

Орбитальный угловой момент и топологический заряд структурно-устойчивых лазерных пучков

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.М. Телегин²

¹ Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе рассмотрены различные типы структурно-устойчивых параксиальных лазерных пучков с конечным числом нулей интенсивности. Подробно исследованы структурно-устойчивые пучки, комплексная амплитуда которых представляет собой комплексный многочлен степени n с гауссовой огибающей. Получено выражение для орбитального углового момента таких пучков, и показано, что при произвольных комплексных коэффициентах многочлена топологический заряд равен степени многочлена n . В качестве примера рассмотрен вращающийся пучок Лагерра–Гаусса, топологический заряд которого равен радиальному индексу многочлена Лагерра. Все нули интенсивности лежат на прямой справа от оптической оси и поворачиваются против часовой стрелки на угол $\pi/2$ при распространении пучка в свободном пространстве.

Ключевые слова: структурно-устойчивый пучок, орбитальный угловой момент, топологический заряд.

Цитирование: Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент и топологический заряд структурно-устойчивых лазерных пучков / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2025. – Т. 49, № 6. – С. 940-946. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1676.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Orbital angular momentum and topological charge of structurally stable laser beams. Computer Optics 2025; 49(6): 940-946. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1676.

Введение

Структурно-устойчивые лазерные пучки (СУЛП) интересны тем, что при своем распространении в свободном пространстве они сохраняют структуру распределения интенсивности в своем сечении, изменяются только в масштабе и могут вращаться вокруг оптической оси [1–3]. Вихревые лазерные пучки являются частным случаем СУЛП [4]. Интерес к исследованию СУЛП вызван тем, что они широко используются на практике в задачах беспроводной телекоммуникации [5], манипулирования микрообъектами [6], оптической микроскопии [7] и квантовой информатике [8]. В оптике известны различные варианты описания СУЛП. Например, описываются они, как спиральные лазерные пучки, с помощью аналитической функции с вихревым аргументом $x+iy$ [9], с помощью произведения нулей интенсивности [10], в виде суперпозиции мод Лагерра–Гаусса [11] или Эрмита–Гаусса [12]. Среди структурно-стабильных пучков есть пучки, интенсивность в сечении которых вращается, когда пучки распространяются в свободном пространстве [13, 14]. А есть структурно-стабильные пучки, которые распространяются без вращения, изменяясь только в масштабе [15]. СУЛП могут нести орбитальный угловой момент (ОУМ) [16, 17] и топологический заряд (ТЗ) [18, 19]. Однако не для всех типов СУЛП найдены аналитические формулы для расчета ОУМ и

ТЗ при любых комплексных коэффициентах в суперпозициях. Например, ОУМ для СУЛП в виде суперпозиции мод Эрмита–Гаусса найден в [20], а для суперпозиции мод Лагерра–Гаусса найден в [21]. Но для этих суперпозиций нельзя найти топологический заряд при любых весовых коэффициентах. И наоборот, если представить СУЛП в виде произведения множителей, задающих местоположение нулей интенсивности, то топологический заряд такого пучка будет равен числу его нулей интенсивности, с учетом их вырожденности [22]. Но ОУМ такого пучка аналитически найти затруднительно.

В данной работе мы рассматриваем новый тип СУЛП, комплексная амплитуда которых является многочленом конечной степени с произвольными комплексными коэффициентами и с гауссовой огибающей. ТЗ такого семейства пучков равен степени многочлена, а для ОУМ получено выражение, справедливое для произвольных коэффициентов. Рассмотрен также пример СУЛП, который назван вращающимся пучком Лагерра–Гаусса (ЛГ). Его ТЗ равен радиальному индексу многочлена Лагерра, зависящему от радиальной переменной, а все нули интенсивности расположены на прямой линии, исходящей из оптической оси, и находятся только с одной стороны от оптической оси. Эти нули вращаются вместе с распределением интенсивности, когда пучок распространяется в свободном пространстве.

1. Разные типы структурно-устойчивых лазерных пучков

В [23] показано, что комплексная функция вида

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{q(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)}\right) f\left(\frac{re^{i\varphi}}{wq(z)}\right), \quad (1)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, w – радиус перетяжки гауссова пучка, $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = \pi w^2/\lambda$ – расстояние Рэлея, λ – длина волны, $f(x \pm iy)$ – произвольная целая аналитическая функция, которая является решением парааксиального уравнения Гельмгольца:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

В (2) (x, y, z) – декартовы координаты, k – волновое число монохроматического света. В общем случае функция $f(x)$ может иметь счетное число нулей (корней) и тогда ТЗ пучка (1) будет бесконечный. Такие пучки с бесконечным ТЗ рассматривались, например, в [24]. Поэтому ограничимся далее рассмотрением структурно-инвариантных пучков (1) с конечным числом нулей интенсивности:

$$E_n(r, \varphi, z) = \frac{1}{q(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)}\right) \times \prod_{m=1}^n \left(\frac{re^{i\varphi}}{wq(z)} - \frac{r_m e^{i\varphi_m}}{w}\right), \quad (3)$$

где (r_m, φ_m) – полярные координаты нулей интенсивности в начальной плоскости. Световое поле (3) имеет n простых (невыврожденных) комплексных нулей, и поэтому его ТЗ равен n . Действительно, если подставить выражение (3) в формулу М. Берри для расчета ТЗ [25]:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{E(r, \varphi, z)} \cdot \frac{\partial E(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} d\varphi \right\}, \quad (4)$$

где Im – мнимая часть числа, \lim – предел при стремлении радиальной переменной r к бесконечности, то получим, что $TC = n$ [26].

Световые поля (1) и (3) структурно устойчивы, так как при распространении в свободном пространстве вдоль оптической оси z распределение интенсивности в поперечном сечении сохраняет свой вид, изменяясь только масштабно (пучок расходится) и вращаясь вокруг оптической оси. Действительно, из (3) видно, что нули интенсивности при распространении пучка будут удаляться от оптической оси и поворачиваться против часовой стрелки согласно уравнениям:

$$\begin{cases} r_m(z) = r_m \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\ \varphi_m(z) = \varphi_m + \text{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right). \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) видно, что нули интенсивности удаляются от оптической оси с ростом z так же, как и увеличивается радиус гауссова пучка:

$$w(z) = w|q(z)| = w \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}. \quad (6)$$

Другой тип структурно-устойчивых лазерных пучков описывается комплексной амплитудой в виде суперпозиции мод Эрмита–Гаусса (ЭГ) со специально подобранными индексами [26]:

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{q(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)}\right) e^{-in\psi(z)} \times \sum_{m=0}^n C_m H_{n-m}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w|q(z)|}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w|q(z)|}\right), \quad (7)$$

где $\psi(z) = \text{arctg}(z/z_0)$ – фаза Гоу, C_k – произвольные комплексные коэффициенты, $H_m(x)$ – многочлены Эрмита. Орбитальный угловой момент семейства пучков (7) можно найти по общей формуле, полученной в [27]:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{2 \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)!(n-m)! \text{Im}(C_m^* C_{m+1})}{\sum_{m=0}^n m!(n-m)! |C_m|^2}, \quad (8)$$

где J_z – продольная проекция вектора ОУМ скалярного поля (7), W – мощность (энергия) пучка (7). Топологический заряд для любых коэффициентов (7) найти не удастся. Однако это можно сделать при специально подобранных коэффициентах. Например, когда коэффициенты в (7) являются биномиальными коэффициентами с дополнительным множителем степенного вида

$$C_m = \frac{i^m n!}{m!(n-m)!}, \quad (9)$$

то ТЗ пучков (7) будет равен $TC = n$ [26]. Заметим, что СУЛП (7), в отличие от СУЛП (1), (3), при распространении в свободном пространстве не вращаются, так как у всех пучков в суперпозиции одинаковая фаза Гоу, равная $n\psi(z)$.

Еще один тип СУЛП описывается комплексной амплитудой в виде осевой суперпозиции мод Лагерра–Гаусса (ЛГ):

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{|q(z)|} \times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)} - i(n+1)\psi(z)\right) \times \sum_{m=0}^{[n/2]} C_m \left(\frac{re^{i\varphi}}{w|q(z)|}\right)^{n-2m} L_m^{n-2m}\left(\frac{2r^2}{w^2 |q(z)|^2}\right). \quad (10)$$

Суперпозиция (10) является модой (структурно-устойчивая), то есть при распространении в свободном

пространстве распределение интенсивности сохраняет свой вид, изменяясь только масштабно и не вращаясь, так как фаза Гоу у всех пучков одинаковая. Орбитальный угловой момент суперпозиции (10) можно найти по формуле, аналогичной (8):

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{m=0}^{[n/2]} 4^m (n-2m)(n-m)! (m!)^{-1} |C_m|^2}{\sum_{m=0}^{[n/2]} 4^m (n-m)! (m!)^{-1} |C_m|^2}. \quad (11)$$

Топологический заряд светового поля (10) при произвольных коэффициентах найти нельзя, так как задача сводится к нахождению ТЗ суперпозиции оптических вихрей [26]:

$$E(r \gg 1, \varphi, z = 0) = e^{-(r/w)^2 + im\varphi} \left(\frac{r}{w}\right)^n \times \sum_{m=0}^{[n/2]} C_m \frac{(-2)^m}{m!} \exp(-2im\varphi). \quad (12)$$

Из (12) видно, что при больших r выражение для комплексной амплитуды (10) представляет собой комплексный многочлен от $\exp(-2i\varphi)$ степени n при $r = 1$. По основной теореме алгебры такой комплексный многочлен имеет столько корней с учетом их вырожденности, сколько их лежит в круге радиуса $r = 1$. Это число корней аналитически при произвольных коэффициентах C_m получить нельзя. Можно найти ТЗ пучка (10) при некоторых специальных коэффициентах. Например, если n – четное число и коэффициенты в (12) равны

$$C_m = \frac{(n/2)!}{(-2)^m (n/2 - m)!}, \quad (13)$$

то ТЗ светового поля (10) будет равен $ТС = n/2$.

2. Структурно-устойчивые лазерные пучки в виде суперпозиции однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса

В предыдущем параграфе мы рассмотрели разные типы структурно-устойчивых пучков (3), (7), (10) и показали, что у них нельзя одновременно найти аналитически ТЗ и ОУМ при произвольных комплексных коэффициентах. В этом параграфе мы рассмотрим еще одно семейство СУЛП, у которых можно одновременно аналитически определить и ТЗ, и ОУМ при произвольных комплексных коэффициентах. Если в (10) заменить все многочлены Лагерра на 1, то комплексная амплитуда будет иметь вид:

$$E(r, \varphi, z) = q(z)^{-1} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)}\right) \times \sum_{m=0}^n C_m \left(\frac{r e^{i\varphi}}{w q(z)}\right)^m. \quad (14)$$

Из (1) следует, что (14) получилось, когда в качестве аналитической функции $f(x)$ был выбран комплексный многочлен степени n . Пучок (14) при распространении в свободном пространстве будет вращаться вокруг оптической оси против часовой стрелки. Действительно, интенсивность пучка (14) будет иметь вид:

$$I(r, \varphi, z) = |E(r, \varphi, z)|^2 = |q(z)|^{-2} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2 |q(z)|^2}\right) \times \left\{ \sum_{m=0}^n |C_m|^2 \left(\frac{r}{w |q(z)|}\right)^{2m} + 2 \sum_{m < p}^n |C_m C_p| \left(\frac{r}{w |q(z)|}\right)^{m+p} \times \cos\left[(m-p)(\varphi - \psi(z)) + \arg C_m - \arg C_p\right] \right\}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что распределение интенсивности будет сохранять свою структуру, если разность

$$\varphi - \arctg(z/z_0) = \text{const} \quad (16)$$

не будет зависеть от z . Уравнение (16) означает, что при смещении пучка (14) вдоль оптической оси азимутальный угол должен увеличиться на величину фазы Гоу, чтобы распределение интенсивности сохранило свой вид. Из (14) также видно, что в повернутых и отмасштабированных координатах

$$\begin{cases} r(z) = r w^{-1} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{-1/2} \\ \varphi(z) = \varphi - \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right) \end{cases} \quad (17)$$

пучок (14) будет сохранять свой исходный вид.

Топологический заряд пучка (14) равен n . Это следует из основной теоремы алгебры [28, 29], которая утверждает, что любой комплексный многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней с учетом их вырожденности. Поэтому ТЗ структурно-устойчивого пучка (14) будет равен $ТС = n$. ОУМ пучка (14) также можно найти из соотношения, аналогичного (8) и (11):

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{m=0}^n m 2^{-m} m! |C_m|^2}{\sum_{m=0}^n 2^{-m} (m!) |C_m|^2}. \quad (18)$$

3. Примеры структурно-устойчивых пучков, амплитуда которых описывается ортогональными многочленами

В качестве многочлена в (14) можно взять любой из известных ортогональных многочленов (Якоби, Лежандра, Чебышева, Эрмита, Лагерра и т.д.) [30]. Рассмотрим для примера случай, когда многочлен в (14) является многочленом Лагерра.

Тогда коэффициенты в (14) примут вид:

$$C_m = \frac{(-1)^m (n+p)!}{m!(n-m)!(p+m)!}, \quad (19)$$

где n и p – индексы многочлена Лагерра $L_n^p(x)$. Тогда вместо (14) можно записать комплексную амплитуду структурно-устойчивого вращающегося лазерного пучка Лагерра–Гаусса вида:

$$E_{n,p,+}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q(z)} \times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)}\right) L_n^p\left(\frac{re^{i\varphi}}{wq(z)}\right). \quad (20)$$

Интересно, что у вращающегося пучка ЛГ (20) топологический заряд равен радиальному индексу многочлена Лагерра $TC = n$, а не азимутальному индексу, как у обычных пучков ЛГ:

$$E_{n,m,+}(r, \varphi, z) = \frac{1}{|q(z)|} \times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)} - i(2n+m+1)\psi(z)\right) \times \left(\frac{re^{i\varphi}}{w|q(z)|}\right)^m L_n^m\left(\frac{2r^2}{w^2 |q(z)|^2}\right). \quad (21)$$

Из (20) следует, что с помощью изменения азимутального индекса p можно управлять ОУМ пучка, увеличивая или уменьшая расстояние между нулями интенсивности. При этом ТЗ пучка не будет изменяться. Орбитальный угловой момент вращающегося пучка ЛГ (20) находится с помощью (18), где коэффициенты берутся из уравнения (19). Многочлен Лагерра в (20) имеет n простых действительных корней. Чтобы определить, где они находятся, приравняем нулю мнимую часть аргумента многочлена Лагерра в (20), получим:

$$\sin\left(\varphi - \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)\right) = 0, \quad (22)$$

$$\varphi_s = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right) + \pi s, \quad s = 0, 1.$$

Из (22) видно, что при $z=0$ корни многочлена Лагерра или нули интенсивности пучка (20) находятся на горизонтальной оси, а при больших z в дальнем поле нули интенсивности повернутся и будут располагаться на вертикальной оси. Причем все нули интенсивности будут лежать не на всей оси (горизонтальной при $z=0$ или вертикальной при большом z), а только на положительной ее части, так как многочлен Лагерра при отрицательных значениях аргумента не имеет корней:

$$L_n^p(-r) = \sum_{m=0}^n \frac{(p+n)! r^m}{m!(n-m)!(p+m)!} > 0. \quad (23)$$

В центре пучка (20) на оптической оси интенсивность всегда будет отлична от нуля, так как

$$L_n^p(0) = \frac{(p+n)!}{n! p!}. \quad (24)$$

Все указанные выше особенности вращающегося пучка ЛГ будут подтверждены в параграфе моделирования.

4. Результаты моделирования

Моделирование СУЛП проводилось по формулам (14) и (20). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 1$ мм, радиальный и азимутальный индексы многочлена Лагерра в (20): $n = 5, p = 2$. На рис. 1 показаны интенсивность (рис. 1а, в, д) и фаза (рис. 1б, г, е) вращающегося пучка ЛГ (20) в начальной плоскости (рис. 1а, б), на расстоянии Рэ-ля $z = z_0$ (рис. 1в, г) и в дальней зоне на расстоянии $z = 5z_0$ (рис. 1д, е). Размеры кадров: $|x|, |y| \leq 2,5$ мм (рис. 1а, в), $|x|, |y| \leq 10$ мм (рис. 1д) и $|x|, |y| \leq 40$ мм (рис. 1б, г, е).

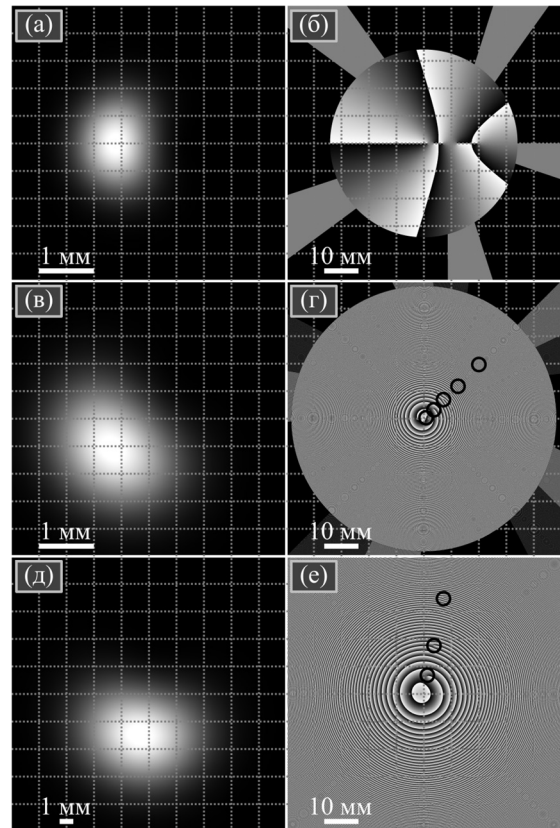


Рис. 1. Распределение интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) для вращающегося пучка ЛГ (20) при $n = 5$. Кружками отмечены оптические вихри

На рис. 1а, в, д видно, что интенсивность имеет вид асимметричного эллиптического гауссова пятна, смещенного с оптической оси, который при распространении вращается вокруг оптической оси. На расстоянии Рэ-ля интенсивность повернулась на 45 градусов, а в дальней зоне повернулась почти на 90 градусов. На

рис. 1б видно, в начальной плоскости нули интенсивности (центры пяти винтовых дислокаций) лежат на горизонтальной оси справа от центра (оптической оси). Также видно на рис. 1б, что имеются пять линий скачков фазы на 2π . Это означает, что ТЗ пучка на рис. 1 равен 5. На рис. 1г центры оптических вихрей лежат на линии, которая проходит под углом 45 градусов к горизонтальной оси (выделены кружками). А на рис. 1е эти центры оптических вихрей лежат уже на почти вертикальной оси (тоже выделены кружками).

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы СУЛП в виде полинома (14) или в виде суперпозиции однокольцевых пучков ЛГ (степень многочлена равна $n=5$). Размеры кадров: $|x|, |y| \leq 2,5$ мм (рис. 2а, в) и $|x|, |y| \leq 5$ мм (рис. 2б, г). На рис. 2а, б в показаны интенсивность и фаза в начальной плоскости для пучка (14) с коэффициентами: $C_{n1} = [1,0; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5]$, а на рис. 2в, г показаны интенсивность и фаза в начальной плоскости для пучка (1) но с другими коэффициентами: $C_{n2} = [1,0; 0,9e^{i\pi/6}; 0,8e^{i2\pi/6}; 0,7e^{i3\pi/6}; 0,6e^{i4\pi/6}; 0,5e^{i5\pi/6}]$. Видно, что коэффициенты C_{n2} отличаются от коэффициентов C_{n1} только фазами, а амплитуды у них одинаковые. Поэтому интенсивности на рис. 2а и рис. 2в почти одинаковые и отличаются только поворотом на некоторый угол вокруг оптической оси. По фазовой картине на рис. 2б, г видно, что у обоих пучков имеются 5 оптических вихрей (5 кривых линий скачков фазы на 2π) и ТЗ пучков равен 5.

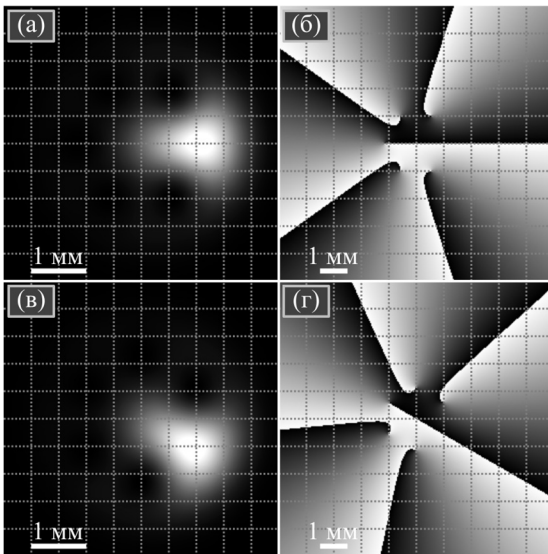


Рис. 2. Распределение интенсивности (а, в) и фазы (б, г) для СУЛП (14) с многочленом степени $n = 5$ и разными коэффициентами C_{n1} и C_{n2}

Для распределений с рис. 2 был рассчитан нормированный ОУМ двумя способами: численно по общей формуле для ОУМ [9] и по аналитической формуле (18). Теоретические и численные значения ОУМ совпали и для рис. 2а, б равны 2,5196 (теория) и 2,5143 (расчёт как в начальной плоскости, так и на расстоянии Рэлея). Для рис. 2в, г были получены значения 2,5196 (теория), 2,5149 (расчёт в начальной плоскости), 2,5145 (расчёт на расстоянии Рэлея).

На рис. 3 показаны интенсивность (рис. 3а, в) и фаза (рис. 3б, г) в начальной плоскости пучка (14) также состоящего из суперпозиции 5 однокольцевых пучков ЛГ, но с другими коэффициентами: $C_{n3} = [1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0]$ (рис. 3а, б) и $C_{n4} = [1,0; -1,2; 1,4; -1,6; 1,8; -2,0]$ (рис. 3в, г). Коэффициенты C_{n3} и C_{n4} отличаются только фазами, у последних коэффициентов фазы чередуются 0 и π . Поэтому интенсивности на рис. 3а, в зеркально повернуты относительно вертикальной оси. Топологический заряд у пучков (14) не зависит от величины коэффициентов и равен $n=5$. На рис. 3б, г видны 5 линий скачков фазы на 2π .

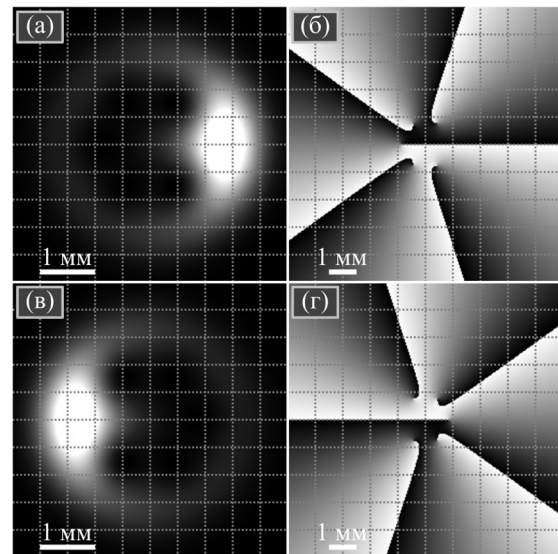


Рис. 3. Распределение интенсивности (а, в) и фазы (б, г) для СУЛП (14) с многочленом степени $n = 5$ и разными коэффициентами C_{n3} и C_{n4}

Для распределений на рис. 3 также был рассчитан нормированный ОУМ двумя способами. Теоретические (18) и численные значения ОУМ для обоих полей одинаковы и равны 4,2026 (теория) и 4,1934 (расчёт, как в начальной плоскости, так и на расстоянии Рэлея). Расчетное значение нормированного ОУМ всегда немного меньше точного теоретического потому, что оно рассчитывается с помощью интегрирования не по всему сечению пучка, а только по его центральной части, которая имеет размер кадра (рис. 3).

На рис. 4 показаны интенсивности и фазы СУЛП (14) при $n=5$ и разных наборов коэффициентов. Кадры интенсивности имеют размер, как и ранее, $|x|, |y| \leq 2,5$ мм, а кадры фазы имеют также размер, как и ранее, $|x|, |y| \leq 5$ мм. Для пучка на рис. 4а, б коэффициенты равны $C_{n5} = [0,1772; 0,5715; 0,4997; 0,1300; 0,9195; 0,6661]$. Видно, что интенсивность пучка на рис. 4а похожа на интенсивность пучка на рис. 3а. Коэффициенты для пучка на рис. 4в, г имеют вид: $C_{n6} = [0,4460; -0,1817; 0,8461; -0,0655; 0,2935; -0,7292]$. На распределении интенсивности пучка на рис. 4в уже видны области изолированных нулей интенсивности,

но их пока 3, а не 5. А на рис. 4д, е показан СУЛП (14), у которого видны все 5 нулей интенсивностей, так как коэффициенты подобраны специальным образом: $C_{n7} = [0,7159; 0,1559; 0,0066; 0,3692; 0,2428; 0,6799]$. На рис. 4ж, з показаны интенсивность и фаза еще одного пучка (14) с коэффициентами $C_{n8} = [0,7316; 0,1817; 0,8542; 0,4196; 0,7175; 0,3024]$. Из рис. 4ж видно, что почти вся интенсивность сосредоточена в правой части сечения пучка, а кольцевой и круговой структуры интенсивности пучка уже нет. У всех пучков на рис. 2, 3 и 4 ТЗ равен $n = 5$.

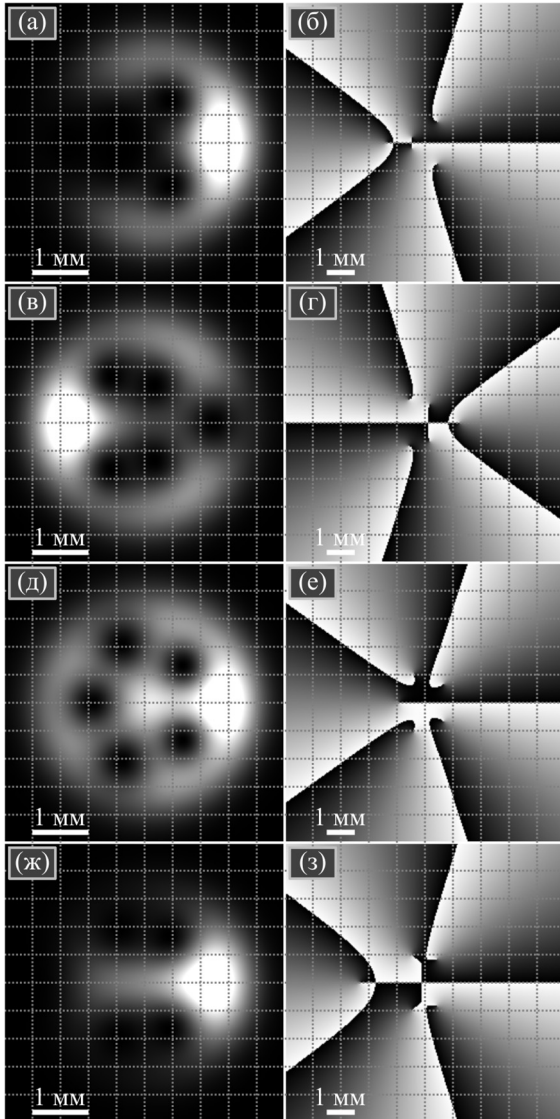


Рис. 4. Распределение интенсивности (а, в, д, ж) и фазы (б, г, е, з) для СУЛП (14) с многочленом степени $n = 5$ и случайными коэффициентами C_{n5} , C_{n6} , C_{n7} и C_{n8} :

$C_{n5} = [0,1772; 0,5715; 0,4997; 0,1300; 0,9195; 0,6661]$ (а, б),
 $C_{n6} = [0,4460; -0,1817; 0,8461; -0,0655; 0,2935; -0,7292]$ (в, г),
 $C_{n7} = [0,7159; 0,1559; 0,0066; 0,3692; 0,2428; 0,6799]$ (д, е),
 $C_{n8} = [0,7316; 0,1817; 0,8542; 0,4196; 0,7175; 0,3024]$ (ж, з)

Рассчитанные значения ОУМ для распределений на рис. 4 равны 4,2408 (рис. 4а, б, теория) и 4,2316 (рис. 4а, б, расчёт), 4,1592 (рис. 4в, г, теория) и 4,1499 (рис. 4в, г, расчёт), 3,8141 (рис. 4д, е, теория) и 3,8054

(рис. 4д, е, расчёт), 2,7479 (рис. 4ж, з, теория) и 2,7424 (рис. 4ж, з, расчёт). Численные значения ОУМ в начальной плоскости и на расстоянии Рэлея совпали.

Заключение

В данной работе получены следующие результаты. Рассмотрены разные типы структурно-устойчивых лазерных пучков, которые описываются аналитической функцией с вихревым аргументом $x+iy$ (1), в виде произведения изолированных нулей интенсивности (3), суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса (7) и суперпозиции пучков Лагерра–Гаусса (10). Для двух последних типов СУЛП получены выражения для расчета ОУМ при любых комплексных коэффициентах (8) и (11). Рассмотрен СУЛП с множителем в виде комплексного многочлена степени n (14), для которого показано, что он имеет ТЗ, равный n , при любых коэффициентах. Также получено выражение для расчета ОУМ такого пучка (18). В качестве примера полиномиальных СУЛП рассмотрен вращающийся пучок ЛГ с вихревым аргументом (20). У такого пучка все нули интенсивности расположены на луче, лежащем в поперечной плоскости, который исходит от оптической оси и вращается против часовой стрелки вместе с распределением интенсивности, когда пучок распространяется в свободном пространстве. В центре (на оптической оси) у вращающихся вихревых пучков ЛГ интенсивность всегда отлична от нуля.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-12-00236) в теоретической части и в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части моделирования.

References

- [1] Wang J, Liu J, Li S, Zhao Y, Du J, Zhu L. Orbital angular momentum and beyond in free-space optical communications. *Nanophotonics* 2022; 11(4): 645-680. DOI: 10.1515/nanoph-2021-0527.
- [2] Volyar A, Bretsko M, Khalilov S, Akimova Y. Structurally stable astigmatic vortex beams with super-high orbital angular momentum (ABCD matrix approach). *Photonics* 2023; 10(9): 1048. DOI: 10.3390/photonics10091048.
- [3] Zeng R, Zhao Q, Shen Y, Liu Y, Yang Y. Structural stability of open vortex beams. *Appl Phys Lett* 2021; 119(17): 171105. DOI: 10.1063/5.0062967.
- [4] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. *Vortex laser beams*. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-1385-4211-2.
- [5] Willner AE, Huang H, Yan Y, Ren Y, Ahmed N, Xie G, Bao C, Li L, Cao Y, Zhao Z, Wang J, Lavery MPJ, Tur M, Ramachandran S, Molisch AF, Ashrafi N, Ashrafi S. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Adv Opt Photon* 2015; 7(1): 66-106. DOI: 10.1364/AOP.7.000066.
- [6] Cheng S, Xia T, Liu M, Xu S, Gao S, Zhang G, Tao S. Optical manipulation of microparticles with the momentum flux transverse to the optical axis. *Opt Laser Technol* 2019; 113: 266-272. DOI: 10.1016/j.optlastec.2018.12.043.

- [7] Torner L, Torres JP, Carrasco S. Digital spiral imaging. *Opt Express* 2005; 13(3): 873-881. DOI: 10.1364/OPEX.13.000873.
- [8] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412(6844): 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [9] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral light beams. *Phys-Usp* 2004; 47: 1177. DOI: 10.1070/PU2004v047n12ABEH001802.
- [10] Arlt J, Padgett MJ. Generation of a beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity: the optical bottle beam. *Opt Lett* 2000; 25(4): 191-193. DOI: 10.1364/OL.25.000191.
- [11] Ando T, Matsumoto N, Ohtake Y, Takiguchi Y, Inoue T. Structure of optical singularities in coaxial superpositions of Laguerre–Gaussian modes. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(12): 2602-2612. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002602.
- [12] Floettmann K. Coherent superposition of orthogonal Hermite–Gauss modes. *Opt Commun* 2022; 505: 127537. DOI: 10.1016/j.optcom.2021.127537.
- [13] Pääkkönen P, Lautanen J, Honkanen M, Kuittinen M, Turunen J, Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Friberg AT. Rotating optical fields: Experimental demonstration with diffractive optics. *J Mod Opt* 1998; 45(11): 2355-2369. DOI: 10.1080/09500349808231245.
- [14] Yu Y, Huang H, Lin S, Zeng Y, Zhan Q. Generation of rotating optical focal field employing turnstile antenna. *Opt Commun* 2021; 498: 127205. DOI: 10.1016/j.optcom.2021.127205.
- [15] Volyar A, Akimova Ya. Structural stability of spiral vortex beams to sector perturbations. *Appl Opt* 2021; 60(28): 8865-8874. DOI: 10.1364/AO.435420.
- [16] Yao AM, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. *Adv Opt Photon* 2011; 3(2): 161-204. DOI: 10.1364/AOP.3.000161.
- [17] Franke-Arnold S. 30 years of orbital angular momentum of light. *Nat Rev Phys* 2022; 4: 361. DOI: 10.1038/s42254-022-00467-x.
- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Topological charge of optical vortices. Boca Raton: CRC Press; 2022. ISBN: 978-1-003-32630-4.
- [19] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 2019; 8: 90. DOI: 10.1038/s41377-019-0194-2.
- [20] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Y. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach. *Photonics* 2024; 11(3): 191. DOI: 10.3390/photonics11030191.
- [21] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Modern optics of Gaussian Beams [in Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
- [22] Berry MV. The singularities of light: intensity, phase, polarisation. *Light Sci Appl* 2023; 12(1): 238. DOI: 10.1038/s41377-023-01270-8.
- [23] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams: optical and quantum aspects. *Opt Commun* 1996; 125(4-6): 302-323. DOI: 10.1016/0030-4018(95)00640-0.
- [24] Kovalev AA, Kotlyar VV. Propagation-invariant laser beams with an array of phase singularities. *Phys Rev A* 2021; 103(6): 063502. DOI: 10.1103/PhysRevA.103.063502.
- [25] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [26] Kotlyar VV, Kovalev AA, Abramochkin EG. Topological charge of propagation-invariant laser beams. *Photonics* 2023; 10(8): 915. DOI: 10.3390/photonics10080915.
- [27] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(6): 1061-1065. DOI: 10.1364/JOSAA.457660.
- [28] Shabat BV. Introduction to complex analysis [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1969.
- [29] Hirst HP, Macey WT. Bounding the roots of polynomials. *Coll Math J* 1997; 28(4): 292-295. DOI: 10.1080/07468342.1997.11973878.
- [30] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 2: Special functions. New York: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 2-88124-097-6.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** см. стр. 875 этого номера.

Сведения об авторах **Ковалёв Алексей Андреевич** и **Телегин Алексей Михайлович** см. стр. 939 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 07 февраля 2025 г. Окончательный вариант – 05 марта 2025 г.

Orbital angular momentum and topological charge of structurally stable laser beams

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.M. Telegin^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", Molodogvardeyskaya 151, Samara, 443001, Russia;

²Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

We analyze various types of structurally stable paraxial laser beams with a finite number of intensity nulls. In more detail, we study structurally stable beams with complex amplitude equal to a complex polynomial of degree n with a Gaussian envelope. We obtain an expression for the orbital angular momentum of such beams and show that for arbitrary complex polynomial coefficients, the topological charge of such beams is equal to the degree of the polynomial, n . As an example of such beams, a rotating Laguerre-Gaussian beam is investigated, whose topological charge is equal to the radial index of the Laguerre polynomial. On the optical axis, such a beam has a nonzero intensity, while all intensity nulls lie on a straight line to the right from the optical axis and rotate counter-clockwise by an angle of $\pi/2$ upon free-space beam propagation.

Keywords: structurally stable beam, orbital angular momentum, topological charge.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Telegin AM. Orbital angular momentum and topological charge of structurally stable laser beams. *Computer Optics* 2025; 49(6): 940-946. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1676.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #23-12-00236 (theory) and within a government project of the NRC "Kurchatov Institute" (numerical simulation).

Author's information

Victor Victorovich Kotlyar is a Head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute" and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru, ORCID: 0000-0003-1737-0393

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a Leading Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Professor at Technical Cybernetics department at Samara National Research University. He is co-author of more than 200 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru, ORCID: 0000-0002-0488-4267

Aleksey Mikhailovich Telegin, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of the Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation, sensors. E-mail: talex85@mail.ru, ORCID: 0000-0002-1750-1536

Received February 07, 2025. The final version – March 05, 2025.
