

Прямое измерение орбитальных параметров Стокса

А.В. Воляр¹, М.В. Брецько¹, С.И. Халилов¹, Я.Е. Акимова¹

¹ КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,
295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

Аннотация

В основе метода прямого измерения орбитальных параметров Стокса лежит аналогия со стандартным подходом к измерению поляризационных параметров Стокса структурированных пучков. В качестве четвертьволновой пластинки выступает цилиндрическая линза, а действие поляризатора ассоциируется с действием матричного оператора моментов интенсивности \mathbf{P} второго порядка на картину интенсивности структурированного пучка, снятую перед цилиндрической линзой и в плоскости двойного фокуса. Использовались физически измеряемые элементы симплектической 4D-матрицы \mathbf{P} , а именно, элементы 2D-субматрицы \mathbf{W} . Процесс измерений предполагает только два снимка распределения интенсивности, компьютерная обработка которых позволяет вычислить шесть ключевых компонент искомых параметров. Вычисление первых двух орбитальных параметров Стокса S_1 и S_2 предполагает компьютерную обработку первого снимка картины интенсивности перед цилиндрической линзой. Третий орбитальный параметр Стокса S_3 вычисляется при компьютерной обработке второго снимка картины интенсивности в плоскости двойного фокуса как разность недиагональных элементов субматрицы \mathbf{W} в направлениях $\phi = \pi/4$ и $-\phi = \pi/4$. Основанием к такому выбору подхода к измерению параметра S_3 является обнаруженный нами принцип взаимности между орбитальным угловым моментом исследуемого пучка и недиагональными элементами W_{xy} в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Полученные экспериментальные результаты хорошо согласуются с компьютерным моделированием, а также с результатами других авторов.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, орбитальная сфера Пуанкаре, структурированный свет, моменты интенсивности второго порядка.

Цитирование: Воляр, А.В. Прямое измерение орбитальных параметров Стокса / А.В. Воляр, М.В. Брецько, С.И. Халилов, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 5. – С. 715-722. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1655.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Direct measurement of Stokes orbital parameters. Computer Optics 2025; 49(5): 715-722. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1655.

Введение

За последние 30 лет особый интерес ученых сфокусировался как на геометрических, так и на векторных свойствах пучков Эрмита–Гаусса (ЭГ), Лагерра–Гаусса (ЛГ), Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ), на вихревых пучках Айнса–Гаусса, а также на связи между ними [1–12]. В этой статье мы взглянем в скрытую геометрию структурированных вихревых пучков, позволяющую измерять их основные характеристики. Предложенное Паджеттом и Кортиэлом [13] отображение состояний простейшего ЭЛГ-пучка на сферу Пуанкаре, выявляющее его скрытую геометрию, было подкреплено операторным представлением ван Энка [14] и интерпретировано в терминах орбитальных параметров Стокса Алиевой и Бастиансом [15]. Детальные теоретические исследования отображений однопараметрических ЭЛГ-пучков высших порядков [9] на орбитальную сферу Пуанкаре показало, что вариация их управляющего параметра всегда отображается в виде единственной плоской траектории, очерченной вдоль главного меридиана сферы [3, 4]. Тем не менее Калво [16] удалось преодолеть это препятствие и превратить плоскую траекторию в пространственную

кривую за счет изменения состояний ЭЛГ-пучка с помощью призмы Дове. Именно вращение призмы Дове, угол поворота которой следует рассматривать как второй управляющий параметр, обеспечивает движение вдоль экватора сферы. С другой стороны, пространственный характер траектории на сфере Пуанкаре непосредственно связан с управляемой геометрической фазой [17], играющей роль дополнительной степени свободы структурированного пучка. Недавно мы показали [18], что структурированный пучок Лагерра–Гаусса (сЛГ) [19] отображается в виде сложной пространственной траектории при плавной вариации управляющего параметра пучка. Однако все выше рассмотренные исследования скрытой геометрии структурированных пучков носят исключительно теоретическую направленность, подкрепленную только компьютерным моделированием. Поэтому на первый план сейчас выдвигается проблема непосредственного экспериментального измерения орбитальных параметров Стокса.

Прежде всего, отметим, что наиболее надежным подходом к измерению всех параметров параксиальных лазерных пучков является метод моментов интенсивности второго порядка [20]. В общем случае из 16 элемен-

тов симплектической 4D-матрицы моментов интенсивности второго порядка \mathbf{P} независимыми являются только десять элементов [21], которые можно измерить, используя систему из цилиндрических и сферических линз. Число элементов задается симметрией пучка. Например, в ряде простых случаев структурно устойчивые сЛГ-пучки имеют только четыре независимых параметра за счет связи между экспериментально измеряемым W_{xy} элементом и орбитальным угловым моментом (ОУМ) матрицы \mathbf{P} [22]. В этой статье мы распространим метод матрицы моментов интенсивности \mathbf{P} для структурно устойчивых пучков и продемонстрируем новый подход в измерении орбитальных параметров Стокса на основе только двух снимков картины интенсивности перед цилиндрической линзой и в ее двойном фокусе. Проведенные измерения мы сравним с результатами измерений на основе других независимых подходов и компьютерного моделирования.

1. Матрица моментов интенсивности второго порядка

Чтобы обосновать наш экспериментальный подход, определим сначала орбитальные параметры Стокса в терминах моментов интенсивности симплектической матрицы \mathbf{P} [22]

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J_{00}} \int \begin{pmatrix} \mathbf{r}\mathbf{r}^t & \mathbf{r}\mathbf{p}^t \\ \mathbf{p}\mathbf{r}^t & \mathbf{p}\mathbf{p}^t \end{pmatrix} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^t & \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & M_{x\xi} & M_{x\eta} \\ W_{xy} & W_{yy} & M_{y\xi} & M_{y\eta} \\ M_{x\xi} & M_{y\xi} & U_{\xi\xi} & U_{\xi\eta} \\ M_{x\eta} & M_{y\eta} & U_{\xi\eta} & U_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где радиус-вектор луча в пучке задается вектором $\mathbf{r} = (x \ y)^T$, а касательная к лучу – вектором $\mathbf{p} = (p_x \ p_y)^T$, T – знак транспонирования, $W(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ – функция Вигнера [23]. Непосредственно измеряются только элементы субматрицы \mathbf{W}

$$\begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{yy} \end{pmatrix}^T = \int (x^2 \ xy \ y^2)^T I(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2)$$

где $I(\mathbf{r})$ – распределение интенсивности в некоторой z -плоскости параксиального пучка. Субматрице \mathbf{W} соответствует характеристический эллипс [18]

$$W_{yy}x^2 + W_{xx}y^2 - 2W_{xy}xy = \det \mathbf{W}. \quad (3)$$

Если воспользоваться свойством симметрии вращения вектора пучка в 4D фазовом пространстве [15] и ввести вектор $(\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2)$ [22], приходим к эрмитовой 2D-матрице

$$\mathbf{P} = \frac{1}{J_{00}} \int_{\mathbb{R}^4} (\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2)(\mathbf{r} - i\mathbf{p}/2)^\dagger \times W(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{p} = \begin{pmatrix} S_0 + S_1 & S_2 + iS_3 \\ S_2 - iS_3 & S_0 - S_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где орбитальные параметры Стокса записываются в виде

$$\begin{aligned} S_0 + S_1 &= W_{xx} + U_{\xi\xi} / 4, & S_0 - S_1 &= W_{yy} + U_{\eta\eta} / 4, \\ S_2 &= W_{xy} + U_{\xi\eta} / 4, & S_3 &= (M_{x\eta} - M_{y\xi}) / 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Кроме того, совокупность параметров $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ является инвариантом оптической системы первого порядка.

С другой стороны, для наших дальнейших исследований потребуется и другой стандартный метод измерения поляризационных параметров Стокса и элементов симплектической эрмитовой матрицы когерентности векторных пучков (см. формулы (10.8.4) и (10.8.63а) в [24]). Для определения поляризационных параметров Стокса используется поляризатор с наклоном угла оси пропускания α и поляризационный компенсатор, вводящий разность фаз γ (для четвертьволновой пластинки $\gamma = \pi/2$), и шесть измерений интенсивности $I(\alpha, \gamma)$ по схеме

$$\begin{aligned} S_1^{pol} &= \langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \rangle = I(0, 0) - I(90^\circ, 0), \\ S_2^{pol} &= \langle 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y) \rangle = I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \\ S_3^{pol} &= \langle 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y) \rangle = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2). \end{aligned} \quad (6)$$

Предложенный нами метод измерений орбитальных параметров Стокса (5) базируется на аналогии с методом измерения поляризационных параметров Стокса (6) в рамках симплектической структуры поляризационной матрицы когерентности и эрмитовой орбитальной матрицы (4) [25]. Следуя этой аналогии, рассмотрим оптическую систему, содержащую только цилиндрическую линзу в плоскости $z=0$. Первые два орбитальных параметра Стокса определим посредством измерения W_{xx} , W_{yy} и W_{xy} элементов субматрицы \mathbf{W} в плоскости $z=0$ перед цилиндрической линзой, играющих роль поляризатора. В нашем скалярном случае они записываются как

$$\begin{aligned} S_1 &= W_{xx}(z=0) - W_{yy}(z=0) = \\ &= \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} x^2 I(x, y, z=0) dx dy - \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &\left. - \int_{\mathbb{R}^2} y^2 I(x, y, z=0) dx dy \right), \\ S_2 &= W_{xy}(z=0) + W_{yx}(z=0) = \\ &= \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 I(x, y, z=0) dx dy - \right. \end{aligned} \quad (8)$$

$\left. - \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 I(x, y, z=0) dx dy \right)$, где J_{00} обозначает полную интенсивность пучка. Здесь аналогом интенсивности после поляризатора в

x - и y - направлениях являются квадраты радиусов перетяжки паракиального пучка вдоль x и y для S_1 параметра и квадраты радиусов перетяжки вдоль $\phi_1 = \pi/4$ и $\phi_1 = -\pi/4$ направлений для S_2 параметра. Очевидно, что такой подход измерения первых двух орбитальных параметров Стокса можно использовать как для устойчивых, так и для неустойчивых структурированных пучков. Чтобы определить метод измерения третьего орбитального параметра S_3 , рассмотрим в деталях преобразование структуры пучка после цилиндрической линзы.

2. Теоретическое обоснование метода измерения орбитальных параметров Стокса

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением только устойчивых структурированных пучков, т.е. таких структурированных пучков, моды которых имеют одинаковые исходные радиусы перетяжки ω_0 и одинаковые фазы Гуи. Как показано в работе [26], ОУМ устойчивого структурированного пучка зависит от произведения комплексных амплитуд $C_j^* C_{j+1}$ соседних мод по формуле

$$\ell_z = 2 \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)!(N-j)! \text{Im}(C_j^* C_{j+1}) / J_{00}, \quad (9)$$

где $N=2n+\ell$ для ЛГ-мод и $N=n+t$ для ЭГ-мод. В качестве характерного примера рассмотрим преобразование сЛГ-пучка с длиной Релея мод z_0 на цилиндрической линзе с фокусным расстоянием f . Его комплексная амплитуда записывается в виде [19]

$$sLG(\mathbf{r}|\varepsilon, \theta) = \sum_{j=0}^N C_j(\varepsilon, \theta) HG_{N-j,j}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где $HG_{N-j,j}(\mathbf{r}) = H_{N-j}(\sqrt{2}x)H_j(\sqrt{2}y)\exp(-x^2 - y^2)$, $H_m(\sqrt{2}x)$ – многочлен Эрмита, ε и θ – амплитудный и фазовый управляющие параметры сЛГ-пучка, явный вид амплитуд мод C_j можно найти в статьях [18, 19, 22] и сделана замена $(x, y) \rightleftharpoons (x/w, x/w)$, $Z \rightleftharpoons z/z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – длина Релея.

Заметим, что ЭГ-пучки являются собственными модами цилиндрической линзы [27]. Это свойство радикально изменяет как картину интенсивности пучка, так и распределение фаз собственных мод. Структурированный пучок становится неустойчивым при распространении вдоль z -оси. Если главные оси линзы ориентируются вдоль x - и y -осей, то компоненты ЭГ-мод $H_{N-j}(\sqrt{2}x)\exp(-x^2)$ и $H_j(\sqrt{2}y)\exp(-y^2)$ приобретают различным образом кривизну волнового фронта, радиусы пучка $\bar{w}_x(Z)$, $\bar{w}_y(Z)$ и фазы Гуи $\Gamma_x(Z)$ и $\Gamma_y(Z)$ [28]. Расчет показывает [22], что элементы субматрицы W записываются в виде

$$W_{xy} = (\bar{w}_x(Z)\bar{w}_y(Z)/2J_{00}) \times \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)!(j+1)! \text{Re}(C_j C_{j+1}^*), \quad (11)$$

$$W_{xx} = (\bar{w}_x^2(Z)/4J_{00}) \times \sum_{j=0}^N (2N-2j+1)(N-j)!j!|C_j|^2, \quad (12)$$

$$W_{yy} = (\bar{w}_y^2(Z)/4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2j+1)(N-j)!j!|C_j|^2, \quad (13)$$

где $\bar{w}_x^2 = (1 - \kappa_x Z)^2 + Z^2$, $\bar{w}_y^2 = 1 + Z^2$,

$$C_k = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_k^{(n,n+1)} (\pi/4) c_k^{(N-k,k)}(0) \exp(i j \Gamma_{xy}), \quad (14)$$

$$\Gamma_x = \arg(1 + iZ),$$

$$\Gamma_y = \arg(1 - (\kappa_x - 1)_x Z),$$

$$\kappa_x = z_0 / f,$$

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y.$$

Особенности преобразования сЛГ-пучка, прошедшего цилиндрическую линзу, лучше всего наблюдать в комплексе преобразований спектра фаз и амплитуд пучка, преобразования его ОУМ и картины взаимной интенсивности W_{xy} для x - и y - направлений в сочетании с отображением состояний пучка на сферу Пуанкаре, представленной на рис. 1. Как видно из диаграммы, спектр мод амплитуд рис. 1а не изменяется при распространении, т.е. перекрестная связь между x - и y -составляющими мод не происходит. Однако резко изменяется спектр фаз (см. рис. 1б), поскольку собственные ЭГ-моды структурированного пучка имеют различную кривизну волнового фронта в x - и y -направлениях, а следовательно, приобретающие различные фазы Гуи Γ_x и Γ_y . Это сопровождается радикальными преобразованиями картины интенсивности (рис. 1в), что сразу проявляется в быстром изменении ОУМ и моменте взаимной интенсивности $W_{xy}(\theta, Z)$ на рис. 1з, д. Мы видим, что формы зависимостей $\ell_z(\theta, Z)$ и $W_{xy}(\theta, Z)$ переходят друг в друга: ОУМ $\ell_z(\theta, Z=0)$ перед цилиндрической линзой преобразуется во взаимной интенсивности $4W_{xy}(\theta, Z=1)$ в ее двойном фокусе, в то время как учетверенная взаимная интенсивность перед цилиндрической линзой превращается в ОУМ $4W_{xy}(\theta, Z=0) \rightarrow \ell_z(\theta, Z=1)$ в ее двойном фокусе. Такую взаимность преобразований легко понять, если сравнить зависимости $\ell_z(\theta, Z)$ и $W_{xy}(\theta, Z)$ в соотношениях (9) и (11). Они различаются только операциями $\ell_z(\theta, Z) \rightarrow \text{Im}(C_j^* C_{j+1})$ и $W_{xy}(\theta, Z) \rightarrow \text{Re}(C_j^* C_{j+1})$. Но амплитуды ЭГ-мод в (14) зависят от разности фаз Гуи $\Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y$. В плоскости двойного фокуса $Z=2f$ при условии $z_0=2f$ разность фаз Гуи между соседними модами в x - и y -направлениях равна $\Gamma_{xy} = \Gamma_x - \Gamma_y = (j+1)\pi/2 - j\pi/2 = \pi/2$ и не зависит от номера моды. Это значит, что имеет место преобразование $\ell_z(\theta, Z=0) \rightarrow 4W_{xy}(\theta, Z=2f)$ в плоскости $z_0=2f$ в выражениях (9) и (11). Такое взаимное дополнение ОУМ и момента взаимной интенсивности $4W_{xy}$ мы

назвали *принципом взаимности*. Именно принцип взаимности позволяет нам измерять третий орбитальный параметр Стокса, равный ОУМ, по формуле

$$S_3 = \ell_z = \frac{1}{J_{00}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (x+y)^2 I(x, y, Z=2f) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 I(x, y, Z=2f) dx dy \right) \quad (15)$$

На первый взгляд, *принцип взаимности* выглядит несколько «парадоксально». Действительно, ОУМ задается мнимой частью произведения модовых амплитуд $C_j^* C_{j+1}$ соседних мод в (9), но его можно вычислить по формуле (11), как действительная часть произведения $C_j^* C_{j+1}$ амплитуд. Но здесь не стоит забывать, что набег разности фаз Гуи в неоднородной волне после цилиндрической линзы вносит такие коррективы (см. например, работу [22] и ссылки в ней). Такая замена мнимой и действительной части дает простое вращение траектории как единое целое состояний пучка на орбитальной сфере Пуанкаре.

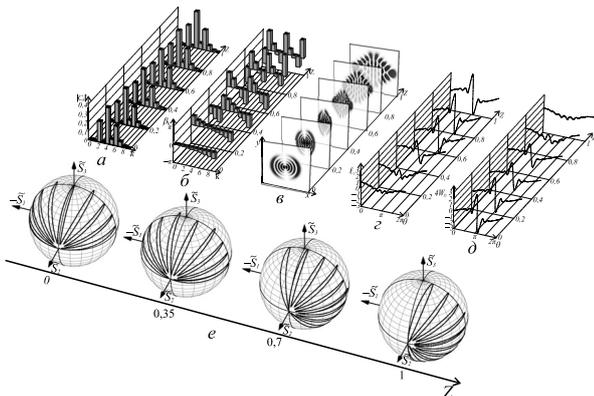


Рис. 1. Модель эволюции астигматического преобразования сЛГ-пучка с $(n; \ell=4; 1)$, $z_0=1$ м и $(\varepsilon; \theta=1; 0,8\pi)$ при прохождении через цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием $f=0,5$ м; (а) спектры квадрата модуля амплитуды и (б) фаз мод ЭГ, соответствующих всплеску ОУМ при $z=2f$; (в) эволюция распределения интенсивности сЛГ-пучка вдоль оси $Z=z/z_0$; (г) преобразование ОУМ $\ell_z(\theta)$ и (д) перекрестного момента интенсивности $4W_{xy}$ сЛГ-пучка вдоль оси Z ; (е) преобразования пространственного отображения состояний сЛГ-пучка на сфере Пуанкаре вдоль оси Z

Геометрическую интерпретацию принципа взаимности иллюстрирует вращение отображения состояний пучка на орбитальной сфере Пуанкаре по мере его распространения после цилиндрической линзы до плоскости $Z=1$ на рис. 1е. Если цилиндрическую линзу повернуть на $\pi/2$, то вращение отображения на сфере происходит вокруг оси S_2 . В общем случае произвольного угла поворота линзы ось вращения будет лежать в плоскости S_1S_2 . В обоих случаях циклическое изменение фазового параметра θ сопровождается изменением ОУМ. Чтобы вызвать вращение отображения только вокруг оси S_3 без изменения

ОУМ, следует использовать вращение призмы Дове, помещенной перед цилиндрической линзой без изменения направления ее осей.

3. Эксперимент

Основная задача этого параграфа заключается в разработке экспериментального метода прямых измерений орбитальных параметров Стокса для отображения состояний устойчивых структурированных пучков на орбитальной сфере Пуанкаре. Простота экспериментального подхода опирается на использование только двух снимков картины интенсивности с их последующей компьютерной обработкой для вычисления параметров в выражениях (7), (8) и (15).

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 5 в нашей недавней статье [18], а методика дополнительных измерений спектра ЭГ-мод (амплитуд и фаз) также неоднократно обсуждалась в наших статьях [22, 29]. Поэтому основное внимание мы сосредоточим именно на методе прямого измерения орбитальных параметров Стокса. Их измерения осуществлялись в прямом оптическом плече экспериментальной установки таким образом, чтобы фотодетектор CMOS2 располагался в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы. Фокусное расстояние цилиндрической линзы $f=0,5$ м и радиус перетяжки гауссова пучка w_0 при формировании цифровой голографической решетки на модуляторе SLM выбирались таким образом, чтобы длина Релея была равна удвоенному фокусному расстоянию $z_0=2f=1$ м. Для определения орбитальных параметров Стокса требуется только два снимка картины интенсивности перед цилиндрической линзой (в фокусе сферической линзы) и в плоскости ее двойного фокуса. Компьютерная обработка изображений в соответствии с формулами (2), (7), (8) и (15) позволяет вычислить искомые параметры. Предварительная обработка этих снимков, а также коррекция точечных дефектов фоточувствительного элемента CMOS-камеры позволяет существенно уменьшить погрешность измерений. Также важно выполнить точное сопряжение апертуры (размеров) пучка с размерами компьютерно-синтезированной голограммы на SLM-модуляторе. Высокая воспроизводимость результатов экспериментальных измерений была достигнута благодаря использованию SLM-модулятора типа Thorlabs EXULUS-4K1/M, который позволяет формировать пучки, содержащие до 150 мод благодаря высокому разрешению его ПЗС-матрицы. Для детектирования картин интенсивности мы использовали два металлооксид-полупроводниковых устройства CMOS1, 2 (Michrome 20). Кроме того, высокая точность настройки плоскости регистрации пучка после цилиндрической линзы CL потребовала точных перемещений сферической линзы S4, которая достигалась с помощью 6D оптических столиков с 3D-перемещениями и 3D-вращениями (Thorlabs

“МАХ603D”). Погрешность измерения спектра ЭГ-мод $|C_k|^2$ и разности фаз β_k во втором плече установки составляла около 5–6%, в то время как измерение параметров Стокса сопровождалось ошибкой измерений в первом плече установки, не превышающей 4%, поскольку не требовалось измерение спектра мод. Для измерений было выбрано два семейства двухпараметрических устойчивых структурированных пучков, а именно, сЛГ-пучки и биномиальные пучки.

3.1. Структурированные сЛГ-пучки и их асимптотики

Для измерений параметров сЛГ-пучков были выбраны две группы квантовых чисел 1) $n=4, \ell=1$ и 2) $n=6, \ell=1$ для амплитудных параметров $\varepsilon=1$ и $\varepsilon=10^4$. Вариация фазового θ -параметра в интервале $\theta=(0, 2\pi)$ с шагом $\Delta\theta=\pi/60$ позволяла корректно отобразить траекторию состояний пучка на сфере с учетом поведения ее лепестков. Средняя квадратичная ошибка измерений орбитального углового момента $S_3 = \ell_z$ вычислялась в соответствии с подходом, представленным в статье [30], и не превышала 5% на рис. 2. Для сравнения проводились измерения спектра ЭГ-мод во втором плече экспериментальной установки методом моментов интенсивности высших порядков [22, 29]. Ошибка этих измерений спектра мод достигала 7%, что было существенно больше, чем ошибка измерений орбитальных параметров Стокса, что указывает на хорошее согласование с нашими прежними измерениями в статье [18].

Чтобы перейти к измерению асимптотических состояний сЛГ-пучка, заметим, что комплексная амплитуда может быть записана в форме [31]:

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}|\varepsilon, \theta) = LG_{n,\ell}(\mathbf{r}) + \varepsilon \frac{i^{n-\ell} \exp\left(i\left(\frac{2n+\ell}{2}\theta - \frac{3\pi}{4}\ell\right)\right)}{2^{n-\ell} n!} \times (16) \\ \times HLG_{n,n+\ell}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right).$$

При малом амплитудном параметре $\varepsilon \sim 1$ вклад в орбитальные параметры Стокса дают оба члена соотношения (16), что приводит к сложной многолепестковой траектории на рис. 2а, б. При больших амплитудных параметрах $\varepsilon \gg 1$ основной вклад дает второй член в (16), который соответствует гибриднему ЭЛГ-пучку [9], повернутому на $-\pi/4$. Как мы отмечали ранее, состояния однопараметрического ЭЛГ-пучка отображаются в виде плоской траектории вдоль меридиана на орбитальной сфере Пуанкаре. Как раз такую форму траектории очерчивают экспериментальные точки на рис. 2в, г.

3.2. Обобщенные биномиальные пучки

В последнее время большой интерес вызвали биномиальные однопараметрические структурированные пучки, поскольку они могут переносить ЭГ-моды

с большим ОУМ [26, 32]. Чтобы расширить область их возможных ОУМ-состояний, мы добавили еще один независимый параметр и переписали формулу (3) для комплексной амплитуды при $z=0$ из статьи [32] в обобщенной форме

$$sBi_N(\mathbf{r}|\varepsilon, \theta) = \frac{i^N e^{-(x^2+y^2)}}{(1+\varepsilon^2)^{N/2}} \times (17) \\ \times \sum_{k=0}^N \frac{(\varepsilon^k e^{ik\theta}) N!}{k!(N-k)!} H_k(\sqrt{2}x) H_{N-k}(\sqrt{2}y),$$

где $(x, y) \leftrightarrow (x/w_0, y/w_0)$, ε и θ , как и прежде, представляют амплитудный и фазовый параметры соответственно. Выражение (17) совпадает с комплексной амплитудой (3) в [32] при $\theta = \pi/2$.

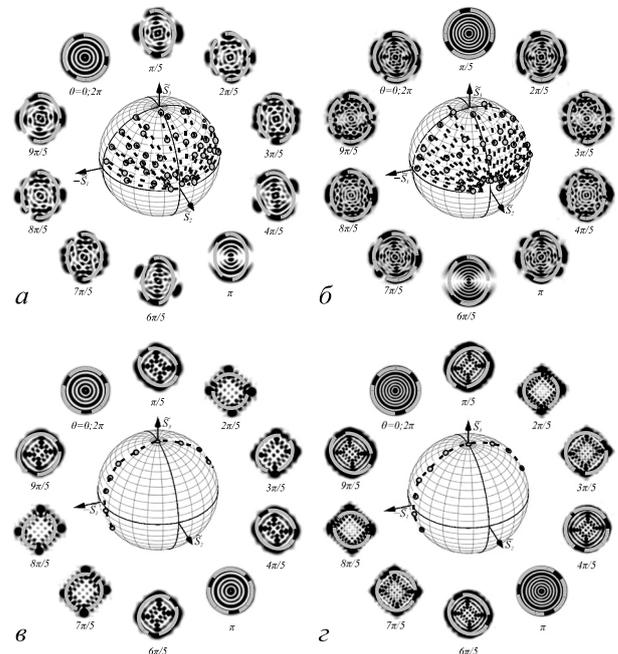


Рис. 2. Экспериментально полученные кривые отображения сЛГ-пучков на орбитальной сфере Пуанкаре; (а, в) $(n, \ell = 4, 1), \varepsilon = 1$; (б, г) $(n, \ell = 6, 1), \varepsilon = 10^4$. Каждая орбитальная сфера Пуанкаре сопровождается экспериментальными картинками интенсивности с соответствующими точками на сфере. На фоне каждого распределения интенсивности серой пунктирной линией приведены экспериментальные ассоциированные эллипсы субматрицы W

Такие двухпараметрические волновые конструкции мы назвали обобщенными структурированными биномиальными пучками (сБи). Изменения параметров ε и θ существенно изменяют состояния сБи-пучка на рис. 3а, б, в частности, характеристические эллипсы на фоне картин интенсивности, испытывающие трансформации при изменении фазового θ -параметра, но при постоянно амплитудном ε -параметре. Аналогичные преобразования наблюдаются на рис. 3в, г при изменении ε -параметра, но постоянном θ -параметре. Скрытая геометрия структурированных

сБи-пучков проявляется в новом свете при отображении их состояний на орбитальную сферу Пуанкаре на рис. 4а – в. Гармоническое изменение ОУМ S_3 параметра при изменении θ -параметра, но постоянном ε -параметре на рис. 4б отображается семейством пространственных эллипсоподобных траекторий вокруг оси $S_2 > 0$ (при $\varepsilon > 0$) на сфере Пуанкаре. Изменение знака ε -параметра ($\varepsilon < 0$) сопровождается зеркальным отражением эллипсоподобных траекторий относительно плоской траектории для $\varepsilon = 0$ в отрицательную область $S_2 < 0$. Следует заметить, что плоская траектория $S_2 = 0$ вдоль главного меридиана с $\varepsilon = 1$ на рис. 4б совпадает с траекторией с $\varepsilon = -1$, но имеет противоположное направление обхода. Несколько иной характер приобретают зависимости ОУМ $S_3(\varepsilon) = \ell_z(\varepsilon)$ на рис. 4а при постоянном θ -параметре, где наблюдаются резкие всплески S_3 вблизи с изменением знака при $\varepsilon = 0$. Кстати, кривая на рис. 3в с $\theta = \pi/2$ в области $\varepsilon > 0$ совпадает с аналогичной кривой на рис. 2 в работе [32]. Всего семейства состояний сБи-пучка при вариации ε -параметра, но постоянных θ -параметрах отображается в семейство плоских траекторий вдоль меридианов с узлами с точках $S_2 = \pm 1$, которые могут быть получены вращением траектории с $\theta = 0$ вокруг оси S_2 . Экспериментальные точки вблизи траекторий на сфере на рис. 4б, в хорошо согласуются как с нашими вычислениями, так и с компьютерным моделированием других авторов.

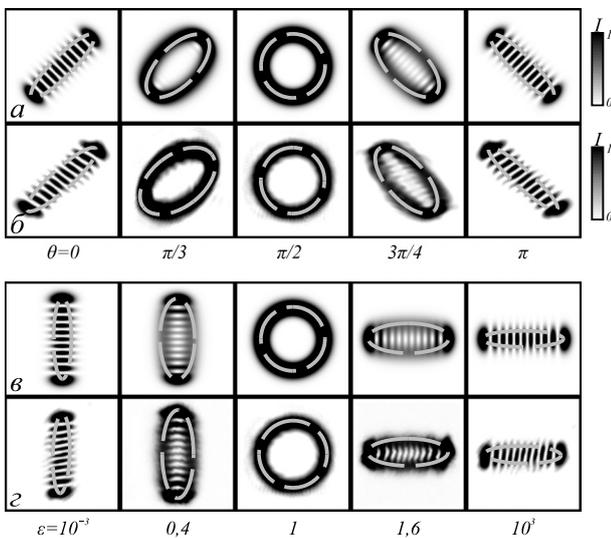


Рис. 3. Картины распределения интенсивности сБи-пучка; (а, в) моделирование, (б, г) экспериментально полученные картины интенсивности; (а, б) $N = 10$, $\varepsilon = 1$ при вариации параметра θ ; (в, г) $N = 10$, $\theta = \pi/2$ при вариации параметра ε . На фоне распределения интенсивности отображены серой пунктирной линией ассоциированные эллипсы субматрицы W

4. Обсуждение и выводы

В основе метода прямого измерения орбитальных параметров Стокса лежит аналогия со стандартным подходом к измерению поляризационных параметров

Стокса структурированных пучков. В качестве поляризационных компонент светового пучка выбраны физически измеряемые элементы симплектической 4D-матрицы моментов интенсивности второго порядка P , а именно, элементы 2D-субматрицы W . Процесс измерений предполагает только два снимка распределения интенсивности, компьютерная обработка которых позволяет вычислить шесть ключевых компонент искомых параметров. Вычисление первых двух орбитальных параметров Стокса S_1 и S_2 предполагает компьютерную обработку первого снимка картины интенсивности перед цилиндрической линзой. Так, параметр $S_1 = W_{xx} - W_{yy}$ задается разностью квадратов радиусов перетяжек вдоль x - и y -направлений, а параметр $S_2 = W_{xy} - W_{yx}$ определяется разностью квадратов перетяжек вдоль направлений $\phi_1 = \pi/4$ и $\phi_2 = -\pi/4$. Вычисление третьего параметра S_3 осуществляется на основе второго снимка картины интенсивности в плоскости двойного фокуса линзы при условии равенства $z_0 = 2f$ между длиной Релея структурированного пучка и удвоенным фокусом цилиндрической линзы. Заметим, что третий орбитальный параметр Стокса равен ОУМ пучка на фотон. Такой выбор геометрии процесса измерений требует пояснений.

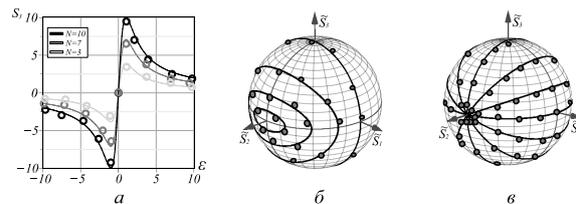


Рис. 4. Отображение биномиального пучка на орбитальную сферу Пуанкаре с изменением параметров. (а) Зависимость ОУМ S_3 от амплитудного параметра ε , но разных фазовых параметров θ ; (б) отображение кривой сБи-пучка при циклическом изменении фазового параметра θ , но разных амплитудных параметрах ε ; (в) кривой сБи-пучка с изменением амплитудного параметра, но разных фазовых параметров θ . Кружки на графике и сферах соответствуют экспериментальным точкам, сплошные кривые на сфере Пуанкаре – теория, $N = 10$

Используя методы компьютерного моделирования и симплектических методов преобразования 4D ABCD-матрицы и 4D-матрицы моментов интенсивности второго порядка, мы исследовали эволюцию орбитальных параметров Стокса структурированных пучков с последующим отображением эволюции на орбитальную сферу Пуанкаре. При этом мы сравнивали преобразование ОУМ $\ell_z(\theta)$ и недиагонального элемента $W_{xy}(\theta)$ при распространении от цилиндрической линзы до плоскости ее двойного фокуса. Было обнаружено, что зависимость ОУМ $\ell_z(\theta, Z=0)$ от управляющего фазового θ -параметра преобразуется в зависимость $4W_{xy}(\theta, Z=2f)$ и наоборот, зависимость $4W_{xy}(\theta, Z=2f)$ преобразуется в зависимость $\ell_z(\theta, Z=2f)$. Отображение на орбитальной сфере Пуанкаре заключается в повороте траектории на $\pi/2$ вокруг оси S_2 без изменения формы траектории. Такое

взаимное преобразование ОУМ и физически измеряемого элемента W_{xy} было названо *принципом взаимности*. Таким образом, третий орбитальный параметр Стокса S_3 вычисляется при компьютерной обработке второго снимка картины интенсивности в плоскости двойного фокуса как разность недиагональных элементов в направлениях $\phi_1 = \pi/4$ и $\phi_2 = -\pi/4$, т.е. $S_3(Z=2f) = W_{xy}(\phi_1 = \pi/4) - W^{xy}(\phi_2 = -\pi/4)$.

Для экспериментальной проверки представленных теоретических положений мы измеряли орбитальные параметры Стокса для двух групп двухпараметрических параксиальных пучков: структурированных пучков Лагерра–Гаусса и структурированных биномиальных пучков, и сравнивали их с результатами компьютерного моделирования и результатами других независимых авторов. Было получено хорошее согласование между экспериментом и компьютерным моделированием, а также с результатами других авторов.

Благодарности

Мы благодарим Е.Г. Абрамочкина за помощь в теоретическом обосновании метода измерений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №24-22-00278) в части «Теоретическое обоснование метода измерения орбитальных параметров Стокса» и «Матрица моментов интенсивности второго порядка».

References

- [1] Volyar AV, Shvedov VG, Fadeeva TA. The structure of a nonparaxial Gaussian beam near the focus: II. Optical vortices. *Opt Spectrosc* 2001; 90: 93-100. DOI: 10.1134/1.1343551.
- [2] Volyar AV, Fadeeva TA, Egorov YA. Vector singularities of Gaussian beams in uniaxial crystals: Optical vortex generation. *Tech Phys Lett* 2002; 28: 958-961. DOI: 10.1134/1.1526896.
- [3] Shen Yi, Meng Yu, Fu Xi, Gong M. Hybrid topological evolution of multi-singularity vortex beams: generalized nature for helical-Ince-Gaussian and Hermite-Laguerre-Gaussian modes. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(4): 578-587. DOI: 10.1364/JOSAA.36.000578.
- [4] Dennis MR, Alonso MA. Swings and roundabouts: optical Poincaré spheres for polarization and Gaussian beams. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci* 2017; 375(2087): 20150441. DOI: 10.1098/rsta.2015.0441.
- [5] He C, Shen Y, Forbes A. Towards higher-dimensional structured light. *Light Sci Appl* 2022; 11: 205. DOI: 10.1038/s41377-022-00897-3.
- [6] Volyar A, Shvedov V, Fadeyeva T, Desyatnikov AS, Neshev DN, Krolkowski W, Kivshar YuS. Generation of single-charge optical vortices with an uniaxial crystal. *Opt Express* 2006; 14(9): 3724-3729. DOI: 10.1364/OE.14.003724.
- [7] Shen Yi, Wang Zh, Fu Xi, Naidoo D, Forbes A. SU(2) Poincaré sphere: A generalized representation for multidimensional structured light. *Phys Rev A* 2020; 102: 031501(R). DOI: 10.1103/PhysRevA.102.031501.
- [8] Dennis MR, Alonso MA. Gaussian mode families from systems of rays. *J Phys Photonics* 2019; 1: 025003. DOI: 10.1088/2515-7647/ab011d.
- [9] Bastiaans MJ. Wigner distribution function and its application to first-order optics. *J Opt Soc Am* 1979; 69(12): 1710-1716. DOI: 10.1364/JOSA.69.001710.
- [10] Alekseev KN, Volyar AV, Fadeeva TA. Spin-orbit interaction and evolution of optical eddies in perturbed weakly directing optical fibers. *Opt Spectrosc* 2002; 93(4): 588-597. DOI: 10.1134/1.1517085.
- [11] Shen Yi, Yang Xi, Naidoo D, Fu Xi, Forbes A. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser. *Optica* 2020; 7(7): 820-831. DOI: 10.1364/OPTICA.382994.
- [12] Fatkhiev DM, Butt MA, Grakhova EP, Kutluyarov RV, Stepanov IV, Kazanskiy NL, Khonina SN, Lyubopytov VS, Sultanov AK. Recent advances in generation and detection of orbital angular momentum optical beams – A review. *Sensors* 2021; 21(15): 4988. DOI: 10.3390/s21154988.
- [13] Padgett MJ, Courtial J. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Opt Lett* 1999; 24(7): 430-432. DOI: 10.1364/OL.24.000430.
- [14] Van Enk SJ. Geometric phase, transformations of gaussian light beams and angular momentum transfer. *Opt Commun* 1993; 102: 59-64. DOI: 0.1016/0030-4018(93)90472-H.
- [15] Alieva T, Bastiaans MJ. Phase-space rotations and orbital Stokes parameters. *Opt Lett* 2009; 34(4): 410-412. DOI: 10.1364/OL.34.000410.
- [16] Calvo GF. Wigner representation and geometric transformations of optical orbital angular momentum spatial modes. *Opt Lett* 2005; 30(10): 1207-1209. DOI: 10.1364/OL.30.001207.
- [17] Berry MV. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc R Soc Lond A* 1984; 392: 45-57. DOI: 10.1098/rspa.1984.0023.
- [18] Volyar A, Bretsko M. Mapping structured Laguerre-Gaussian beam states onto the orbital Poincaré sphere in the form of controllable spatial trajectories. *J Opt Soc Am A* 2024; 41(9): 1648-1655. DOI: 10.1364/JOSAA.529894.
- [19] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Ya, Bretsko M. Control of the orbital angular momentum via radial numbers of structured Laguerre-Gaussian beams. *Opt Lett* 2022; 47(10): 2402-2405. DOI: 10.1364/OL.459404.
- [20] ISO 11146-2:2021. Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 2: General astigmatic beams. Geneva, Switzerland: ISO; 2021.
- [21] Nemes G, Siegman AE. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J Opt Soc Am A* 1994; 11(8): 2257-2264. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002257.
- [22] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Ya. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach. *Photonics* 2024; 11(3): 191. DOI: 10.3390/photonics11030191.
- [23] Weber H, Herziger G, Poprawe R. Laser physics and applications. Subvolume A: Laser fundamentals. Berlin: Springer; 2004. ISBN: 978-3-540-44821-1.
- [24] Born M, Wolf E. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. ISBN: 0-521-64222-1.
- [25] Guillemin V, Sternberg S. Symplectic techniques in physics. Cambridge University Press; 1984. ISBN: 0-521-38990-9.
- [26] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(6): 1061-1065. DOI: 10.1364/JOSAA.457660.

- [27] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [28] Luneburg RK. *Mathematical theory of optics*. Berkeley: University of California Press; 1966. ISBN: 978-0520007802.
- [29] Volyar A, Abramochkin E, Egorov Y, Bretsko M, Akimova Y. Fine structure of perturbed Laguerre–Gaussian beams: Hermite–Gaussian mode spectra and topological charge. *Appl Opt* 2020; 59(25): 7680-7687. DOI: 10.1364/AO.396557.
- [30] Letsch A, Giesen A. Characterization of general astigmatic laser beams. *Proc SPIE* 2006; 6101: 610117. DOI: 10.1117/12.645866.short.
- [31] Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Can the radial number of vortex modes control the orbital angular momentum? *Computer Optics* 2022; 46(6): 853-863. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1169.
- [32] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite–Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.

Сведения об авторах

Воляр Александр Владимирович – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика.

E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Брецько Михаил Владимирович – кандидат физико-математических наук (2022), старший преподаватель кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика.

E-mail: mihailbretcko4@gmail.com

Халилов Сервер Искандарович – ассистент кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Акимова Яна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: akimova.yana@yandex.ru

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 15 декабря 2024 г. Окончательный вариант – 18 января 2025 г.

Direct measurement of Stokes orbital parameters

A.V. Volyar¹, M.V. Bretsko¹, S.I. Khalilov¹, Y.E. Akimova¹

¹Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
Prospekt Akademika Vernadskogo 4, Simferopol, 295007, Republic of Crimea, Russia

Abstract

The method of direct measurement of the Stokes orbital parameters is based on the analogy with the standard approach to measuring the Stokes polarization parameters of structured beams. A cylindrical lens serves as a quarter-wave plate, and the action of the polarizer is associated with the action of the matrix operator of the moments of intensity \mathbf{P} of the second order on the intensity pattern of the structured beam, taken in front of the cylindrical lens and in the double focus plane. Physically measurable elements of the symplectic 4D matrix \mathbf{P} are used, namely, the elements of the 2D submatrix \mathbf{W} . The measurement process involves only two snapshots of the intensity distribution, the computer processing of which allows calculating six key components of the sought parameters. Calculation of the first two Stokes orbital parameters S_1 and S_2 involves computer processing of the first snapshot of the intensity pattern in front of the cylindrical lens. The third Stokes orbital parameter S_3 is calculated during computer processing of the second snapshot of the intensity pattern in the double focus plane as the difference between the off-diagonal elements of the submatrix \mathbf{W} in the $\phi_1 = \pi/4$ and $\phi_1 = -\pi/4$ directions. The basis for such a choice of an approach to measuring the parameter S_3 is the principle of reciprocity, discovered by us, between the orbital angular momentum of the beam under study and the off-diagonal elements W_{xy} in the plane of the double focus of the cylindrical lens. The experimental results obtained are in good agreement with computer modeling, as well as with the results of other authors.

Keywords: orbital angular momentum, orbital Poincare sphere, structure light, second-order intensity moments.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. Direct measurement of Stokes orbital parameters. *Computer Optics* 2025; 49(5): 715-722. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1655.

Acknowledgements: This work was partly funded by the Russian Science Foundation under project No. 24-22-00278 (Sections “Theoretical justification of a method of measuring Stokes orbital parameters” and “Second order intensity moment matrix”).

Author's information

Alexander Vladimirovich Volyar, (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Mikhail Vladimirovich Bretsko, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. Co-author of about 50 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics. E-mail: mihailbretcko4@gmail.com

Server Iskandarovich Khalilov, (b. 1994) assistant of Business Informatics and Mathematical Modeling department of the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky. Research interests: singular optics, laser physics. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Yana Evgenievna Akimova, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her Ph. D. in Physics in 2022. Co-author of about 50 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics. E-mail: akimova.yana@yandex.ru

Received December 15, 2024. The final version – January 18, 2025.
