

## Тонкая структура отображений структурированного пучка Лагерра–Гаусса на орбитальную сферу Пуанкаре

А.В. Воляр<sup>1</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>2</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт, 295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4;

<sup>2</sup> Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН), 443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

### Аннотация

Теоретически найдены и экспериментально измерены элементы 4D симплектической матрицы моментов интенсивности второго порядка  $\mathbf{P}$  для парааксиальных структурированных пучков Лагерра–Гаусса с двумя управляющими параметрами – амплитудным  $\varepsilon$  и фазовым  $\theta$ . Показано, что только три элемента матрицы  $\mathbf{P}$  из десяти являются независимыми и измеряемыми в эксперименте. Остальные элементы определяются через них после дополнительных измерений. Симплектические свойства матрицы позволили получить 2D эрмитову матрицу (аналогичную матрице когерентности в оптике) и рассчитать орбитальные параметры Стокса ( $S_1, S_2, S_3$ ). Сумма квадратов орбитальных  $S$ -параметров образует инвариант  $S$  оптической системы первого порядка. В терминах элементов матрицы  $\mathbf{P}$  орбитальные параметры Стокса параметризуются параметром  $\theta$  структурированного пучка Лагерра–Гаусса. Инвариант  $S$  рассматривается как радиус сферы (орбитальная сфера Пуанкаре) в декартовых координатах ( $S_1, S_2, S_3$ ). Эти координаты указывают на состояние структурированного пучка Лагерра–Гаусса на сфере в виде пространственных траекторий с самопересечениями. Вариация амплитудного параметра контролирует площадь, охваченную траекторией, ее форму и положение точек самопересечения.

**Ключевые слова:** симплектическая матрица, структурированный пучок Лагерра–Гаусса, орбитальный угловой момент, сфера Пуанкаре.

**Цитирование:** Воляр, А.В. Тонкая структура отображений структурированного пучка Лагерра–Гаусса на орбитальную сферу Пуанкаре / А.В. Воляр, Е.Г. Абрамочкин, М.В. Брецько // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 2. – С. 165-172. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1562.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV. Fine-structure mapping of structured Laguerre-Gaussian beam states on the orbital Poincaré sphere. Computer Optics 2025; 49(2): 165-172. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1562.

### Введение

Сфера Пуанкаре [1] является удобным инструментом для графического представления скрытых геометрических свойств как векторных, так и скалярных структурированных вихревых пучков с различным числом степеней свободы [2, 3]. Впервые предложенный Паджеттом и Кортиэлом [4] при изучении вихревых пучков низшего порядка, метод отображения на сферу Пуанкаре получил строгое обоснование в виде симплектических преобразований в работе Алиевой и Бастианса [5], в то время как его фундаментальная геометрическая интерпретация как в классическом, так и в квантовом аспектах была отражена в статьях Денниса и Алонсо [6, 7], а также Чена с соавторами [8, 9]. Наиболее ярко особенности отображения на сферу Пуанкаре присущи гибридным пучкам Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ) [10]. Эти пучки образуют семейство структурированных пучков, зависящих от одного управляющего параметра  $\alpha$ , орбитальный угловой момент (ОУМ) которых,  $\ell_z = \ell \sin 2\alpha$ , плавно изменяется в диапазоне  $(-\ell, \ell)$ , где  $\ell$  – азимутальное число ЭЛГ-пучка. Изменение управляющего парамет-

ра  $\alpha$  преобразует структуру ЭЛГ-пучка от моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) с положительным или отрицательным ОУМ ( $\ell = \pm \ell$ ) до моды Эрмита–Гаусса (ЭГ) с нулевым ОУМ ( $\ell_z = 0$ ). Отображение ЭЛГ-пучка на сферу Пуанкаре (с декартовыми координатами в виде орбитальных параметров Стокса ( $S_1, S_2, S_3$ ) [9]) проявляется как плоская траектория большого круга, проходящая вдоль главного меридиана ( $S_2 = 0$ ) от северного полюса (с  $\ell_z = +\ell$ ) к южному полюсу (с  $\ell_z = -\ell$ ), пересекая экватор (с  $\ell_z = 0$ ). Для того чтобы траектория приобрела пространственную форму, а ЭЛГ-пучок – дополнительную геометрическую фазу Берри (не равную  $2\pi$ ), необходимо использовать дополнительные оптические элементы в виде двух соосных призм Дове, как это было сделано Кальво [11].

Совершенно иные геометрические свойства, как мы увидим ниже, демонстрируют двухпараметрические структурированные пучки Лагерра–Гаусса (сЛГ) [12]. Аналитическая форма сЛГ-пучков основана на представлении стандартного ЛГ-пучка в виде суммы ЭГ-пучков с  $2n + \ell + 1$  потенциальных степеней свободы ( $n$  – радиальное число). В этой сумме ЭГ-пучков мы добавили к каждой ЭГ-моду комплексный множи-

тель, содержащий амплитуду  $\varepsilon$  и начальную фазу  $\theta$  как два управляющих параметра. Амплитудные и фазовые возмущения  $(\varepsilon, \theta)$  в собственных ЭГ-модах приводят к уничтожению вырожденных кольцевых дислокаций в исходном ЛГ-пучке, порождая вихревые диполи с одинаковыми весами положительных и отрицательных топологических зарядов. Согласование фаз ЭГ-мод нарушает весовое равновесие в вихревых диполях, что сопровождается новыми эффектами, не присущими стандартным ЭЛГ-пучкам, например, в виде управляемых быстрых осцилляций ОУМ, связанных с радиальным числом  $n$  [12]. Следует заметить, что такая фазовая и амплитудная синхронизация ЭГ-мод оставляет независимыми  $2n + \ell + 1$  каналов передачи данных, но способствует управлению ОУМ структурированного ЛГ-пучка в целом. Стоит ожидать, что управляемое согласование фаз и амплитуд мод не может не отразиться на их отображении на сферу Пуанкаре, в частности, на форме пространственных траекторий. В данной статье мы рассматриваем новые геометрические эффекты, связанные с отображением сЛГ-пучка с большим числом степеней свободы на орбитальную сферу Пуанкаре, проявляющиеся в виде управляемых пространственных траекторий и их самопересечений, что подтверждается экспериментально.

### 1. 4D-матрица моментов интенсивности

В основе нашего подхода для отображения состояний структурированных пучков на поверхность 2D-сферы Пуанкаре лежит представление симплектических 4D матричных преобразований моментов интенсивности второго порядка функции распределения Вигнера  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  [13]:

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int \Gamma \left( \mathbf{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}', \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}' \right) \exp(-i2\pi \mathbf{p}' \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1)$$

где  $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi(\mathbf{r}_1) \Psi^*(\mathbf{r}_2)$  – функция взаимной когерентности, а  $\Psi(\mathbf{r})$  – комплексная амплитуда пучка. Функция Вигнера  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  задана в 4D фазовом пространстве поперечного вектора координат  $\mathbf{r} = (x, y)^t$  и поперечного вектора направлений луча (единичного импульса)  $\mathbf{p} = (\xi, \eta)^t$ , где  $t$  указывает на транспонирование. (Геометрия 4D фазового пространства подробно рассмотрена в книге К.Б. Вольфа [14].) Тогда 4D симплектическая матрица моментов интенсивности второго порядка задается соотношением [13]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J_{00}} \int \begin{pmatrix} \mathbf{r}\mathbf{r}^t & \mathbf{r}\mathbf{p}^t \\ \mathbf{p}\mathbf{r}^t & \mathbf{p}\mathbf{p}^t \end{pmatrix} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^t & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & M_{x\xi} & M_{x\eta} \\ W_{xy} & W_{yy} & M_{y\xi} & M_{y\eta} \\ M_{x\xi} & M_{y\xi} & U_{\xi\xi} & U_{\xi\eta} \\ M_{x\eta} & M_{y\eta} & U_{\xi\eta} & U_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $J_{00}$  – полная интенсивность пучка, а  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{U}$  – координатная субматрица, субматрица кручения пучка и субматрица расходимости пучка соответственно. Элементы субматрицы  $\mathbf{W}$  характеризуют среднеквадратичные значения пространственных координат:

$$\begin{pmatrix} W_{xx} \\ W_{xy} \\ W_{yy} \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{pmatrix} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (3)$$

и измеряются в эксперименте непосредственно. Стоит отметить, что элементы субматриц  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{U}$  могут быть выражены через элементы координатной субматрицы  $\mathbf{W}$  после ряда дополнительных измерений [15].

Для оптических систем первого порядка известны два главных инварианта:

$$\text{INV}_1 = \sqrt{\det \mathbf{P}} \geq 0, \quad (4)$$

$$\text{INV}_2 = (W_{xx} U_{\xi\xi} - M_{x\xi}^2) + (W_{yy} U_{\eta\eta} - M_{y\eta}^2) + 2(W_{xy} U_{\xi\eta} - M_{x\eta} M_{y\xi}) \geq 0. \quad (5)$$

Чтобы найти явный вид элементов матрицы  $\mathbf{P}$ , запишем комплексную амплитуду сЛГ-пучка в исходной  $z = 0$  плоскости [12]

$$s\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = A \sum_{k=0}^N C_k \text{HG}_{N-k,k}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где  $N = 2n + \ell$ ,  $A = (-1)^n 2^{-2n-3\ell/2} / n!$  и коэффициенты  $C_k$  выражаются через значения полиномов Якоби:  $C_k = (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) (1 + \varepsilon e^{ik\theta})$ . При  $\varepsilon = 0$  сЛГ-пучок превращается в стандартный ЛГ-пучок  $\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})$ .

Используя комплексную амплитуду (6), находим явный вид матрицы  $\mathbf{P}$  (см. также статью [16])

$$\mathbf{P}_{s\text{LG}} = \begin{pmatrix} K_x/2 & \text{Re } M & 0 & 2 \text{Im } M \\ \text{Re } M & K_y/2 & -2 \text{Im } M & 0 \\ 0 & -2 \text{Im } M & 2K_x & 4 \text{Re } M \\ 2 \text{Im } M & 0 & 4 \text{Re } M & 2K_y \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$K_x = \frac{1}{2E} \sum_{k=0}^N (2N - 2k + 1) |C_k|^2 (N - k)! k!, \quad (8)$$

$$K_y = \frac{1}{2E} \sum_{k=0}^N (2k + 1) |C_k|^2 (N - k)! k!, \quad (9)$$

$$M = \frac{1}{2E} \sum_{k=0}^N C_k C_{k+1}^* (N - k)! (k + 1)!, \quad (10)$$

$$E = \frac{J_{00}}{\pi 2^{N-1} A^2} = \sum_{k=0}^N |C_k|^2 (N - k)! k! \quad (11)$$

и звёздочка означает комплексное сопряжение.

Как видно из матрицы (7), симметрические субматрицы  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$  связаны между собой соотношением  $\mathbf{U} = 4\mathbf{W}$ , а ненулевые элементы субматрицы  $\mathbf{M}$  находятся на побочной диагонали и отличаются только

знаком. Отсюда следует, что из десяти возможных дополнительных степеней свободы сЛГ-пучка (не считая  $N$  главных собственных степеней свободы каждой ЭГ-моды) остается только четыре. Напомним, что комплексная амплитуда (6) исходно задана только в плоскости  $z=0$ , поэтому матрица моментов интенсивности (7) задана только в начальной плоскости. Поскольку эволюция светового поля при прохождении оптической системы описывается симплектической 4D  $ABCD$  матрицей  $\mathbf{T}$ , то эволюция матрицы моментов интенсивности второго порядка задается соотношением [17]:  $\mathbf{P}_{out} = \mathbf{T}\mathbf{P}_{in}\mathbf{T}^t$ .

Каждой субматрице в матрице  $\mathbf{P}$  соответствует характеристический эллипс. Например, характеристический эллипс субматрицы  $\mathbf{W}$  имеет вид

$$W_{yy}x^2 + W_{xx}y^2 - 2W_{xy}xy = \det \mathbf{W}, \quad (12)$$

а его ось наклонена под углом

$$\psi_w = \frac{1}{2} \arctg \left( \frac{2W_{xy}}{W_{xx} - W_{yy}} \right). \quad (13)$$

Сравнивая субматрицы  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$ , видим, что они имеют одинаковые углы наклона характеристических эллипсов.

## 2. Отображение сЛГ-пучка на сферу Пуанкаре

Возникает вопрос, какая геометрия спрятана в изменениях элементов матрицы (7) при вариации управляющих параметров сЛГ-пучка. Ответ на этот вопрос удобно представить через анализ структуры траекторий на 2D-сфере Пуанкаре. Но для этого необходимо понизить размерность симплектической матрицы  $\mathbf{P}$ . Алиева с соавторами в работах [5, 18] предложила использовать для этой цели комплексную форму записи 2D-векторов координат-импульсов,  $\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2$ , и ввести в рассмотрение 2D эрмитову матрицу, аналогичную матрице когерентности в оптике [14]:

$$\mathbf{P}_R = \frac{1}{J_{00}} \int \left( \mathbf{r} - \frac{1}{2}i\mathbf{p} \right) \cdot \left( \mathbf{r} - \frac{1}{2}i\mathbf{p} \right)^t W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p}. \quad (14)$$

Подставляя (1) в (14) и используя матричные элементы (2), находим

$$\mathbf{P}_R = \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $S_k$  – орбитальные параметры Стокса:

$$\begin{aligned} S_0 + S_1 &= W_{xx} + U_{\xi\xi}/4, & S_2 &= W_{xy} + U_{\xi\eta}/4, \\ S_0 - S_1 &= W_{yy} + U_{\eta\eta}/4, & S_3 &= (M_{x\eta} - M_{y\xi})/2. \end{aligned} \quad (16)$$

Ключевым элементом в построении эрмитовой матрицы (15) является матрица  $\mathbf{q}\mathbf{q}^t$ , где  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - i\mathbf{p}/2$ . Дело в том, что начиная с функции распределения Вигнера (1) мы использовали безразмерные векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ . Тогда, чтобы не нарушить безразмерную струк-

туру дальнейших рассуждений, в частности, в преобразовании Фурье

$$\int \exp(-i\mathbf{p}^t\mathbf{r} - \mathbf{r}^2/w_0^2) d\mathbf{r} = \pi w_0^2 \exp(-w_0^2\mathbf{p}^2/4),$$

( $w_0$  – радиус перетяжки гауссова пучка в плоскости  $z=0$ ) мы используем вектор  $\mathbf{q} = \mathbf{r}/w_0 - iw_0\mathbf{p}/2$ , полагая  $w_0=1$ , вместо  $\mathbf{q} = \mathbf{r} - i\mathbf{p}$ , как это делают авторы статьи [5].

Использование матрицы  $\mathbf{P}$  для сЛГ-пучка позволяет получить параметры Стокса в виде

$$\begin{aligned} S_0 &= (K_x + K_y)/2, & S_2 &= 2 \operatorname{Re} M, \\ S_1 &= (K_x - K_y)/2, & S_3 &= 2 \operatorname{Im} M, \end{aligned} \quad (17)$$

а инварианты (4) и (5) как

$$\begin{aligned} \operatorname{INV}_1 &= K_x K_y - 4|M|^2, \\ \operatorname{INV}_2 &= K_x^2 + K_y^2 + 8|M|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассматривая  $(S_1, S_2, S_3)$  как три независимых параметра, находим, что их сумма квадратов также является инвариантом:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2 = (\operatorname{INV}_2 - 2 \cdot \operatorname{INV}_1)/4. \quad (19)$$

Фактически соотношение (18) задает сферу радиуса  $S$  в декартовых координатах  $(S_1, S_2, S_3)$ , которую называют *орбитальной сферой Пуанкаре* [5, 18]. Переход к сферическим координатам,

$$\begin{aligned} S_1 &= S \cos \beta \cos 2\phi, \\ S_2 &= S \cos \beta \sin 2\phi, \\ S_3 &= S \sin \beta, \end{aligned} \quad (20)$$

позволяет рассматривать эволюцию преобразований сЛГ-пучка при изменении фазового параметра  $\theta$  на сфере посредством соотношений (7–11).

Соотношение между углами  $(\beta, \phi)$  и моментами интенсивности можно найти, сравнивая выражения (17) и (20). Движение рабочей точки на сфере характеризуется двумя углами: углом  $\phi$ , отвечающим за изменение положения рабочей точки вдоль экватора сферы, и углом  $\beta$ , отвечающим за движение вдоль меридианов. Типичные отображения в виде пространственных траекторий для различных значений амплитудного параметра  $\varepsilon$  и квантовых чисел  $n$  и  $\ell$  иллюстрирует рис. 1, где координаты нормированы на радиус сферы:  $S_{1,2,3} \rightarrow S_{1,2,3}/S$  в соответствии с выражением (19). В отличие от гибридного ЭЛГ-пучка с плоской круговой траекторией ( $S_1=0$ ), траектории сЛГ-пучка имеют сложную пространственную структуру с множеством лепестков, число которых равно числу  $N=2n+\ell$  ЭГ-мод. Траектории группируются в основном в северном полушарии сферы при амплитудном параметре  $\varepsilon \leq 1$ . Северному полюсу соответствуют ЛГ-моды с ОУМ  $\ell_z = \ell$ , а на южном полюсе располагаются ЛГ-моды с  $\ell_z = -\ell$ . Однако экватору соответствуют не только ЭГ-моды, как в случае гибридного ЭЛГ-пучка [4, 6, 13], а, скорее, суперпозиция ЭГ-

мод с нулевым ОУМ,  $\ell_z=0$ . Изменения ОУМ происходят вдоль меридианов сферы на угол  $\beta = \arcsin(S_3/S)/2$ , а угол поворота  $\phi$  картины интенсивности задается соотношением  $\text{tg}2\phi = S_2/S_1$ . Используя соотношения (7), (13) и (17), находим

$$\text{tg} 2\phi = \text{tg} 2\psi_w = 4 \frac{\text{Re} M}{K_x - K_y}, \quad (21)$$

поскольку углы наклона характеристических эллипсов субматриц  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{U}$  совпадают с углом поворота картины интенсивности сЛГ-пучка  $\phi = \psi_w$  на экваторе сферы. Типичные пространственные траектории как отображения преобразований сЛГ-пучка на сферу Пуанкаре (при вариации фазового параметра в интервале  $\theta \in (0, 2\pi)$ ) приведены на рис. 1. (Для удобства на всех рисунках выбраны нормированные параметры Стокса,  $S_{1,2,3} \rightarrow S_{1,2,3}/S$ .) Заметим, что вариации параметра  $\theta$  можно рассматривать как способ передачи данных.

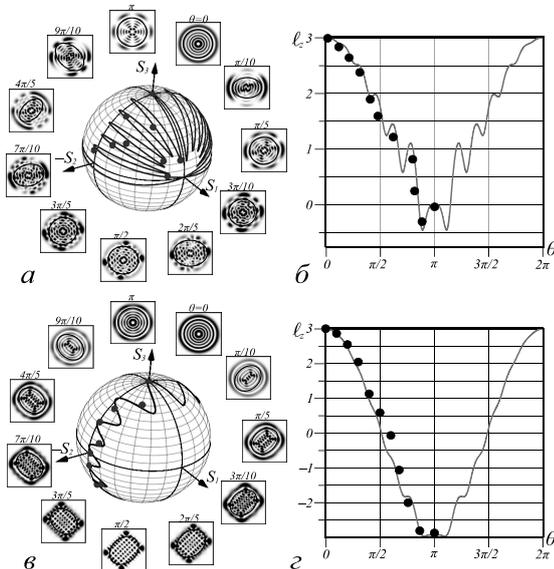


Рис. 1. (а, б) Отображение сЛГ-пучка с  $(n, l) = (5, 3)$  на сферу Пуанкаре с нормированными координатами  $S_{1,2,3} \rightarrow S_{1,2,3}/S$  для  $\varepsilon = 1$  (а) и  $\varepsilon = 10$  (б).

Характеристические эллипсы субматрицы  $\mathbf{W}$  показаны на фоне распределений интенсивности. Каждая картина интенсивности (б, г) соответствует экстремумам ОУМ в зависимости  $\ell_z(\theta)$ . Жирные точки отмечают данные, полученные экспериментально

Рассмотрим несколько сценариев развития структуры траекторий. Сначала коснемся характерных особенностей траектории для относительно больших квантовых чисел  $n$  и  $l$ , а затем очертим основные особенности процесса рождения и уничтожения точек самопересечения траекторий. Из рис. 1а видим, что траектории на сфере для сЛГ-пучка с  $n=5$  и  $l=3$  принимают многолепестковый вид, причем число лепестков равно числу основных степеней свободы  $N = 2n + l$  структурированного пучка. Лепестки траекторий располагаются в основном в восточной части северного полушария сферы. Исключением является

нижняя траектория, где и возникает точка самопересечения на экваторе. Аналогичная точка самопересечения располагается симметрично на экваторе в западной части северного полушария (не показано на рисунке). Замечено соответствие между максимумами лепестков траекторий и экстремумами ОУМ на рис. 1б. Жирные точки вблизи вершин лепестков и экстремумов ОУМ на рис. 1а и б указывают на такое соответствие. По мере увеличения амплитудного  $\varepsilon$ -параметра происходит сглаживание лепестков, как показано на рис. 1в, но соответствие между их вершинами максимумами и экстремумами ОУМ  $S_3$  на рис. 1г остается в силе. Отображение на сфере на рис. 1а, в окружено экспериментальными картинками интенсивности, соответствующими состояниям сЛГ-пучка в вершинах лепестков.

Такой простой сценарий формирования лепестков траекторий оказывается неполным без анализа процесса возникновения и исчезновения точек самопересечения траекторий и наложения лепестков друг на друга. Стоит только взглянуть в процесс преобразования сЛГ-пучка, как вскрывается три неожиданных сценария развития событий на сфере. Напомним, что преобразование ОУМ в сЛГ-пучке характеризуется не только топологическим зарядом  $\ell$ , который отвечает за максимум ОУМ, но и радиальным числом  $n$ , которое управляет быстрыми осцилляциями ОУМ [12]. Такая ситуация не может не отразиться на поведении особых точек траектории на сфере. Здесь следует разделить два сценария, а именно: (а) сценарий с нулевым радиальным числом  $n=0$  и (б) сценарий отличного от нуля, но малого по величине  $n \neq 0$  радиального числа. В последнем сценарии мы кратко коснемся процесса, предшествующего событию схлопывания точек самопересечения в сЛГ-пучках с большими квантовыми числами. Кроме того, мы ограничимся случаем малых значений радиального числа  $n$ , чтобы не загромождать рисунки сложной геометрией.

Сначала уточним процесс зарождения и исчезновения самопересечений траектории на сфере Пуанкаре для случая нулевого радиального числа  $n=0$ ,  $l=2$  сЛГ-пучка, показанный на рис. 2. Два наложенных лепестка траектории (рис. 2а) зарождаются уже при малых отклонениях траектории от северного полюса ( $\varepsilon \ll 1$ ). Число лепестков контролирует топологический заряд  $\ell = 2$ . По мере движения по траектории при увеличении параметра  $\varepsilon$  лепестки раздвигаются (рис. 2б), а площадь их перекрытия уменьшается. Приближение траектории к экватору ( $\varepsilon \rightarrow 1$ ) сопровождается уменьшением площади перекрытия лепестков и схлопыванием ее в точку ( $\varepsilon = 1$ ), так что остается только один лепесток. Пересечение экватора ( $\varepsilon > 1$ ) сопровождается резким искажением формы лепестка, при этом траектория приобретает бутылочную форму (рис. 2в). Значительное увеличение амплитудного параметра ( $\varepsilon \gg 1$ ) приводит к быстрому увеличению площади лепестка (рис. 2г), которая по-

крывает все западное полушарие сферы, а траектория вытягивается вдоль главного меридиана  $S_1=0$ , захватывая северный и южный полюс с  $S_3 = \pm \ell$ .

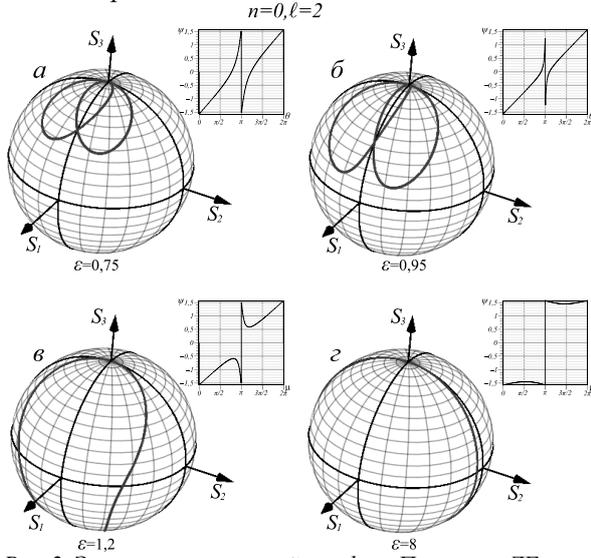


Рис. 2. Эволюция траекторий на сфере Пуанкаре сЛГ-пучка при изменении параметра  $\theta$  для  $n=0, \ell=2$  и различных значений параметра  $\epsilon$ . На вставках приведена фаза  $\psi(\theta)$  функции  $S_1 + iS_2$  для соответствующих значений  $\epsilon$

Вставки на рис. 2, сопровождающие эволюцию формы траекторий, показывают зависимости фазы  $\psi$  комплексного параметра  $S_1 + iS_2$  от фазового параметра  $\theta$ . Комплексный параметр  $S_1 + iS_2$  позволяет контролировать быстрые изменения состояний пучка вдоль экватора сферы. На вставке рис. 2а видно, что в области  $\theta \in (3\pi/4, 5\pi/4)$  перекрытия лепестков наблюдается скачок фазы  $\psi$  в интервале  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Высота скачка быстро сокращается при приближении траекторий к экватору (рис. 2б). Скачок исчезает, а лепестки «схлопываются» на экваторе ( $\epsilon=1$ ). После прохождения экватора наблюдается обратная ситуация. Так, при  $\epsilon=1,1$  (рис. 2в) наблюдается скачок фаз в интервале  $\psi \in (-\pi/4, \pi/4)$ . При больших амплитудных параметрах  $\epsilon=6$  (рис. 2г) интервал скачка возрастает до  $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Приближение траектории к главному меридиану характеризуется только двумя значениями фазы  $\psi = \pm\pi/2$ , разделенными скачком при  $\theta = \pi$ .

Совсем иная тонкая структура особенностей траекторий проявляется при ненулевом радиальном числе. В отличие от случая  $n=0$ , траектория для  $n=1$  формирует четыре лепестка со множеством самопересечений (рис. 3а). Основная точка самопересечений продолжает двигаться по главному меридиану  $S_2=0$ , но не исчезает на экваторе  $S_3=0$  (рис. 3б). При этом площадь нижнего лепестка быстро сокращается (рис. 3в) вплоть до достижения области  $S_3 = -\ell$ . Вблизи южного полюса площадь нижнего лепестка схлопывается, самопересечение исчезает, не достигнув южного полюса  $S_3 < -\ell$  (рис. 3г). Уменьшение площади нижнего лепестка сопровождается быстрым увеличением площади верхних лепестков за счет их сглаживания. Наконец, при  $\epsilon \gg 1$  траектория приближается к окружности, покрывающей главный

меридиан  $S_1=0$  (в плоскости  $S_2, S_3$ ), захватывая северный и южный полюс. Физику этого процесса хорошо поясняют вкладки на рис. 3 с зависимостями ОУМ  $S_3(\theta)$ .

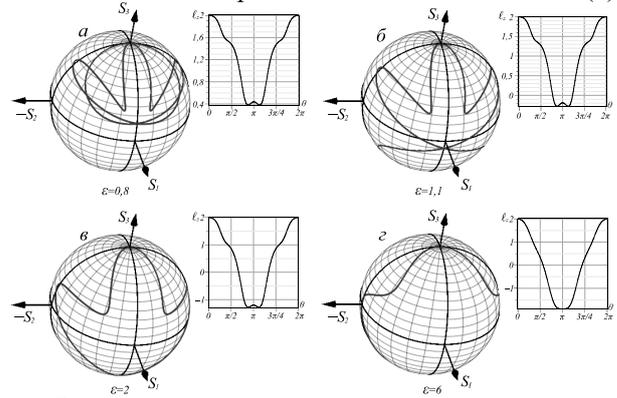


Рис. 3. Динамика рождения и исчезновения точки самопересечения траекторий в отображении сЛГ пучка с  $n=1, \ell=2$  при различных амплитудных  $\epsilon$ -параметров. На вставках приведен ОУМ  $S_3$  в зависимости от фазового  $\theta$ -параметров

Четко видны экстремумы функции  $S_3$ , чего лишен процесс с нулевым радиальным числом,  $n=0$ , на рис. 2. Здесь движение точки пересечения сопровождается преобразованиями в области максимума ОУМ, окруженного двумя минимумами (рис. 3а). По мере развития эволюции изменяется высота максимума и сокращается расстояние между минимумами (рис. 3б, в) на траектории. Схлопывание нижнего лепестка и исчезновение точки самопересечения возникает при наложении двух минимумов ОУМ и формировании одного глубокого минимума в точке  $\theta = \pi$  (рис. 3г). При этом сЛГ-пучок превращается в гибридную моду ЭЛГ, повернутую на угол  $-\pi/4$  относительно стандартного состояния.

Более сложный сценарий процесса схлопывания точек самопересечения траекторий возникает для больших значений квантовых чисел  $n$  и  $\ell$ . Пример картины траекторий отображения сЛГ-пучка приведен на рис. 4 для состояний (а)  $n=3, \ell=4, \epsilon=1,7$  и (б)  $n=8, \ell=10, \epsilon=1,2$ . После схлопывания точек самопересечения процесс превращения пространственной траектории в окружность главного меридиана в плоскости  $S_1=0$  развивается по тому же сценарию, что и в случае отображения сЛГ-пучка с малыми квантовыми числами.

Формирование лепестков и самопересечений траекторий, на наш взгляд, вызвано двумя процессами: изменением ОУМ и вращением характеристического эллипса матрицы  $\mathbf{P}$  моментов интенсивности. Так, движение точки по меридиану описывается синусом угла  $\sin 2\beta = S_3 / S = 2M_{z\eta} / S$  и углом  $\phi$ , который задается соотношением (21). Увеличение угла  $\beta$  вдоль меридиана (возрастание ОУМ) сопровождается изменением азимутального угла  $\phi$  вдоль экватора по часовой стрелке (вращение характеристического эллипса). Уменьшение угла  $\beta$  (уменьшение ОУМ) сопровождается движением по экватору против часовой стрелки.

Такая синхронизация двух вращений формирует лепестки траекторий.

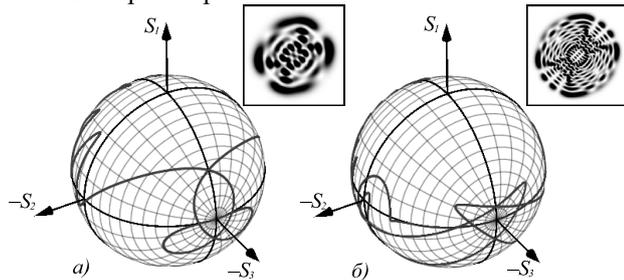


Рис. 4. Траектории сЛГ-пучка вблизи точки схлопывания самопересечений на южном полюсе для (а)  $n = 3, \ell = 4, \varepsilon = 1,7$ ; (б)  $n = 8, \ell = 10, \varepsilon = 1,2$ . На вставках (а) и (б) приведены картины интенсивности при  $\theta = 7\pi/4$ , соответствующих окончанию формирования узора траекторий вблизи южного полюса

### 3. Эксперимент

Как было отмечено выше, ОУМ ( $\ell_z = S_3$ ), а также параметры ( $S_1, S_2$ ) можно найти экспериментально, измеряя элементы матрицы (7). Действительно, зная субматрицу  $\mathbf{W}$ , легко получить субматрицу  $\mathbf{U}$ . Еще более интересная ситуация возникает в результате связи между элементами субматриц  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{M}$ . Фактически субматрица  $\mathbf{M}$  содержит только недиагональные элементы ( $M_{\chi\eta} = -M_{y\xi}$ , так что ОАМ равен  $\ell_z = 2M_{\chi\eta}$ ), которые определяются мнимой частью параметра  $M$  в (10). С другой стороны, недиагональные элементы  $W_{xy}$  субматрицы  $\mathbf{W}$  задаются вещественной частью этого параметра. Как мы недавно теоретически и экспериментально показали [19], связь между ОУМ  $\ell_z$  и элементом  $W_{xy}$  записывается как

$$\ell_z(\theta) = 2M_{\chi\eta}(\theta) = W_{xy}(\theta) \left( 2\text{ctg} \frac{\theta}{2} \right). \quad (22)$$

Эта формула в точности совпадает с  $S_3$  для  $\varepsilon = 1$ . Хотя при  $\theta = 0, \text{ctg} \theta/2 \rightarrow \infty$ , но при этом  $W_{xy}(\theta = 0) \rightarrow 0$ . Раскрывая неопределенность  $0 \cdot \infty$ , получаем точно  $\text{ОУМ}(0) = T_3 = \ell$  исходного ЛГ-пучка. Это также означает, что количество дополнительных степеней свободы сЛГ-пучка уменьшается с четырех до трех. Следует заметить, что число дополнительных степеней свободы мы определяем по трем независимым измерениям  $W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}$  элементов координатной субматрицы  $\mathbf{W}$  при заданных  $\theta$  и  $\varepsilon$  управляющих параметрах.

Вообще говоря, возможные подходы к измерению элементов координатной субматрицы  $\mathbf{W}$  сформулированы в рекомендациях Международной организации по стандартизации (ISO) [20]. Вариации этого подхода для измерения моментов интенсивности различных порядков для структурированных пучков подробно описаны в наших статьях [21–23]. Чтобы свести выражение (3) к физически измеряемому распределению интенсивности  $J(\mathbf{r})$ , проинтегрируем выражение (3) по переменной  $\mathbf{r}$ . Тогда функция Вигнера

$W(x, y)$  превращается в распределение интенсивности (см., например, Главу 1 в [24])

$$\begin{pmatrix} W_{xx} \\ W_{xy} \\ W_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{00}} \int \begin{pmatrix} x^2 \\ x y \\ y^2 \end{pmatrix} J(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (23)$$

Измеряя моменты интенсивности  $W_{xx}, W_{yy}, W_{xy}$  в плоскости перетяжки пучка  $z = 0$ , мы используем их для определения остальных элементов матрицы  $\mathbf{P}$ , как указывалось выше. На рис. 1 и рис. 2б полученные экспериментальные результаты показаны жирными точками. Погрешность измерения параметров  $S_1$  и  $S_2$  составила не более 8%, тогда как для параметра  $S_3$  погрешность измерения снижается до 5%. Такое различие в измерении погрешности орбитальных параметров Стокса  $S_k$  обусловлена тем, что ОУМ  $S_3$  определяется непосредственно из эксперимента, тогда как измерение  $S_1$  и  $S_2$  требует дополнительной обработки данных.

### Выводы

Теоретически найдены и экспериментально измерены элементы симплектической матрицы моментов интенсивности второго порядка для параксиальных структурированных пучков Лагерра–Гаусса с двумя управляющими параметрами ( $\varepsilon, \theta$ ). Показано, что только три элемента матрицы являются независимыми и непосредственно измеряемыми на эксперименте. Остальные элементы определяются. Это позволило рассчитать орбитальные параметры Стокса ( $S_1, S_2, S_3$ ), сумма квадратов которых образует инвариант  $S$  оптической системы первого порядка. Фактически инвариант  $S$  можно рассматривать как радиус сферы (орбитальная сфера Пуанкаре [5]) в декартовых координатах ( $S_1, S_2, S_3$ ), которые параметризуются управляющим  $\theta$ -фазовым параметром сЛГ-пучка, в то время как амплитудный  $\varepsilon$ -параметр может изменять структуру пучка. Орбитальные параметры Стокса позволяют отображать состояние сЛГ-пучка при изменении фазового параметра  $\theta$  на сферу в виде сложных пространственных траекторий с самопересечениями. В общем случае траектория имеет многолепестковую форму с числом лепестков, равным сумме удвоенного радиального числа  $n$  и топологического заряда  $\ell$  исходного пучка Лагерра–Гаусса,  $N = 2n + \ell$ . Фактически, число мод Эрмита–Гаусса в сЛГ-пучке задаёт число основных степеней свободы, которые дополняются еще тремя независимыми элементами матрицы  $\mathbf{P}$ . Изменение во времени фазового параметра  $\theta$  можно интерпретировать как возможный способ передачи данных в оптической системе. Амплитудный параметр  $\varepsilon$  управляет формой лепестков траектории, положением точек самопересечения и площадью, охваченной траекторией на орбитальной сфере Пуанкаре. Следует от-

метить, что площадь сферы, охваченной траекторией на сфере при адиабатическом изменении параметра пучка, непосредственно связана с геометрической фазой Берри [25]. Таким образом, при распространении и изменении фазового параметра сЛГ-пучок может приобрести управляемую геометрическую фазу, которую можно рассматривать как дополнительную степень свободы.

### *Благодарности*

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-22-00278) в части «4D-матрица моментов интенсивности».

### *References*

- [1] Poincaré H. *Theorie Mathématique de la Lumière*. Paris: GauthiersVillars; 1892. ISBN: 978-2019673512.
- [2] Toninelli E, Ndagano B, Vallés A, Sephton B, Nape I, Ambrosio A, Capasso F, Padgett MJ, Forbes A. Concepts in quantum state tomography and classical implementation with intense light: a tutorial. *Adv Opt Photonics* 2019; 11(1): 67-134. DOI: 10.1364/AOP.11.000067.
- [3] Shen Y, Nape I, Yang X, Gong M, Naidoo D, Forbes A. Creation and control of high-dimensional multi-partite classically entangled light. *Light Sci Appl* 2021; 10: 50. DOI: 10.1038/s41377-021-00493-x.
- [4] Padgett MJ, Courtial J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Opt Lett* 1999; 24(7): 430-432. DOI: 10.1364/OL.24.000430.
- [5] Alieva T, Bastiaans MJ. Phase-space rotations and orbital Stokes parameters. *Opt Lett* 2009; 34(4): 410-412. DOI: 10.1364/OL.34.000410.
- [6] Dennis MR, Alonso MA. Swings and roundabouts: Optical Poincaré spheres for polarization and Gaussian beams. *Philos Trans R Soc London A* 2017; 375(2087): 20150441. DOI: 10.1098/rsta.2015.0441.
- [7] Alonso MA, Dennis MR. Ray-optical Poincaré sphere for structured Gaussian beams. *Optica* 2017; 4(4): 476-486. DOI: 10.1364/OPTICA.4.000476.
- [8] He C, Shen Y, Forbes A. Towards higher-dimensional structured light. *Light Sci Appl* 2022; 11(1): 205. DOI: 10.1038/s41377-022-00897-3.
- [9] Shen Y, Wang Z, Fu X, Naidoo D, Forbes A. SU(2) Poincaré sphere: A generalized representation for multidimensional structured light. *Phys Rev A* 2020; 102(3): 031501. DOI: 10.1103/PhysRevA.102.031501.
- [10] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(5): S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [11] Calvo GF. Wigner representation and geometric transformations of optical orbital angular momentum spatial modes. *Opt Lett* 2005; 30(10): 1207-1209. DOI: 10.1364/OL.30.001207.
- [12] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Ya, Bretsko M. Control of the orbital angular momentum via radial numbers of structured Laguerre–Gaussian beams. *Opt Lett* 2022; 47(10): 2402-2405. DOI: 10.1364/OL.459404.
- [13] Weber H, Herziger G, Poprawe R. *Laser physics and applications. Subvolume A: Laser Fundamentals*. Berlin: Springer; 2004. ISBN: 978-3-540-44821-1.
- [14] Wolf KB. *Geometric optics on phase space*. Berlin: Springer; 2004. ISBN: 3-540-22039-9.
- [15] Born M, Wolf E. *Principles of optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. ISBN: 0-521-64222-1.
- [16] Bekshaev AY. Intensity moments of a laser beam formed by superposition of Hermite-Gaussian modes. *arXiv Preprint*. 2006. Source: <<https://arxiv.org/abs/physics/0607047>>. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0607047.
- [17] Nemes G, Siegman AE. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J Opt Soc Am A* 1994; 11(8): 2257-2264. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002257.
- [18] Alieva T, Cámara A, Bastiaans MJ. Beam mapping on the orbital Poincaré sphere. *Proc SPIE* 2011; 8011: 801160. DOI: 10.1117/12.902154.
- [19] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Y. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach. *Photonics* 2024; 11(3): 191. DOI: 10.3390/photonics11030191.
- [20] ISO 11146-2:2021. *Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios. Part 2: General astigmatic beams*. Geneva, Switzerland: ISO; 2021.
- [21] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams. *Computer Optics* 2018; 42(5): 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
- [22] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Shaping and processing the vortex spectra of singular beams with anomalous orbital angular momentum. *Computer Optics* 2019; 43(4): 517-527. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-517-527.
- [23] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Sorting Laguerre-Gaussian beams by radial numbers via intensity moments. *Computer Optics* 2020; 44(2): 155-166. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-677.
- [24] Testorf M, Hennelly B, Ojeda-Castañeda J. *Phase-space optics: fundamentals and applications*. London, Sydney: McGraw-Hill; 2010. ISBN: 0071597980.
- [25] Berry MV. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc R Soc Lond A* 1984; 392(1802): 45-57. DOI: 10.1098/rspa.1984.0023.

### *Сведения об авторах*

**Воляр Александр Владимирович** – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика.  
E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com)

**Абрамочкин Евгений Григорьевич** – доктор физико-математических наук (2006), ведущий научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики.

E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru)

**Брецько Михаил Владимирович** – кандидат физико-математических наук (2022), старший преподаватель кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика.

E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com)

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 07 мая 2024 г. Окончательный вариант – 03 августа 2024 г.*

---

---

# Fine-structure mapping of structured Laguerre-Gaussian beam states on the orbital Poincaré sphere

A.V. Volyar<sup>1</sup>, E.G. Abramochkin<sup>2</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,  
295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4,

<sup>2</sup> Lebedev Physical Institute, 443011, Samara, Russia, Novo-Sadovaya 221

## Abstract

Elements of a 4D symplectic matrix  $\mathbf{P}$  of second-order intensity moments are theoretically found and experimentally measured for paraxial structured Laguerre-Gaussian (sLG) beams with two control parameters—the amplitude  $\varepsilon$  and phase  $\theta$ . It is shown that only three out of ten elements of the matrix  $\mathbf{P}$  are independent and directly measurable in the experiment. The remaining elements are determined through them. This made it possible to calculate the orbital Stokes parameters ( $S_1, S_2, S_3$ ), with their the sum of squares forming the invariant  $S$  of a first-order optical system. In terms of the elements of the matrix  $\mathbf{P}$ , the orbital Stokes parameters are parameterized by the parameter  $\theta$  of the sLG beam. The invariant  $S$  can be treated as the radius of a 2D sphere (orbital Poincaré sphere) in the Cartesian coordinates ( $S_1, S_2, S_3$ ). These coordinates map the sLG beam states onto the sphere, where the mapped trajectories acquire a complete spatial form inherent in two parametric sLG beam. The variation of the amplitude parameter controls the area covered by the trajectory, its shape and positions of the trajectory self-crossing points. It should be noted that the area of the sphere covered by the trajectory on the sphere with an adiabatic change in the beam parameter is directly related to the geometric Berry phase. Thus, with propagation and variations of the phase parameter, the sLG beam can acquire a controlled geometric phase, which can be considered as an additional degree of freedom.

**Keywords:** symplectic matrix, structured Laguerre-Gaussian beam, orbital angular momentum, Poincaré sphere.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV. Fine-structure mapping of structured Laguerre-Gaussian beam states on the orbital Poincaré sphere. *Computer Optics* 2025; 49(2): 165-172. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1562.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No. 24-22-00278 (Section “4D Intensity Moments Matrix”).

---

## Authors' information

**Alexander Vladimirovich Volyar** (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.

E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com)

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962) graduated from Kuibyshev State University (1984), majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor's Degree in Physics in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests include complex analysis, special functions, and mathematical physics equations.

E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru)

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. He is senior lecturer of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics.

E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com)

---

Received May 07, 2024. The final version – August 03, 2024.

---