

Спиновый и орбитальный эффекты Холла в остром фокусе осевой суперпозиции двух цилиндрических векторных пучков с номерами разной четности

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалев^{1,2}, С.С. Стафеев^{1,2}, А.М. Телегин²

¹ Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассмотрена острая фокусировка осевой суперпозиции двух цилиндрических векторных пучков разных порядков. У такой суперпозиции в начальной плоскости индекс поляризационной сингулярности равен полусумме номеров двух цилиндрических векторных пучков в суперпозиции. У такой суперпозиции в начальной плоскости нет спинового углового момента и нет поперечного потока энергии. Показано, что при разной четности номеров двух цилиндрических векторных пучков в плоскости фокуса формируются области с продольной проекцией спинового углового момента разного знака и области с поперечным вращением световой энергии по замкнутым траекториям в разные стороны (по часовой и против часовой стрелки). То есть в плоскости фокуса имеют место продольные спиновый и орбитальный эффекты Холла. Если номера двух цилиндрических векторных пучков имеют одинаковую четность, то в плоскости фокуса поляризация неоднородная линейная и поток энергии (вектор Умова–Пойнтинга) имеет только продольную компоненту.

Ключевые слова: цилиндрический векторный пучок, поляризационная сингулярность, острая фокусировка, спиновый угловой момент, спиновый эффект Холла, орбитальный эффект Холла.

Цитирование: Котляр, В.В. Спиновый и орбитальный эффекты Холла в остром фокусе осевой суперпозиции двух цилиндрических векторных пучков с номерами разной четности / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, С.С. Стафеев, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 3. – С. 369–377. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1549.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Telegin AM. Spin and orbital Hall effects in the tight focus of coaxial superposition of two cylindrical vector beams of different-parity orders. *Computer Optics* 2025; 49(3): 369-377. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1549.

Введение

Цилиндрические векторные пучки (ЦВП) [1] интенсивно исследуются в настоящее время из-за их широкого применения на практике и интересных свойств. ЦВП применяются при острой фокусировке лазерного света [2], для манипуляции микрочастицами [3] и в задачах беспроводной телекоммуникации [4, 5]. Сформировать ЦВП можно с помощью модулятора света [6] или с помощью q-пластинок [7]. Появилось много работ, в которых ЦВП формируют с помощью метаповерхностей различных типов [8–13]. В сечении ЦВП в начальной плоскости поляризация неоднородно линейная. При обходе вокруг центра цилиндрического векторного пучка целого порядка m векторы линейной поляризации делают m полных оборотов. В центре сечения таких пучков находится точка с неопределенным направлением линейной поляризацией (V-точка). Индекс поляризационной сингулярности такой точки [14] в центре цилиндрического векторного пучка равен m . При распространении в свободном пространстве в сечении цилиндрического векторного пучка появляются области

с левой и правой эллиптическими поляризациями [15, 16]. Но в плоскости фокуса или в дальнем поле поляризация в сечении цилиндрического векторного пучка опять становится линейной в каждой точке. В нашей работе [17] показано, что в остром фокусе ЦВП с дробным порядком m в плоскости фокуса формируются области, в которых одновременно и вектора эллиптической поляризации вращаются в разных направлениях (спиновый эффект Холла), и поперечный поток энергии вращается по часовой и против часовой стрелки (орбитальный эффект Холла). Недостатком работы [17] является то, что нельзя получить простых аналитических выражений для характеристик светового поля в фокусе (интенсивности, потока энергии, спинового углового момента) для ЦВП с дробным порядком (номером). И поэтому нельзя понять механизм формирования эффекта Холла в фокусе такого пучка. Спиновый и орбитальный эффекты Холла исследовались также в других работах, например в [18, 19].

В данной работе мы рассмотрели векторный пучок, у которого порядок полуцелый, но можно получить аналитические выражения для характеристик та-

кого пучка в остром фокусе. В данной работе с помощью формализма Ричардса–Вольфа [20] мы показали, что в фокусе осевой суперпозиции двух ЦВП с номерами разной четности также формируются области со «спином и орбитой» разного знака, то есть в фокусе имеет место и спиновый, и орбитальный эффекты Холла. Но если четность номеров двух ЦВП в суперпозиции одинаковая, то в фокусе не возникает «ни спина, ни орбиты», то есть не имеет место эффект Холла. Возникновение спинового эффекта Холла в зависимости от четности порядков двух ЦВП аналогично работе [21], где рассматривался один обобщенный ЦВП, но с разными порядками у поперечных декартовых составляющих поля. В этом случае спиновый эффект Холла также возникал при условии, что эти два порядка имеют разную четность.

1. Суперпозиция двух цилиндрических векторных пучков в начальной плоскости и в фокусе

Рассмотрим вектор Джонса начального светового поля (продольная проекция напряженности векторного поля в этой плоскости равна нулю):

$$\mathbf{E}_{m,n}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = A(\theta) \left[\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix} \right], \quad (1)$$

где $A(\theta)$ – радиально-симметричная амплитуда начального поля, зависящая только от радиальной координаты $r = f \sin \theta$, f – фокусное расстояние идеальной сферической линзы, θ – угол между оптической осью и отрезком, соединяющим центр плоскости фокуса с точкой на сферическом фронте сразу за линзой, отстоящей от оптической оси на расстояние r , n и m – целые числа, φ – азимутальный угол в сечении пучка. Преобразуем выражение (1) к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m,n}(\theta, \varphi) &= A(\theta) \begin{bmatrix} \cos n\varphi + \cos m\varphi \\ \sin n\varphi + \sin m\varphi \end{bmatrix} = \\ &= 2A(\theta) \cos\left(\frac{n-m}{2}\varphi\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n+m}{2}\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{n+m}{2}\varphi\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) видно, что суперпозиция двух ЦВП является также ЦВП, но с полуцелым порядком $(n+m)/2$. У пучка (2) индекс поляризационной сингулярности, который равен топологическому заряду комплексного скалярного поля, образованного с помощью проекций электрического вектора (2)

$$E_c = \cos\left(\frac{n+m}{2}\varphi\right) + i \sin\left(\frac{n+m}{2}\varphi\right) = \exp\left(i\frac{n+m}{2}\varphi\right) \quad (3)$$

и равен $(n+m)/2$. Если номера n и m разной четности, то индекс поляризационной сингулярности является полуцелым числом. Это означает, что в поле (1) есть

(при $\varphi = 0$) линия поляризационной сингулярности, на которой не определено направление вектора линейной поляризации. Векторы поляризации при φ немного больше нуля направлены вдоль положительного направления оси x . А векторы поляризации при φ немного меньше нуля направлены в противоположном оси x направлении. Это получается из-за того, что векторы поляризации при обходе центра пучка (1) и при n и m разной четности делают несколько полных оборотов на угол 2π и еще половину оборота на угол π . Поэтому векторы поляризации при завершении обхода по замкнутому контуру вокруг центра пучка (1) оказываются направлены в противоположенную сторону по отношению к направлению векторов поляризации при начале обхода.

Далее с помощью формул Ричардса–Вольфа [18, 20] найдем аналитические выражения всех проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей в плоскости острого фокуса для начального светового поля (1):

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi) &= \\ &= i^{n-1} (\cos(n\varphi)I_{0,n} + \cos((n-2)\varphi)I_{2,n-2}) + \\ &+ i^{m-1} (\cos(m\varphi)I_{0,m} + \cos((m-2)\varphi)I_{2,m-2}), \\ E_y(r, \varphi) &= \\ &= i^{n-1} (\sin(n\varphi)I_{0,n} - \sin((n-2)\varphi)I_{2,n-2}) + \\ &+ i^{m-1} (\sin(m\varphi)I_{0,m} - \sin((m-2)\varphi)I_{2,m-2}), \\ E_z(r, \varphi) &= 2i^n \cos((n-1)\varphi)I_{1,n-1} + \\ &+ 2i^m \cos((m-1)\varphi)I_{1,m-1}, \\ H_x(r, \varphi) &= \\ &= -i^{n-1} (\sin(n\varphi)I_{0,n} + \sin((n-2)\varphi)I_{2,n-2}) - \\ &- i^{m-1} (\sin(m\varphi)I_{0,m} + \sin((m-2)\varphi)I_{2,m-2}), \\ H_y(r, \varphi) &= \\ &= -i^{n-1} (-\cos(n\varphi)I_{0,n} + \cos((n-2)\varphi)I_{2,n-2}) - \\ &- i^{m-1} (-\cos(m\varphi)I_{0,m} + \cos((m-2)\varphi)I_{2,m-2}), \\ H_z(r, \varphi) &= -2i^n \sin((n-1)\varphi)I_{1,n-1} - \\ &- 2i^m \sin((m-1)\varphi)I_{1,m-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) функции $I_{\nu,\mu}$ зависят только от радиальной переменной r и равны выражению:

$$\begin{aligned} I_{\nu,\mu} &= \left(\frac{4\pi f}{\lambda}\right)^{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{3-\nu}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^{1/2}(\theta) \times \\ &\times A(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{\mu}(x) d\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где k – волновое число света, λ – длина волны света, z – оптическая ось, при $z=0$ – плоскость фокуса, $x = kr \sin \theta$, $J_{\mu}(x)$ – функция Бесселя первого рода μ -го порядка, $NA = \sin \theta_0$ – числовая апертура апланатической оптической системы, $A(\theta)$ – любая действительная функция, описывающая амплитуду входного поля, обладающего осевой симметрией (плоская волна,

гауссов пучок, пучок Бесселя–Гаусса). У интегралов $I_{\nu,\mu}$ (5) первый индекс $\nu=0, 1, 2$ описывает тип интеграла, а второй индекс $\mu=0, 1, 2, \dots, m$ равен порядку функции Бесселя.

2. Плотность продольной составляющей вектора спинового углового момента

Вектор спинового углового момента (СУМ) \mathbf{S} равен известному выражению [22]:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi\omega} \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}), \quad (6)$$

где ω – циклическая частота света, \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля. В дальнейшем постоянную $1/(16\pi\omega)$ будем игнорировать. Из (6) видно, что продольная компонента СУМ (без учета константы) совпадает с ненормированной третьей компонентой вектора Стокса:

$$S_3 = S_z = 2 \text{Im}(E_x^* E_y). \quad (7)$$

Подставляя проекции вектора электрического поля из (4) в (7), получим аналитическое выражение для продольной компоненты СУМ, которая оказалась отлична от нуля при условии, что четность номеров n и m разная ($n-m=2p+1, p=0,1,2,3,\dots$):

$$S_z(r, \varphi) = \begin{cases} 2(-1)^{p+1} \times \\ \times [\sin((n+m-2)\varphi)(I_{0,m}I_{2,n-2} - I_{0,n}I_{2,m-2}) - \\ - \sin((n-m)\varphi)(I_{0,n}I_{0,m} - I_{2,n-2}I_{2,m-2})], & \text{если } n-m=2p+1, \\ 0, & \text{если } n-m=2p, \end{cases} \quad (8)$$

где $p=0, 1, 2, \dots$

Если номера n и m одной четности ($n-m=2p$), то продольный СУМ (8) равен нулю. Так как третья компонента вектора Стокса показывает наличие спина в пучке, то отличие от нуля продольной СУМ (8) означает, что в плоскости фокуса имеют место области с положительным и отрицательным спином, то есть области с эллиптической поляризацией разного знака. В работе [23] показано, что наибольший вклад в амплитуду поля в фокусе будут давать интегралы (5), у которых первый индекс нулевой. Поэтому из (8) можно получить приближенное выражение для СУМ, оставив только самое большое слагаемое:

$$S_z(r, \varphi) \approx 2(-1)^p I_{0,n} I_{0,m} \sin((2p+1)\varphi). \quad (9)$$

Из (9) видно, что при обходе по окружности с центром на оптической оси продольная СУМ будет менять знак $2(2p+1)$ раз. То есть на некоторой окружности в плоскости фокуса будут находиться $2p+1$ локальных областей, в которых вектор эллиптической поляризации будет вращаться во времени по часовой

стрелке, и $2p+1$ локальных областей, в которых вектор эллиптической поляризации будет вращаться во времени против часовой стрелки. Это показывает наличие в фокусе светового поля (1) с номерами n и m разной четности спинового эффекта Холла.

3. Поперечный поток энергии в плоскости фокуса

Плотность потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга) вычисляется по известной формуле [20]:

$$\mathbf{P} = (c/2\pi) \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}), \quad (10)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} – вектора напряженности электрического и магнитного полей, $*$ – знак комплексного сопряжения, \times – векторное умножение, c – скорость света в вакууме. В дальнейшем постоянную $c/(2\pi)$ будем игнорировать. Подставим выражения для проекций электромагнитного поля в фокусе (4) в выражение (10) и получим для поперечных проекций вектора Умова–Пойнтинга выражения:

$$P_x(r, \varphi) = \begin{cases} 2(-1)^p \times \\ \times [\cos((n-m-1)\varphi)(I_{1,m-1}I_{2,n-2} + I_{1,n-1}I_{0,m}) - \\ - \cos((n-m+1)\varphi)(I_{1,m-1}I_{0,n} + I_{1,n-1}I_{2,m-2})], & \text{если } n-m=2p+1, \\ 0, & \text{если } n-m=2p, \end{cases} \quad (11)$$

$$P_y(r, \varphi) = \begin{cases} -2(-1)^p \times \\ \times [\sin((n-m-1)\varphi)(I_{1,m-1}I_{2,n-2} + I_{1,n-1}I_{0,m}) + \\ + \sin((n-m+1)\varphi)(I_{1,m-1}I_{0,n} + I_{1,n-1}I_{2,m-2})], & \text{если } n-m=2p+1, \\ 0, & \text{если } n-m=2p, \end{cases}$$

где $p=0,1,2,\dots$

Чтобы получить более простые выражения, удобные для понимания, найдем полярные проекции поперечного вектора Умова–Пойнтинга по формулам перехода:

$$\begin{aligned} P_r &= P_x \cos \varphi + P_y \sin \varphi, \\ P_\varphi &= -P_x \sin \varphi + P_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя выражения (11) в уравнение (12), получим:

$$\begin{aligned} P_r &= \cos((2p+1)\varphi) Q_1(r), \quad n-m=2p+1, \\ Q_1(r) &= 2(-1)^p \times \\ &\times [I_{1,m-1}(I_{2,n-2} - I_{0,n}) + I_{1,n-1}(I_{0,m} - I_{2,m-2})], \\ P_\varphi &= \sin((2p+1)\varphi) Q_2(r), \quad n-m=2p+1, \\ Q_2(r) &= -2(-1)^p \times \\ &\times [I_{1,m-1}(I_{2,n-2} + I_{0,n}) + I_{1,n-1}(I_{2,m-2} + I_{0,m})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) можно заметить, что в функции $Q_1(r)$ интегралы (5) входят с разными знаками, а в функцию $Q_2(r)$ интегралы (4) входят только со знаком плюс. То есть можно найти в плоскости фокуса окружность с центром на оптической оси и с таким радиусом, что $Q_1(r)$ будет равна нулю на этой окружности, а функция $Q_2(r)$ будет отлична от нуля. И на такой окружности P_r тоже будет равно нулю, а P_ϕ будет отлично от нуля. При обходе по этой окружности функция $P_\phi = \sin((2p+1)\phi)Q_2(r)$ поменяет знак $2(2p+1)$ раз. Это означает, что в плоскости фокуса пучка (1) при номерах n и m разной четности имеются локальные области, в $2p+1$ из которых поперечный поток энергии вращается по часовой стрелке, а в других $2p+1$ областях поток энергии вращается против часовой стрелки. Это является проявлением орбитального эффекта Холла в фокусе. Заметим, что в точках смены знака при обходе по выбранной окружности обе функции P_r и P_ϕ равны нулю. В этих точках поперечный поток энергии равен нулю. Из сравнения (9) и (13) следует, что при четном p вблизи оптической оси в выражении для S_z знак перед синусом $\sin(2p+1)\phi$ положительный, а в выражении для P_ϕ знак перед таким же синусом $\sin(2p+1)\phi$ отрицательный. То есть там, где СУМ (9) положительная (вектор поляризации вращается против часовой стрелки), там направление потока энергии отрицательное (по часовой стрелке), и наоборот. То есть вектор поляризации и поток энергии в одной и той же области в плоскости фокуса вращаются в разные стороны.

4. Распределение интенсивности в плоскости фокуса

Найдем выражение для плотности энергии (интенсивности) поля (1) в плоскости фокуса. Для этого выражения для проекций поля (4) надо взять по модулю в квадрате и сложить, $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$, получим ($n - m = 2p + 1$):

$$I_{n,m}(r, \phi) = I_{0,n}^2 + I_{2,n-2}^2 + 2I_{1,n-1}^2 + 2\cos(2(n-1)\phi)(I_{0,n}I_{2,n-2} + I_{1,n-1}^2) + I_{0,m}^2 + I_{2,m-2}^2 + 2I_{1,m-1}^2 + 2\cos(2(m-1)\phi)(I_{0,m}I_{2,m-2} + I_{1,m-1}^2). \quad (14)$$

Из (14) видно, что два цилиндрических векторных пучка с номерами n и m разной четности складываются в фокусе по интенсивности, как векторные пучки с взаимной перпендикулярной поляризацией. В (14) первые две строчки – это интенсивность ЦВП I_n с номером n , а последние две строчки – это интенсивность ЦВП I_m с номером m : $I_{n,m} = I_n + I_m$. Если бы мы выбрали номера ЦВП n и m одной четности, то пучки с разными номерами складывались бы по амплитуде и выражение для интенсивности (14) было бы другое и имело перекрестное слагаемое. В начальной плоскости два пучка ЦВП в суперпозиции (1) при любых

номерах n и m не имеют ортогональную поляризацию, так как интенсивность суперпозиции (1) содержит интерференционное слагаемое:

$$I_{n,m}(\phi, \theta) = 2|A(\theta)|^2(1 + \cos(n-m)\phi) = 4|A(\theta)|^2 \cos^2\left(\frac{n-m}{2}\phi\right). \quad (15)$$

Ортогональность двух поперечных векторов ЦВП в фокусе следует из (4). Учтем в первых двух уравнениях (4) только наибольшие слагаемые с первым нулевым индексом [23] в интегралах (5), получим:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \approx (-i)^n I_{0,n} \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix} + (-i)^m I_{0,m} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Если $m - n = 2p + 1$, то вместо (16) можно записать:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \approx (-i)^n \left[I_{0,n} \begin{pmatrix} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{pmatrix} - i(-1)^p I_{0,m} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \right]. \quad (17)$$

Два вектора Джонса в квадратных скобках (17) взаимно ортогональные, так как интенсивность суммы $I_{1,2}$ равна сумме интенсивностей $I_1 + I_2$:

$$I_{1,2} = |I_{0,n} \cos n\phi - i(-1)^p I_{0,m} \cos m\phi|^2 + |I_{0,n} \sin n\phi - i(-1)^p I_{0,m} \sin m\phi|^2 = I_{0,n}^2 \cos^2(n\phi) + I_{0,m}^2 \cos^2(m\phi) + I_{0,n}^2 \sin^2(n\phi) + I_{0,m}^2 \sin^2(m\phi) = I_1 + I_2 = I_{0,n}^2 + I_{0,m}^2. \quad (18)$$

Из (18) следует, что два поперечных вектора поляризации вида

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, i \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ортогональны между собой, так как $|a + ic|^2 + |b + id|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2$, если a, b, c, d – действительные.

Из (14) также видно, что только при $n = m = 1$ интенсивность обладает круговой симметрией, так как при этих номерах пропадает зависимость от азимутального угла ϕ . Но при любых номерах n и m интенсивность будет симметрична относительно оптической оси, так как при замене угла ϕ на угол $\phi - \pi$ значение интенсивности (14) не изменится. На оптической оси будет локальный максимум интенсивности, если либо n , либо m равны одному из чисел 0, 1, 2. При всех других значениях номеров n и m на оптической оси будет ноль интенсивности.

5. Продольная проекция вектора орбитального углового момента

Для полноты картины получим еще выражения для продольной проекции вектора орбитального уг-

лового момента (ОУМ), который рассчитывается по известной формуле углового момента [24]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} = \frac{1}{8\pi\omega} \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \nabla \mathbf{E}) + \frac{1}{8\pi\omega} \sum_{p=x,y,z} \text{Im}(E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p). \quad (19)$$

В уравнении (19) \mathbf{J} – это вектор углового момента, \mathbf{S} – это вектор СУМ, а \mathbf{L} – это вектор ОУМ:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{8\pi\omega} \sum_{p=x,y,z} \text{Im}(E_p^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_p). \quad (20)$$

В дальнейшем постоянную, стоящую перед суммой в (20), будем опускать. Можно показать, что продольная проекция вектора ОУМ равна выражению:

$$L_z = \text{Im} \left(E_x^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_x + E_y^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_y + E_z^* \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z \right). \quad (21)$$

Подставляя в (21) выражения для проекций вектора электрического поля (4) в плоскости фокуса, получим для продольной проекции ОУМ для поля (1) выражение ($n-m=2p+1$):

$$L_z = \begin{cases} -(-1)^p \times \\ \times \{ \sin((n-m)\varphi) \times \\ \times [(n-m)I_{0,n}I_{0,m} + (n+m-4)I_{2,n-2}I_{2,m-2}] + \\ + \sin((n+m-2)\varphi) \times \\ \times [(n-m-2)I_{0,n}I_{2,n-2} + (n-m+2)I_{0,n}I_{2,m-2}] - \\ - 2I_{1,n-1}I_{1,m-1} [(m-1)\sin((m-1)\varphi)\cos((n-1)\varphi) - \\ - (n-1)\sin((n-1)\varphi)\cos((m-1)\varphi)] \}, \\ \text{если } n-m=2p+1, \\ 0, \text{ если } n-m=2p. \end{cases} \quad (22)$$

Аналогично тому, как мы получили приближенное выражение для СУМ (9), получим приближенное выражение для ОУМ (22), оставив только главные слагаемые, согласно [23]:

$$L_z \approx -(-1)^p (n-m) \sin((n-m)\varphi) I_{0,n} I_{0,m}. \quad (23)$$

Из сравнения (9) и (23) видно, что одинаковая зависимость плотности СУМ и ОУМ от $\sin(2p+1)\varphi$ означает, что в плоскости фокуса будет одинаковая картина областей со спинами разного знака и областей с поперечным потоком энергии разного направления. Из-за того, что в (9) и (23) знаки разные, в тех областях плоскости фокуса, в которых S_z будет положительная (правая эллиптическая поляризация и вектор поляризации вращается против часовой стрелки), L_z будет отрицательная (поток энергии вращается по часовой стрелке). И наоборот, в тех областях, в которых S_z будет отрицательная (ле-

вая эллиптическая поляризация и вектор поляризации вращается по часовой стрелке), L_z будет положительная (поток энергии вращается против часовой стрелки). Кроме того, из (22) и (23) видно, что при $m=n$, то есть когда суперпозиция (1) состоит всего из одного пучка, ОУМ равен нулю, как и СУМ (8) тоже равен нулю.

6. Моделирование

Моделировалась фокусировка суперпозиции векторных пучков (1) с длиной волны 532 нм с помощью апланатического объектива с числовой апертурой $NA=0,95$. Моделирование осуществлялось с помощью интегралов Ричардса–Вольфа [20]. Ниже показаны распределения суммарной интенсивности ($I=I_x+I_y+I_z$) и продольной и поперечной проекций вектора Пойнтинга (потока энергии) \mathbf{P} и продольной компоненты спинового углового момента S_z .

На рис. 1 и 2 показаны распределения интенсивности и продольной компоненты вектора СУМ для пучка (1) с номерами $(n, m)=(2, 1)$ (рис. 1) и $(n, m)=(3, 1)$ (рис. 2). Из уравнения (14) для интенсивности следует, что при $(n, m)=(2, 1)$ у интенсивности будет либо один максимум, вытянутый вдоль горизонтальной оси, либо два максимума, лежащих на горизонтальной оси. Это следует из того, что в формуле для интенсивности (14) будет только одно слагаемое с зависимостью от азимутального угла $\cos 2\varphi$. Это подтверждается распределением интенсивности на рис. 1а, вытянутым вдоль горизонтальной оси. Из уравнения (9) для продольной проекции вектора спина следует, что при $(n, m)=(2, 1)$ в плоскости фокуса должна сформироваться картина, у которой $S_z \sim \sin \varphi$. То есть у продольной проекции спина должен быть положительный максимум при $\varphi = \pi/2$ и отрицательный минимум при $\varphi = -\pi/2$. Это подтверждается на рис. 1б, из которого видно, что в плоскости фокуса имеются две области с центрами на вертикальной оси, в которых спин имеет разные знаки. То есть в фокусе появились две области с эллиптической поляризацией, в которых вектор поляризации вращается против часовой и по часовой стрелке. Это спиновый эффект Холла. А на горизонтальной оси спин равен нулю, там линейная поляризация.

На рис. 3 показаны поперечные (рис. 3а, б) и продольная (рис. 3в) проекции вектора Пойнтинга в плоскости фокуса для поля (1) с номерами $(n, m)=(5, 2)$. Так как разница номеров нечетная, $n-m=5-2=3$ ($p=1$), то в плоскости фокуса должны быть поперечные потоки энергии (11), (13). Причем при обходе по некоторой окружности с центром на оптической оси, как следует из (13), радиальная и азимутальная составляющие поперечного потока энергии должны менять знак $2(n-m)=6$ раз. Это и видно из рис. 3г (показана только радиальная составляющая).

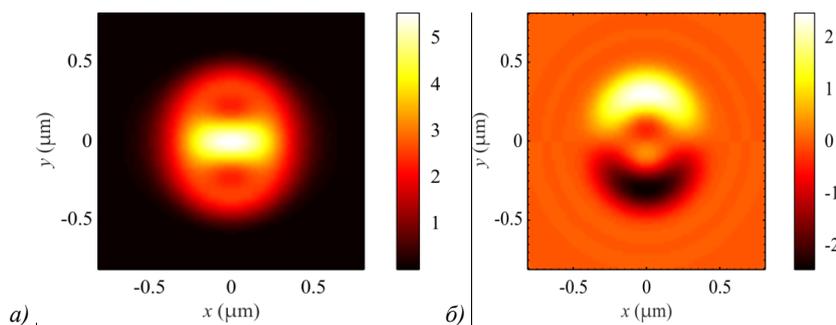


Рис. 1. Распределение интенсивности I (а) и продольной компоненты спинового углового момента S_z (б) в остром фокусе ($NA = 0,95$) для пучка (1) с $m = 1, n = 2$

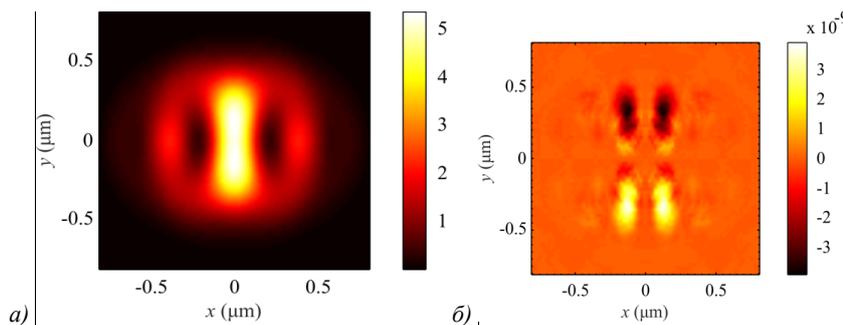


Рис. 2. Распределение интенсивности I (а) и продольной компоненты спинового углового момента S_z (б) в остром фокусе ($NA = 0,95$) для пучка (1) с $m = 1, n = 3$

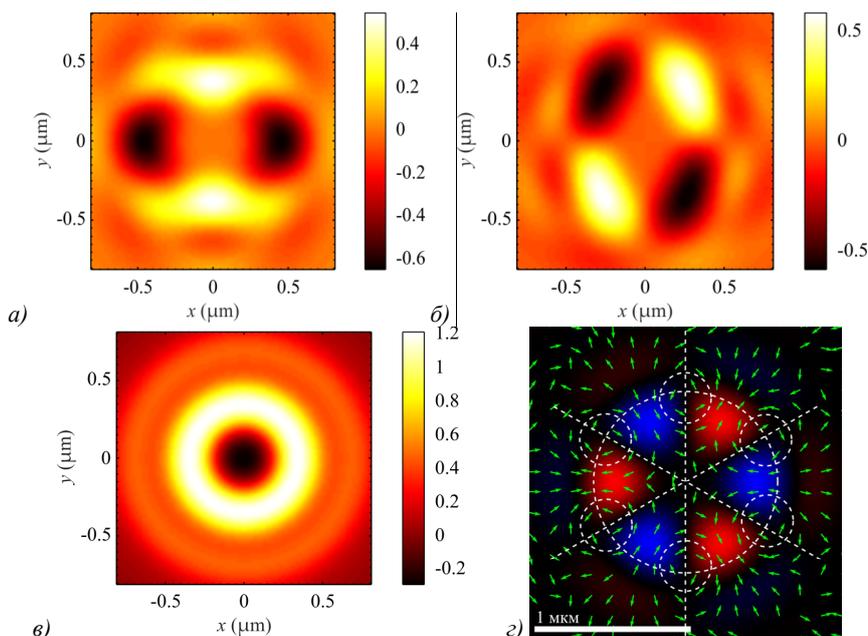


Рис. 3. Распределение компонент вектора Пойнтинга: P_x (а), P_y (б), P_z (в) и P_r (г) в остром фокусе для пучка (1) с $m = 2, n = 5$. Цвет означает знак радиальной составляющей (синий $P_r < 0$, то есть поток к центру, красный $P_r > 0$, то есть поток от центра). Стрелками на распределении радиальной составляющей вектора Пойнтинга показано направление поперечного потока энергии

На рис. 4 показаны распределения продольной проекции СУМ в плоскости фокуса для поля (1) при разных номерах: $(n, m) = (5, 2)$ (рис. 4а) и $(n, m) = (6, 1)$ (рис. 4б). Из уравнения (9) для продольной проекции СУМ видно, что при обходе по некоторой окружности с центром на оптической оси спин должен менять знак $2(n - m)$ раз. Это подтверждается на рис. 4. На рис. 4а СУМ меняет знак $2(5 - 2) = 6$ раз, то есть видны 3 светлых и 3 темных области. В светлых областях

спин положительный и вектор поляризации вращается против часовой стрелки, а в темных областях спин отрицательный и вектор поляризации вращается по часовой стрелке. Аналогично на рис. 4б по окружности наибольшего радиуса лежат 10 светлых и темных областей, $2(6 - 1) = 10$. И на окружности меньшего радиуса с центром на оптической оси также находятся 10 областей спина с разным знаком. Это спиновый эффект Холла.

На рис. 5 для удобства показаны эллипсы поляризации в каждой точке плоскости фокуса на фоне распределения интенсивности, чтобы было видно, в какой области картины интенсивности левая эллиптическая поляризация, в какой области – правая, а где – линейная поляризация. Из рис. 5 видно, что линейная поляризация имеет место вблизи горизонтальной оси, а шесть областей с эллиптической поляризацией, как и на рис. 5а, расположены на шести боковых лепестках, лежащих под углами $\varphi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, 5\pi/4, 3\pi/2, -\pi/4$.

И всегда число областей со спином плюс равно числу областей со спином минус, чтобы полный спин пучка был равен нулю.

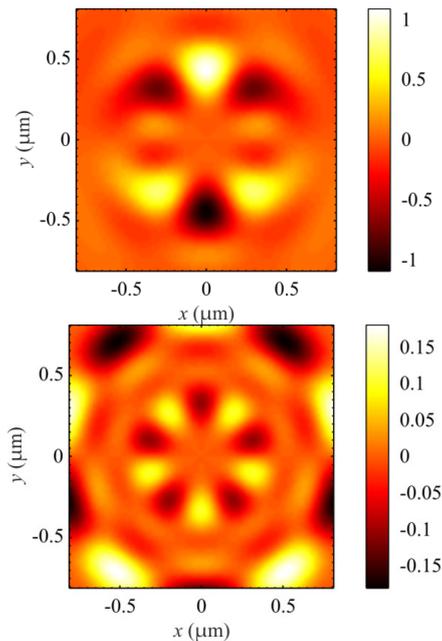


Рис. 4. Распределение продольной компоненты спинового углового момента S_z в остром фокусе для пучка (1) с $t = 2$, $n = 5$ (а) и $t = 1$, $n = 6$ (б)

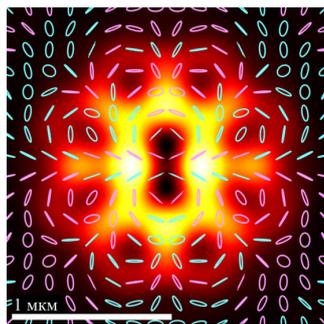


Рис. 5. Распределение интенсивности (белый цвет – максимум, черный цвет – минимум) и распределение эллипсов поляризации (розовые эллипсы с левой поляризацией, а салатные эллипсы с правой) в плоскости фокуса для пучка (1) с $t = 2$, $n = 5$. Масштабная метка означает 1 мкм ($NA = 0,95$)

Заключение

В работе получены следующие результаты. Аналитически и численно показано, что при разной четности номеров осевой суперпозиции, состоящей из

двух ЦВП, в плоскости фокуса формируются области с продольной проекцией СУМ разного знака и области с поперечным вращением световой энергии по замкнутым траекториям в разные стороны (по часовой и против часовой стрелки). То есть в плоскости фокуса имеют место продольные спиновый и орбитальный эффекты Холла. Если номера двух ЦВП имеют одинаковую четность, то в плоскости фокуса поляризация неоднородная линейная и поток энергии (вектор Умова–Пойнтинга) имеет только продольную компоненту. Показано также, что интенсивность суперпозиции двух пучков ЦВП с разной четностью номеров в плоскости фокуса равна сумме интенсивностей каждого пучка, как у двух пучков с ортогональной поляризацией. Хотя в начальной плоскости эти пучки не имеют ортогональной поляризации и интенсивность имеет интерференционный член.

Сформировать осевую суперпозицию двух цилиндрических векторных пучков с разными номерами можно с помощью интерферометра Маха–Зендера. Для этого следует начальный гауссов пучок от лазера с линейной поляризацией разделить на два равных пучка с помощью делительного кубика, и в каждом плече интерферометра расположить по одной q -пластинке с разными номерами. Тогда после объединения двух пучков в один сформируется цилиндрический векторный пучок (1).

Рассмотренные суперпозиции двух цилиндрических векторных пучков можно использовать в задачах манипуляции микрочастицами [25, 26], когда захваченные в фокус микрочастицы в разных областях фокуса будут вращаться вокруг своей оси в разные стороны. Такие пучки можно использовать в задачах локальной магнетизации материалов на основе обратного эффекта Фарадея [27, 28], в задачах наноструктурирования материалов, чувствительных к поляризации [29, 30], и задачах беспроводной телекоммуникации [31, 32].

Благодарности

Работа частично поддержана Российским научным фондом (грант № 23-12-00236) в части теории. Работа также проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» в части моделирования.

References

- [1] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.
- [2] Yew EYS, Sheppard CJR. Tight focusing of radially polarized Gaussian and Bessel–Gauss beams. *Opt Lett* 2007; 32(23): 3417-3419. DOI: 10.1364/OL.32.003417.
- [3] Hnatovsky C, Shvedov V, Krolkowski W, Rode A. Revealing local field structure of focused ultrashort pulses. *Phys Rev Lett* 2011; 106(12): 123901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.123901.

- [4] Lv HR, Lu XQ, Han YS, Mou Z, Zhou CD, Wang SY, Teng SY. Metasurface cylindrical vector light generators based on nanometer holes. *New J Phys* 2019; 21(12): 123047. DOI: 10.1088/1367-2630/ab5f44.
- [5] Milione G, Nguyen TA, Leach J, Nolan DA, Alfano RR. Using the nonseparability of vector beams to encode information for optical communication. *Opt Lett* 2015; 40(21): 4887-4890. DOI: 10.1364/OL.40.004887.
- [6] Harm W, Bernet S, Ritsch-Marte M, Harder I, Lindlein N. Adjustable diffractive spiral phase plates. *Opt Express* 2015; 23(1): 413-421. DOI: 10.1364/OE.23.000413.
- [7] Marrucci L, Manzo C, Paparo D. Pancharatnam-Berry phase optical elements for wave front shaping in the visible domain: Switchable helical mode generation. *Appl Phys Lett* 2006; 88(22): 221102. DOI: 10.1063/1.2207993.
- [8] Zhao Z, Wang J, Li SH, Willner AE. Metamaterials-based broadband generation of orbital angular momentum carrying vector beams. *Opt Lett* 2013; 38(6): 932-934. DOI: 10.1364/OL.38.000932.
- [9] Chen WB, Abeyasinghe DC, Nelson RL, Zhan QW. Plasmonic lens made of multiple concentric metallic rings under radially polarized illumination. *Nano Lett* 2009; 9(12): 4320-4325. DOI: 10.1021/nl903145p.
- [10] Chen S, Xie Z, Ye H, Wang X, Guo Z, He Y, Li Y, Yuan X, Fan D. Cylindrical vector beam multiplexer/demultiplexer using off-axis polarization control. *Light Sci Appl* 2021; 10: 222. DOI: 10.1038/s41377-021-00667-7.
- [11] Li J, Chen S, Yang H, Li J, Yu P, Cheng H, Gu C, Chen H-T, Tian J. Simultaneous control of light polarization and phase distributions using plasmonic metasurfaces. *Adv Funct Mater* 2015; 25(5): 704-710. DOI: 10.1002/adfm.201403669.
- [12] Deng Z-L, Deng J, Zhuang X, Wang S, Li K, Wang Y, Chi Y, Ye X, Xu J, Wang GP, Zhao R, Wang X, Cao Y, Cheng X, Li G, Li X. Diatomic metasurface for vectorial holography. *Nano Lett* 2018; 18(5): 2885-2892. DOI: 10.1021/acs.nanolett.8b00047.
- [13] Chen Q, Liu P, Fu Y, Zhang S, Zhang Y, Yuan X, Min C. Monolayer chiral metasurface for generation of arbitrary cylindrical vector beams. *Photonics* 2024; 11(1): 57. DOI: 10.3390/photonics 11010057.
- [14] Freund I. Cones, spirals, and Möbius strips, in elliptically polarized light. *Opt Commun* 2005; 249(1-3): 7-22. DOI: 10.1016/j.optcom.2004.12.052.
- [15] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA, Zaitsev VD. Spin Hall effect before and after the focus of a high-order cylindrical vector beam. *Appl Sci* 2022; 12(23): 12218. DOI: 10.3390/app122312218.
- [16] Shu W, Lin C, Wu J, Chen S, Ling X, Zhou X, Luo H, Wen S. Three-dimensional spin Hall effect of light in tight focusing. *Phys Rev A* 2020; 101(2): 023819. DOI: 10.1103/physreva.101.023819.
- [17] Stafeev SS, Nalimov AG, Zaitsev VD, Kotlyar VV. Tight focusing cylindrical vector beams with fractional order. *J Opt Soc Am B* 2021; 38(4): 1090-1096. DOI: 10.1364/JOSAB.413581.
- [18] Kotlyar VV, Stafeev SS, Zaitsev VD, Kozlova ES. Spin-orbital conversion with the tight focus of an axial superposition of a high-order cylindrical vector beam and a beam with linear polarization. *Micromachines* 2022; 13(7): 1112. DOI: 10.3390/mi13071112.
- [19] He Y, Xie Z, Yang B, Chen X, Liu J, Ye H, Zhou X, Li Y, Chen S, Fan D. Controllable photonic spin Hall effect with phase function construction. *Photonics Res* 2020; 8(6): 963-971. DOI: 10.1364/PRJ.388838.
- [20] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc R Soc Lond Ser A* 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [21] Khonina SN, Ustinov AV, Porfirev AP. Vector Lissajous laser beams. *Opt Lett* 2020; 45(15): 4112-4115. DOI: 10.1364/OL.398209.
- [22] Bliokh KY, Ostrovskaya EA, Alonso MA, Rodriguez-Herrera OG, Lara D, Dainty C. Spin-to-orbital angular momentum conversion in focusing, scattering, and imaging systems. *Opt Express* 2011; 19(27): 26132-26149. DOI: 10.1364/OE.19.026132.
- [23] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. *Micromachines* 2023; 14(2): 494. DOI: 10.3390/mi14020494.
- [24] Humblet J. Sur le moment d'impulsion d'une onde électromagnétique. *Physica* 1943; 10(7): 585-603. DOI: 10.1016/s0031-8914(43)90626-3.
- [25] Donato MG, Vasi S, Sayed R, Jones PH, Bonaccorso F, Ferrari AC, Gucciardi PG, Maragò OM. Optical trapping of nanotubes with cylindrical vector beams. *Opt Lett* 2012; 37(16): 3381-3383. DOI: 10.1364/OL.37.003381.
- [26] Zhong MC, Gong L, Li D, Zhou JH, Wang ZQ, Li YM. Optical trapping of core-shell magnetic microparticles by cylindrical vector beams. *Appl Phys Lett* 2014; 105(18): 181112. DOI: 10.1063/1.4901343.
- [27] Yang X, Mou Y, Zapata R, Reynier B, Gallas B, Mivelle M. An inverse Faraday effect generated by linearly polarized light through a plasmonic nano-antenna. *Nanophotonics* 2023; 12(4): 687-694. DOI: 10.1515/nanoph-2022-0488.
- [28] González-Alcalde AK, Shi X, Ortiz VH, Feng J, Wilson RB, Vuong LT. Enhanced inverse Faraday effect and time-dependent thermo-transmission in gold nanodisks. *Nanophotonics* 2024; 13(11): 1993-2002. DOI: 10.1515/nanoph-2023-0777.
- [29] Zhai Y, Cao L, Liu Y, Tan X. A review of polarization-sensitive materials for polarization holography. *Materials* 2020; 13(23): 5562. DOI: 10.3390/ma13235562.
- [30] Haslinger MJ, Sivun D, Pöhl H, Munkhbat B, Mühlberger M, Klar TA, Scharber MC, Hrelescu C. Plasmon-assisted direction- and polarization-sensitive organic thin-film detector. *Nanomaterials* 2020; 10(9): 1866. DOI: 10.3390/nano10091866.
- [31] Cao M, Xie Z, Zhong Y, Lei T, Zhang W, Liu S, Yuan X. Cylindrical vector beams demultiplexing communication based on a vectorial diffractive optical element. *Nanophotonics* 2023; 12(9): 1753-1762. DOI: 10.1515/nanoph-2023-0009.
- [32] Zhang H, Fu C, Fang J, Lei T, Zhang Y, Yuan X. Cylindrical vector beams demultiplexing optical communication based on spin-dependent vortex Dammann grating. *Appl Opt* 2020; 59(35): 11041-11045. DOI: 10.1364/AO.409641.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджет-

ного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-1737-0393.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает ведущим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Отделения «Институт систем обработки изображений – Самара» Курчатовского комплекса кристаллографии и фотоники федерального государственного бюджетного учреждения «Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» и по совместительству профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267.

Стафеев Сергей Сергеевич, 1985 года рождения. В 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика и физика». Доктор физико-математических наук с 2023 года. Старший научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт». Область научных интересов: дифракционная оптика, разностное решение уравнений Максвелла, оптика ближнего поля. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com ORCID: 0000-0002-7008-8007.

Телегин Алексей Михайлович, в 2009 году окончил СГАУ с дипломом по специальности «Радиотехника», в 2012 году защитил диссертацию, к.ф.-м.н., доцент кафедры конструирования и технологии электронных систем и устройств Самарского университета, с.н.с. Института космического приборостроения Самарского университета. Область научных интересов: космическое приборостроение, сенсоры. E-mail: talex85@mail.ru

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 18 апреля 2024 г. Окончательный вариант – 07 мая 2024 г.

Spin and orbital Hall effects in the tight focus of coaxial superposition of two cylindrical vector beams of different-parity orders

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, S.S. Stafeev^{1,2}, A.M. Telegin^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute",
Molodogvardeyskaya Str. 151, Samara, 443001, Russia,

²Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

We study tight focusing of coaxial superposition of two cylindrical vector beams (CVB) of different orders. In the initial plane, the polarization singularity index of such superposition equals the half-sum of the orders of the two constituent CVBs. Such superposition has neither spin angular momentum (SAM) nor transverse energy flow in the initial plane. We demonstrate that if two constituent CVBs are of different-parity orders, then, in the focal plane, there occur regions with nonzero longitudinal SAM components of alternating sign, alongside regions where opposite-handed transverse energy flows are rotating along closed paths (clockwise and counterclockwise). This means that the longitudinal spin and orbital Hall effects arise in the focal plane. On the contrary, if the two CVBs are of same-parity orders, polarization in the focal plane is inhomogeneous linear and the energy flow (Umov-Poynting vector) only has an on-axis component.

Keywords: cylindrical vector beam, polarization singularity, tight focusing, spin angular momentum, spin Hall effect, orbital Hall effect.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Telegin AM. Spin and orbital Hall effects in the tight focus of coaxial superposition of two cylindrical vector beams of different-parity orders. *Computer Optics* 2025; 49(3): 369-377. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1549.

Acknowledgements: This work was partly funded by the Russian Science Foundation under project No. 23-12-00236 (Theoretical part) and under the state assignment of the NRC "Kurchatov Institute" (Numerical simulation).

Author's information

Victor Victorovich Kotlyar is a Head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his DrSc degree (2012). He is a Leading Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Professor at Samara National Research University. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, and singular optics. E-mail: alanko@ipsiras.ru

Sergey S. Stafeev (b. 1985) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute". Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: sergey.stafeev@gmail.com ORCID: 0000-0002-7008-8007.

Aleksey Mikhailovich Telegin, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of the Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: talex85@mail.ru

Received April 18, 2024. The final version – May 07, 2024.
