области со спином разного знака, независимо от номера  $n$ . В данной работе мы покажем, что если оптический вихрь с линейной поляризацией когерентно сложить с плоской волной также с линейной поляризацией (обе линейные поляризации в одном направлении), то число областей со спином разного знака в фокальной плоскости будет увеличиваться с ростом топологического заряда оптического вихря. Теория в данной работе основана на формализме Ричардса–Вольфа [18], который адекватно описывает напряженность монохроматического электромагнитного поля вблизи острого фокуса.

### 1. Теоретические основания

Рассмотрим начальное световое поле, вектор Джонса которого имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = A(\theta) \begin{pmatrix} \exp(in\varphi) + a \\ 0 \end{pmatrix} = A(\theta) \left[ e^{in\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (1)$$

где  $(\theta, \varphi)$  – полярный и азимутальные углы, задающие точку на сфере, центр которой лежит в фокусе,  $n$  – топологический заряд оптического вихря,  $a$  – постоянная,  $A(\theta)$  – амплитуда начального светового поля, зависящая только от полярного угла, который связан с радиальной переменной ( $r = f \cos \theta$ ,  $f$  – фокусное расстояние сферической линзы). Из (1) видно, что начальное световое поле является суперпозицией оптического вихря с линейной поляризацией и плоской волны также с линейной поляризацией. Поэтому каждая проекция вектора напряженности электрического поля вблизи фокуса будет также являться суперпозицией двух полей оптического вихря с линейной поляризацией и плоской волны с линейной поля-

ризациями. Эти проекции можно взять соответственно из работ [16] и [18, 19]. Тогда, согласно формализму Ричардса–Вольфа, в фокусе поля (1) получим:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i^{n-1}}{2} e^{in\varphi} (2I_{0,n} + e^{i2\varphi} I_{2,n+2} + e^{-i2\varphi} I_{2,n-2}) - \\ &- ia(I_{0,0} + I_{2,2} \cos 2\varphi), \\ E_y &= \frac{i^n}{2} e^{in\varphi} (e^{-i2\varphi} I_{2,n-2} - e^{i2\varphi} I_{2,n+2}) - iaI_{2,2} \sin 2\varphi, \\ E_z &= i^n e^{in\varphi} (e^{-i\varphi} I_{1,n-1} - e^{i\varphi} I_{1,n+1}) - 2aI_{1,1} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнении (2) величины  $I_{\nu,\mu}$  обозначают интегральные функции, зависящие только от радиальной переменной, у которых первый индекс – тип интеграла ( $\nu=0, 1, 2$ ), а второй индекс ( $\mu=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) равен порядку функции Бесселя  $J_\mu(\xi)$  под интегралом:

$$\begin{aligned} I_{\nu,\mu} &= \left( \frac{4\pi f}{\lambda} \right)^{\nu} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left( \frac{\theta}{2} \right) \times \\ &\times \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_\mu(\xi) d\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число света с длиной волны  $\lambda$ ,  $f$  – фокусное расстояние сферической линзы,  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $\theta_0$  – максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий

$$\begin{aligned} I &= I_0 + a^2 [I_{0,0}^2 + I_{2,2}^2 + 2I_{1,1}^2 + 2 \cos 2\varphi (I_{0,0}I_{2,2} + I_{1,1}^2)] + \\ &+ 2a(-1)^p \{ (I_{0,0} + I_{2,2} \cos 2\varphi) [I_{0,n} \cos(n\varphi + \delta_p) + I_{2,n-2} \cos((n-2)\varphi + \delta_p) + \\ &+ I_{2,n+2} \cos((n+2)\varphi + \delta_p)] + I_{2,2} \sin 2\varphi [I_{2,n-2} \sin((n-2)\varphi + \delta_p) + \\ &+ I_{2,n+2} \sin((n+2)\varphi + \delta_p)] - 2I_{1,1} \cos \varphi [I_{1,n-1} \cos((n-1)\varphi + \delta_p) - I_{1,n+1} \cos((n+1)\varphi + \delta_p)] \}, \\ I_0 &= I_{0,n}^2 + \frac{1}{2} I_{2,n-2}^2 + \frac{1}{2} I_{2,n+2}^2 + I_{1,n-1}^2 + I_{1,n+1}^2 + \cos 2\varphi [I_{0,n} (I_{2,n-2} + I_{2,n+2}) - 2I_{1,n-1} I_{1,n+1}], \\ \delta_p &= \begin{cases} 0, & n = 2p, p = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{\pi}{2}, & n = 2p + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

В (4)  $I_0$  – это интенсивность при  $a=0$ , которая совпадает с ранее полученной в [16]. Так как в (4) входит слагаемое с  $I_{0,0}$ , то в центре фокальной плоскости при любом  $n$  интенсивность будет отлична от нуля. И центральный максимум интенсивности будет вытянут вдоль оси  $x$ , параллельно направлению начальной поляризации. Это определяется зависимостью основных по вкладу в интенсивность слагаемых с сомножителем  $\cos 2\varphi$ , который имеет два положительных максимума при углах  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ . Из (4) видно, что интенсивность имеет разный вид для четного и нечетного номеров  $n$ . Причем, если  $n=2p$  – четный, то картина интенсивности центрально-симметричная, так как аргументы тригонометрических функций, входящих в поперечную интенсивность, являются четными функциями, и поэтому сами тригонометрические функции не меняют знак при замене  $\varphi$  на  $\varphi + \pi$ . А в

числовую апертуру апланатической линзы  $NA = \sin(\theta_0)$ ,  $\xi = kr \sin(\theta)$ . Схема, иллюстрирующая фокусирующую систему, приведена на рис. 1. В данной работе считалось, что свет фокусируется апланатическим объективом. В уравнении (3) это отражено в виде наличия множителя (функции аподизации)  $\cos^{1/2}(\theta)$  [18]. При смене фокусирующей линзы изменится лишь функция аподизации в (3), при этом все выводы данной статьи останутся прежними. Например, при использовании дифракционной линзы множитель  $\cos^{1/2}(\theta)$  в (3) следует заменить на множитель  $\cos^{-3/2}(\theta)$  [20].

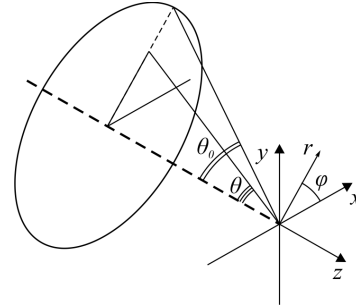


Рис. 1. Схема, иллюстрирующая фокусирующую систему

С помощью (2) можно найти выражение для распределения интенсивности в фокальной плоскости:

выражение для продольной интенсивности входят произведения косинусов с нечетными аргументами, которые также не меняют знак при замене  $\varphi$  на  $\varphi + \pi$ . Так как выражение (4) при  $n=2p$  не меняется при замене  $\varphi$  на  $-\varphi$ , то картина интенсивности симметрична относительно горизонтальной оси. И так как картина осесимметрична, то она и симметрична относительно вертикальной оси. При нечетном топологическом заряде  $n=2p+1$  картина интенсивности будет иметь только симметрию относительно вертикальной декартовой оси, так как не изменяется при замене  $\varphi$  на  $\pi - \varphi$ . Число основных локальных максимумов интенсивности, куда в основном попадает световая энергия, можно определить на основе приближенного уравнения, учтя только «главные» слагаемые в (4):

$$I \approx I_{0,n}^2 + a^2 I_{0,0}^2 + 2a(-1)^p I_{0,0} I_{0,n} \cos(n\varphi + \delta_p). \quad (5)$$

В (5) вошли только квадраты или произведения интегралов (3) с первым нулевым номером. Так сделано потому, что в [19] показано, что основной вклад в световое поле в фокусе дают слагаемые с нулевым первым номером у интегралов (3). Из (5) видно, что число боковых лепестков картины интенсивности будет  $2n$ , так как косинус на периоде будет менять знак  $2n$  раз.

$$S_z = \frac{1}{2}(I_{2,n-2} - I_{2,n+2})(I_{2,n-2} + I_{2,n+2} + 2 \cos 2\varphi I_{0,n}) + 2a(-1)^p \begin{cases} \cos n\varphi I_{2,2}(I_{2,n-2} - I_{2,n+2}) + \\ + I_{0,0}(\cos(n-2)\varphi I_{2,n-2} - \cos(n+2)\varphi I_{2,n+2} - 2I_{2,2} \sin 2\varphi \sin n\varphi), n = 2p, \\ - \sin n\varphi I_{2,2}(I_{2,n-2} - I_{2,n+2}) - \\ - I_{0,0}(\sin(n-2)\varphi I_{2,n-2} - \sin(n+2)\varphi I_{2,n+2} - 2I_{2,2} \sin 2\varphi \cos n\varphi), n = 2p + 1. \end{cases} \quad (7)$$

Из (7) видно, что  $a=0$  продольная проекция СУМ совпадает с СУМ для оптического вихря с линейной поляризацией [16]. Из (7) также видно, что при  $n$  четном и нечетном выражение для СУМ будет иметь разный вид и будет обладать разной симметрией. При  $n$  четном СУМ (7) будет обладать центральной симметрией, так как под синусами и косинусами угол  $\varphi$  будет умножаться на четное число, и поэтому при замене  $\varphi$  на  $\varphi + \pi$  картина СУМ не изменится. Также из (7) видно, что замена  $\varphi$  на  $-\varphi$  не приводит к изменению картины СУМ. Это означает, что распределение продольной СУМ симметрично относительно горизонтальной оси. И так как картина СУМ симметрична относительно горизонтальной оси и одновременно осесимметрична, то она симметрична и относительно вертикальной оси. При нечетном  $n$  картина СУМ (7) будет симметрична только относительно вертикальной оси. Так как при замене  $\varphi$  на  $\pi - \varphi \sin(2p+1)\varphi$  не изменит знака. Так как в (7) входит  $\cos(n+2)\varphi$  при четном  $n$  или  $\sin(n+2)\varphi$  при нечетном  $n$ , то максимальное число положительных и отрицательных областей СУМ при обходе в сечении пучка по окружности с центром на оптической оси будет равно  $2(n+2)$ . То есть у поля (1) в фокусе будет четное число положительных и отрицательных областей со спинами разных знаков. Это связано с тем, что так как в начальной плоскости у поля (1) спин равен нулю  $S_{z,0} = 0$ , то и в фокусе полный спин (продольная компонента СУМ, усредненная по сечению пучка в фокусе) должен быть равен нулю:

$$\hat{S}_z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S_{z,0} r dr d\varphi = 0. \quad (8)$$

Это следует также из (7), если проинтегрировать по всей плоскости фокуса. Слагаемые в (7), в которых есть тригонометрические функции, косинус и синус после интегрирования по углу  $\varphi$  по периоду дадут нули. Оставшиеся слагаемые в (7), не содержащие тригонометрических функций, также дадут ноль:

С помощью выражений (2) можно найти выражение для продольной проекции СУМ, согласно формуле:

$$S_z = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \quad (6)$$

Подставляя (2) в (6), получим:

$$\hat{S}_z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (I_{2,n-2}^2 - I_{2,n+2}^2) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^\infty (I_{2,n-2}^2 - I_{2,n+2}^2) r dr = W_2 - W_2 = 0. \quad (9)$$

Выражение (9) следует из результата интегрирования по радиальной переменной  $r$  выражения (3), которое получено в [19]:

$$W_v = 2\pi \int_0^\infty |I_{v,\mu}(r)|^2 r dr. \quad (10)$$

Из (10) видно, что результат интегрирования выражений (3) не зависит от второго номера, то есть от номера функции Бесселя. Поэтому энергия слагаемых  $I_{2,n-2}$  и  $I_{2,n+2}$  будет одинаковой (9).

## 2. Моделирование

С помощью формул Ричардса–Вольфа [18] моделировалась фокусировка линзой с числовой апертурой  $NA=0,95$  пучка с длиной волны  $\lambda=532$  нм светового поля (1), при  $a=1$ . Ниже показано распределение интенсивности  $I=|E_x|^2+|E_y|^2+|E_z|^2$  и продольной проекции спинового углового момента (6) для разных ТЗ оптического вихря:  $n=2$  (рис. 2),  $n=3$  (рис. 3),  $n=4$  (рис. 4),  $n=5$  (рис. 5).

Из рис. 2а и 4а видно, что картины интенсивности при  $n=2, 4$  симметричны относительно обеих осей координат, а интенсивность на рис. 3а и 5а при  $n=3, 5$  симметрична только относительно вертикальной оси координат. Это подтверждает правильность выражения (4). На картинах интенсивности на рис. 2–5 можно подсчитать число локальных лепестков, равное  $2n$ : 4 (рис. 2а), 6 (рис. 3а), 8 (рис. 4а) и 10 (рис. 5а). При этом центральный светлый эллиптический максимум интенсивности следует считать два раза, так как он имеет два локальных максимума на горизонтальной оси.

Из рис. 2б и 4б видно, что картины плотности СУМ при  $n=2, 4$  симметричны относительно обеих

осей координат, а на рис. 3б и 5б при  $n = 3, 5$  картины СУМ симметричны только относительно вертикальной оси координат. Это подтверждает правильность выражения (7). Подсчитав число светлых и темных пятен на картине СУМ можно убедиться, что количество локальных областей, где СУМ положительный и отрицательный, равно согласно формуле  $2(n+2)$ : 8 (рис. 2б), 10 (рис. 3б), 12 (рис. 4б) и 14 (рис. 5б). Таким образом, увеличение топологического заряда  $n$  поля (1) на 1 увеличивает число областей на черной окружности на рис. 2б–5б на 2 (одна область с положительным спином и одна с отрицательным).

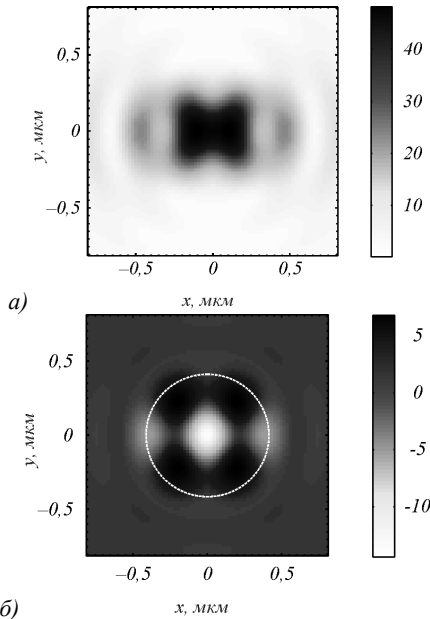


Рис. 2. Интенсивность (а) и продольный СУМ (б) для пучка (1) с топологическим зарядом  $n = 2$ . Пунктирная окружность с центром на оптической оси проходит через 8 областей с разным знаком продольной СУМ

Так как продольная компонента СУМ совпадает с третьей компонентой Стокса, с проекцией на оптическую ось вектора, перпендикулярного эллипсу поляризации в каждой точке фокуса, то в светлых областях на рис. 2б–5б вектор поляризации вращается против часовой стрелки (правая эллиптическая поляризация), а в темных областях на рис. 2б–5б вектор поляризации вращается по часовой стрелке (левая эллиптическая поляризация). Причем вблизи оптической оси с ростом  $n > 0$  меняется тип и величина поляризации: на рис. 2б ( $n=2$ ) вблизи оптической оси левая почти круговая поляризация, на рис. 3б ( $n=3$ ) вблизи оптической оси – две области меньшего размера с левой и правой эллиптической поляризацией, на рис. 4б ( $n=4$ ) вблизи оси уже 4 области с меньшим размером, две из которых с левой и две с правой эллиптическими поляризациями, а на рис. 5б ( $n=5$ ) на оптической оси линейная поляризация.

Отметим здесь, что уравнения Ричардса–Вольфа справедливы для любой числовой апертуры, и отмеченные здесь эффекты также будут проявляться при

любой числовой апертуре фокусирующей линзы. Однако для больших числовых апертур векторные эффекты в фокусе проявляются в наибольшей степени [18]. Например, ранее нами было показано, что спин-орбитальная конверсия при острой фокусировке линейно поляризованного света наблюдается и для малых числовых апертур [21].

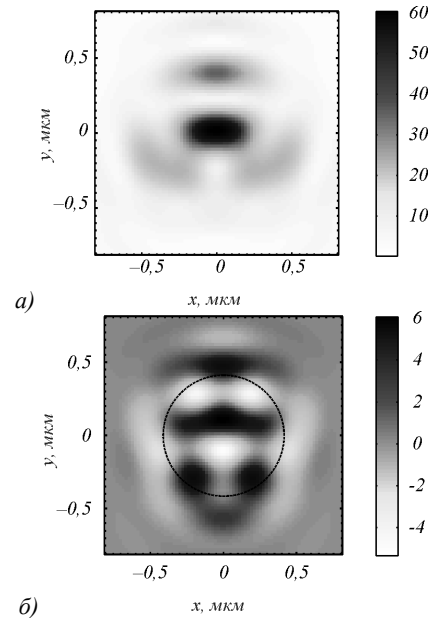


Рис. 3. Интенсивность (а) и продольный СУМ (б) для пучка (1) с топологическим зарядом  $n = 3$ . Черная окружность с центром на оптической оси проходит через 10 областей с разным знаком продольной СУМ

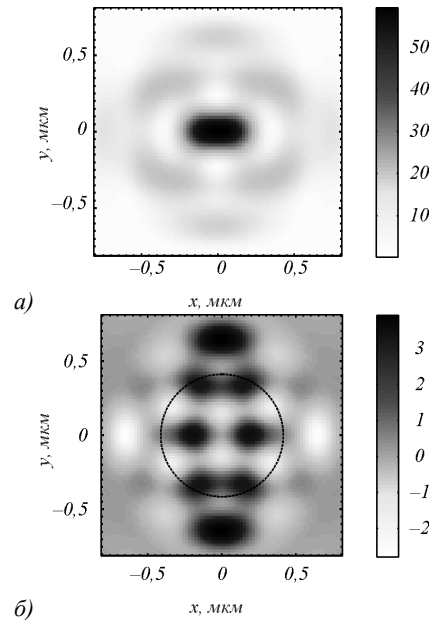


Рис. 4. Интенсивность (а) и продольный СУМ (б) для пучка (1) с топологическим зарядом  $n = 4$ . Черная окружность с центром на оптической оси проходит через 12 областей с разным знаком продольной СУМ

### Заключение

В данной работе получены следующие новые результаты. Рассмотрена острая фокусировка комбини-

рованного лазерного пучка, который представляет собой осевую суперпозицию двух пучков с одинаковой линейной поляризацией: оптического вихря с топологическим зарядом  $n$  и единичной амплитудой и плоской волны с амплитудой  $a$ . С помощью теории Ричардса–Вольфа получены аналитические выражения для всех шести проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей, для распределения интенсивности и продольного СУМ в плоскости фокуса. Вид и симметрия распределений интенсивности и СУМ зависит от четности номера  $n$ . С ростом номера  $n > 0$  растет число боковых лепестков в картине интенсивности и число областей с положительным и отрицательным СУМ. Наличие в плоскости фокуса фотонов со спином разного знака является проявлением спинового эффекта Холла в фокусе. Такие распределения интенсивности и СУМ в остром фокусе можно использовать для наноструктурирования поверхности материала, чувствительного к поляризации [22], и для намагничивания с разной поляризованностью материала на основе обратного эффекта Фарадея [23].

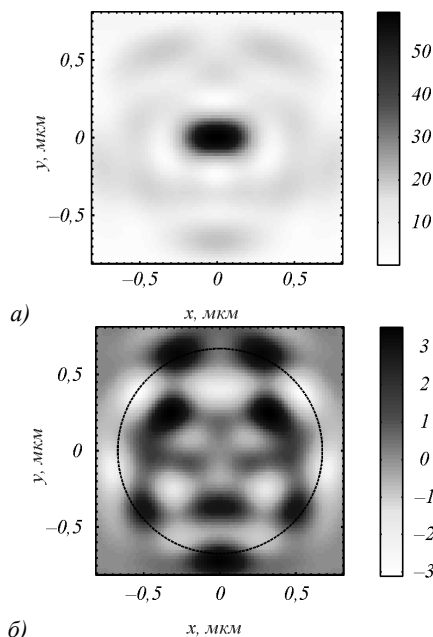


Рис. 5. Интенсивность (а) и продольный СУМ (б) для пучка (1) с топологическим зарядом  $n = 5$ . Черная окружность с центром на оптической оси проходит через 14 областей с разным знаком продольной СУМ

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке РФФ (грант 23-12-00236 (теория и моделирование)) и в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ Курчатовский институт (Введение и Заключение).

**References**

[1] Aiello A, Banzer P, Neugebauer M, Leuchs G. From transverse angular momentum to photonic wheels. *Nature Photon* 2015; 9: 789-795. DOI: 10.1038/nphoton.2015.203.

[2] Bauer T, Banzer P, Karimi E, Orlov S, Rubano A, Marrucci L, Santa Mato E, Boyd RW, Leuchs G. Observation of optical polarization Möbius strips. *Science* 2015; 347: 964-966. DOI: 10.1126/science.1260635.

[3] Wan C, Zhan Q. Generation of exotic optical polarization Möbius strips. *Opt Express* 2019; 27(8): 11516-11524. DOI: 10.1364/OE.27.011516.

[4] Leach J, Dennis MR, Courtial J, Padgett MJ. Knotted threads of darkness. *Nature* 2004; 432: 165. DOI: 10.1038/432165a.

[5] Dennis MR, King RP, Jack B, O’Holleran K, Padgett MJ. Isolated optical vortex knots. *Nat Phys* 2010; 6: 118-121. DOI: 10.1038/nphys1504.

[6] Sugic D, Dennis MR. Singular knot bundle in light. *J Opt Soc Am A* 2018; 35(12): 1987-1999. DOI: 10.1364/JOSAA.35.001987.

[7] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG, Kovalev AA, Porfirev AP. Mechanism of formation of an inverse energy flow in a sharp focus. *Phys Rev A* 2020; 101(3): 033811. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.033811.

[8] Yang X, Mou Y, Zapata R, Reynier B, Gallas B, Mivelle M. An inverse Faraday effect generated by linearly polarized light through a plasmonic nano-antenna. *Nanophotonics* 2023; 12(4): 687-694. DOI: 10.1515/nanoph-2022-0488.

[9] Zhou S, Rui G, Chen H, Zhan Q. Diffraction-limited optical focusing with arbitrarily oriented magnetic field. *J Opt* 2019; 21(4): 045610. DOI: 10.1088/2040-8986/ab0f8f.

[10] Zhao K, Zhang Z, Zang H, Du J, Lu Y, Wang P. Generation of pure longitudinal magnetization focal spot with a triplex metalens. *Opt Lett* 2021; 46(8): 1896-1899. DOI: 10.1364/OL.422351.

[11] Bliokh KY, Ostrovskaya EA, Alonso MA, Rodríguez-Herrera OG, Lara D, Dainty C. Spin-to-orbital angular momentum conversion in focusing, scattering, and imaging systems. *Opt Express* 2011; 19(27): 26132-26149. DOI: 10.1364/OE.19.026132.

[12] Kotlyar VV, Nalimov AG, Kovalev AA, Porfirev AP, Stafeev SS. Spin-orbit and orbit-spin conversion in the sharp focus of laser light: Theory and experiment. *Phys Rev A* 2020; 102(3): 033502. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.033502.

[13] Devlin EC, Ambrosio A, Wintz D, Oscurato SL, Zhu AY, Khorasaninejad M, Oh J, Maddalena P, Capasso F. Spin-to-orbital angular momentum conversion in dielectric metasurfaces. *Opt Express* 2017; 25(1): 377-393. DOI: 10.1364/OE.25.000377.

[14] Leyder C, Romanelli M, Karr JP, Giacobino E, Liew TCH, Glazov MM, Kavokin AV, Malpuech G, Bramati A. Observation of the optical spin Hall effect. *Nature Phys* 2007; 3(9): 628-631. DOI: 10.1038/nphys676.

[15] Li H, Ma C, Wang J, Tang M, Li X. Spin-orbit Hall effect in the tight focusing of a radially polarized vortex beam. *Opt Express* 2021; 29(24): 39419-39427. DOI: 10.1364/OE.443271.

[16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Kozlova ES, Telegin AM. Hall effect at the focus of an optical vortex with linear polarization. *Micromachines* 2023; 14(4): 788. DOI: 10.3390/mi14040788.

[17] Kotlyar VV, Stafeev SS, Zaitsev VD, Kovalev AA. Multiple optical spin-orbit Hall effect at the tight focus. *Phys Lett A* 2023; 458: 128596. DOI: 10.1016/j.physleta.2022.128596.

[18] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic sys-

- tem. Proc R Soc A Math Phys Eng Sci 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [19] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. Micromachines 2023; 14(2): 494. DOI: 10.3390/mi14020494.
- [20] Davidson N, Bokor N. High-numerical-aperture focusing of radially polarized doughnut beams with a parabolic mirror and a flat diffractive lens. Opt Lett 2004; 29(12): 1318-1320. DOI: 10.1364/ol.29.001318.
- [21] Stafeev SS, Nalimov AG, Kovalev AA, Zaitsev VD, Kotlyar VV. Circular polarization near the tight focus of linearly polarized light. Photonics 2022; 9(3): 196. DOI: 10.3390/photonics9030196.
- [22] Zhai Y, Cao L, Liu Y, Tan X. A review of polarization-sensitive materials for polarization holography. Materials 2020; 13(23): 5562. DOI: 10.3390/ma13235562.
- [23] Merte M, Freimuth F, Go D, Adamantopoulos T, Lux FR, Plucinski L, Gomonay O, Blügel S, Mokrousov Y. Photo-currents, inverse Faraday effect, and photospin Hall effect in Mn<sub>2</sub>Au. APL Mater 2023; 11(7): 071106. DOI: 10.1063/5.0149955.

### Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович**, **Телегин Алексей Михайлович**, **Козлова Елена Сергеевна**, см. стр. 830-831 этого номера.

**Стафеев Сергей Сергеевич**, 1985 года рождения. В 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Доктор физико-математических наук с 2023 года. Старший научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт». Область научных интересов: дифракционная оптика, неоднородная поляризация, острая фокусировка. E-mail: [sergev.stafeev@gmail.com](mailto:sergev.stafeev@gmail.com) ORCID: 0000-0002-7008-8007

ГРНТИ: 29.31.01

Поступила в редакцию 1 февраля 2024 г. Окончательный вариант – 8 апреля 2024 г.

---

# Superposition of an optical vortex and a plane wave with linear polarization states at the tight focus

V.V. Kotlyar <sup>1,2</sup>, S.S. Stafeev <sup>1,2</sup>, M.A. Telegin <sup>1,2</sup>, E.S. Kozlova <sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

We analyze the sharp focusing of the superposition of a vortex laser beam with topological charge  $n$  and linear polarization and a plane wave with the same linear polarization directed along the horizontal axis. Using the Richards-Wolf formalism, analytical expressions are obtained for the intensity distribution and longitudinal projection of the spin angular momentum (SAM) in the focal plane. It is shown that for even and odd numbers  $n$  the intensity and SAM have different symmetries: for even  $n$  they are symmetric with respect to both Cartesian axes, and for odd  $n$  they are symmetric only with respect to the vertical axis. The intensity distribution has  $2n$  local maxima at the focus, and the intensity on the optical axis is nonzero for any  $n$ . The distribution of the longitudinal SAM (spin density) in the focal plane has  $(n+2)$  subwavelength regions with a positive SAM and  $(n+2)$  regions with a negative SAM, the centers of which alternately locate on a circle of a certain radius centered at the optical axis. Such an alternating-spin pattern demonstrates the spin Hall effect at the focus. At the focus, the negative and positive spins are mutually compensated, meaning that the total spin is zero.

**Keywords:** spin angular momentum, Richards-Wolf formulas, Hall effect, optical vortex, plane wave, linear polarization.

**Citation:** Kotlyar VV, Stafeev SS, Telegin AM, Kozlova ES. Superposition of an optical vortex and a plane wave with linear polarization states at the tight focus. *Computer Optics* 2024; 48(6): 851-857. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1502.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #23-12-00236 (Theory and Numerical Simulation) and the NRC "Kurchatov Institute" under a government project (Introduction and Conclusion).

---

## Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a Head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru)

**Sergey S. Stafeev** (b. 1985) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is Senior Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute". Scientific interests: diffractive optics, non-uniform polarization, tight focusing. E-mail: [sergey.stafeev@gmail.com](mailto:sergey.stafeev@gmail.com) ORCID: 0000-0002-7008-8007.

**Aleksey Mikhailovich Telegin**, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., Associate Professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: [tallex85@mail.ru](mailto:tallex85@mail.ru)

**Elena Sergeevna Kozlova**, (b. 1989) received Master's degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara State Aerospace University (2011). She received her PhD in 2014. She is Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and Associated Professor of Computer Science department at Samara National Research University. Scientific interests: diffractive optics, femtosecond optics, numerical simulation. E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com)

---

Received February 1, 2024. The final version – April 8, 2024.

---