

Как астигматическая фаза Гуй формирует и разрушает инварианты структурированного пучка

А.В. Воляр¹, М.В. Брецько¹, С.И. Халилов¹, Я.Е. Акимова¹

¹ КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт, 295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4

Аннотация

В статье теоретически и экспериментально исследуются свойства Фурье-инвариантов обобщенного структурированного пучка Лагерра–Гаусса в оптической системе из двух сферических и одной цилиндрической линзы между ними. Первая сферическая линза формирует характерную геометрию обобщенного структурированного пучка Лагерра–Гаусса на входе цилиндрической линзы. Вторая сферическая линза выполняет Фурье-преобразование астигматического пучка. Фотодетектор располагается в фокальной плоскости сферической линзы и смещается вдоль оси пучка вместе с ней. Анализ орбитальных параметров Стокса проводится методами матриц интенсивности второго порядка. Обнаружено, что орбитальные параметры Стокса, включая орбитальный угловой момент, не изменяются при свободном распространении структурированных астигматических пучков любого порядка при любых значениях управляющих параметров и являются их инвариантами. Показано, что даже небольшое нарушение условий Фурье-инвариантности приводит к разрушению Фурье-инвариантов. Процессами формирования и разрушения инвариантов управляет астигматическая фаза Гуй.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, структурированный пучок Лагерра–Гаусса, орбитальные параметры Стокса.

Цитирование: Воляр, А.В. Как астигматическая фаза Гуй формирует и разрушает инварианты структурированного пучка / А.В. Воляр, М.В. Брецько, С.И. Халилов, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 1. – 1729 – DOI: 10.18287/COJ1729.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. How the astigmatic Gouy phase controls invariants of structured beams. Computer Optics 2026; 50(1): 1729. DOI: 10.18287/COJ1729.

Введение

Принято считать, что распространение как стандартных, так и устойчивых структурированных пучков через свободное пространство или систему сферических линз не изменяет их орбитальный угловой момент (ОУМ) [1 – 5]. Изменяется только их масштаб, и появляется общая фаза, которую называют фазой Гуй. Однако при этом часто забывают указать одну деталь: пучки должны быть однородными. Ярким примером является конверсия ОУМ на модовом конверторе, предсказанная еще в начале 90-х годов прошлого века Абрамочкиным и Волостниковым [6, 7]. Затем Аллен и др. в [8] показали, что система из двух цилиндрических линз превращает свободный от ОУМ пучок Эрмита–Гаусса (ЭГ) в пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ), переносящий ОУМ. Авторы подчеркнули, что цилиндрическая линза в конверторе вносит основу для преобразования ОУМ, но окончательно преобразование ОУМ завершает астигматическая фаза Гуй, возникающая в неоднородном ЭГ-пучке в промежутке между цилиндрическими линзами. Вслед за ними ван Енк и Ниенхис [9], используя операторный подход, показали, что цилиндрическая линза не изменяет полный ОУМ. Но оставалось непонятным, как цилиндрическая линза может не изменять ОУМ, если структура свободно распространяющегося пучка после нее радикально изменяется, т.е. может заменять оптические вихри, переносящие ОУМ на свободные от ОУМ краевые дислокации. Возможно, что неоднородный вихревой пучок после астигматического элемента имеет более сложную структуру ОУМ, чем предполагалось ранее.

Эту мысль развили Ананьев и Бекшаев [10] на основе подхода матриц момента интенсивности второго порядка, указав на возможность представить полный ОУМ в виде суммы вихревой и астигматической составляющих. Составляющие обмениваются ОУМ при распространении, но их сумма остается неизменной. По сути проблема сводится к вопросу, какой ОУМ мы измеряем на эксперименте, и как измерить полный ОУМ? Немного позже Бекшаев и др. [11] теоретически продемонстрировали такое представление полного ОУМ на примере ЛГ-пучка с нулевым радиальным числом. Однако это представление о полном ОУМ не сопровождалось иллюстрацией сохранения ОУМ в виде явных или скрытых геометрических симметрий. Кроме того, отсутствовало экспериментальное обоснование наблюдаемого на эксперименте изменения структуры пучка. С другой стороны, скрытая геометрия астигматических преобразований проявилась в отображении двухпараметрического структурированного ЛГ (сЛГ-пучка) на орбитальную сферу Пуанкаре [12]. Оказалось, что траектория состояний свободного от астигматизма сЛГ-пучка отображается в виде замкнутой пространственной траектории при циклическом изменении его параметров. Более того, преобразование сЛГ-пучка цилиндрической

линзой проявляется в виде поворота замкнутой траектории на сфере как единого целого на 90° вокруг одной из осей сферы без изменения ее формы [13]. Здесь же было показано, что Фурье-преобразование на сферической линзе подавляет астигматическую составляющую ОУМ. Дополняет эти публикации статья [14] о прямом измерении орбитальных параметров Стокса, включая ОУМ, в неоднородных астигматических пучках с последующим отображением на орбитальную сферу Пуанкаре. Поскольку амплитуды собственных мод остаются неизменными при распространении неоднородного пучка после цилиндрической линзы, то преобразование ОУМ контролируется астигматической фазой Гуи, представленной разностью фаз Гуи между комплексными амплитудами пучка вдоль главных осей астигматизма. Такой обширный арсенал новых подходов к анализу и измерениям дает возможность детального анализа процесса преобразований или инвариантности ОУМ в сложных структурированных пучках [15], при их распространении через астигматическую оптическую систему. Таким образом, целью нашей статьи является теоретическое и экспериментальное исследование условий, при которых ОУМ сложного структурированного пучка остается неизменным в оптической системе первого порядка с астигматическими элементами. Основой теоретического и экспериментального анализа является подход моментов интенсивности второго порядка.

1. Теоретические основы и моделирование

Задачей параграфа является выявление условий распространения сложных структурированных пучков без изменений ОУМ при вариации как параметров астигматических элементов оптической системы, так и управляющих параметров структурированных пучков. Сложный многопараметрический структурированный пучок формируется в виде согласованной комбинации простых структурированных пучков, в частности, двухпараметрических сЛГ-пучков.

1.1. Теоретические основы

Структурированный сЛГ-пучок представляет собой комбинацию собственных ЭГ-мод, амплитуды и фазы которых контролируются амплитудным, $\varepsilon > 0$, и фазовым θ , параметрами таким образом, что сЛГ-пучок остается структурно устойчивым при распространении с точностью до их масштаба. При этом при нулевом амплитудном параметре $\varepsilon = 0$ сЛГ-пучок превращается в стандартный ЛГ-пучок, но при очень большом амплитудном параметре он превращается в однопараметрический гибридный пучок Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ) [16]. Фазовый параметр θ управляет картиной интенсивности и фазы сЛГ-пучка. Чтобы расширить свойства и варьировать его начальное состояние (скажем, заменить исходный ЛГ-пучок на ЭГ-пучок или комбинацией сЛГ-пучков), введем в сЛГ-пучок еще два управляющих параметра p и g и назовем его обобщенным сЛГ-пучком, записав комплексную амплитуду следующим образом:

$$\Psi_{n,\ell}(x, y, z = 0 | \varepsilon, \theta, p, g) = \sum_{k=0}^N C_k(\varepsilon, \theta, p, g) HG_k(x, y), \tag{1}$$

где $HG_k = H_{2n+\ell-k}(x)H_k(y)e^{-(x^2+y^2)}$ – ненормированные ЭГ-моды с безразмерными координатами $x \rightarrow \sqrt{2}x/w_0$, $y \rightarrow \sqrt{2}y/w_0$, где w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка. Управляющие параметры изменяются в интервале $\theta \in (0, 2\pi)$, $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$, но если при $\varepsilon = -1$, $\theta = 0$ и $p = q$, то комплексная амплитуда (1) обращается в ноль. Кроме того, амплитуды мод

$$C_k = (2)^k P_k^{(n+\ell-k, n-\ell)}(0) \varepsilon_k(\varepsilon, \theta, p, q) \exp(ik\Gamma_k), \tag{2}$$

где $P_k^{(n+\ell-k, n-\ell)}(0)$ – многочлен Якоби, Γ_k – фаза Гуи k -й моды,

$$\varepsilon_k(\varepsilon, \theta, p, q) = (p^k + \varepsilon g^k e^{ik\theta}), \tag{3}$$

p и g – дополнительные комплексные параметры. При $p = g = \pm i$ мы имеем дело с исходным ЛГ-пучком при $\varepsilon = 0$, но при $p = g = \pm 1$ исходный ЛГ-пучок превращается в исходный ЭГ-пучок при $\varepsilon = 0$, если же $p = g e_1 \exp(i\theta_1)$ возникает суперпозиция двух структурированных сЛГ-пучков, но с различными управляющими параметрами $(\varepsilon_1, \theta_1)$.

Рассмотрим распространение обобщенного сЛГ-пучка в оптической системе из двух сферических и одной цилиндрической линзы между ними, предложенной в работе [14] для измерения орбитальных параметров Стокса (см. рис. 1). Комплексная амплитуда пучка есть [14]

$$asLG_{n,\ell}(x, y, z | \varepsilon, \theta, p, q = i) = \frac{1}{\sqrt{\bar{w}_{x2}\bar{w}_{y2}}} \exp\left(i\left[\frac{x^2}{\bar{q}_{x2}} + \frac{y^2}{\bar{q}_{y2}}\right]\right) \exp(i\Phi_{n,\ell}) \sum_{k=0}^N C_k H_{2n+\ell-k}\left(\frac{\sqrt{2}x}{\bar{w}_{x2}}\right) H_k\left(\frac{\sqrt{2}y}{\bar{w}_{y2}}\right), \tag{4}$$

где $\bar{q}_{x,y}(Z)$ – безразмерные комплексные лучевые параметры неоднородного пучка и его безразмерные радиусы перетяжек $\bar{w}_{x,y}(Z)$, $Z = z/z_0$, z_0 – длина Релея записывается как

$$\bar{q}_{x2} = \frac{\bar{q}_x}{f_{sh} - \bar{q}_{x+1}} + Z_2, \bar{q}_{y2} = \frac{(1-Z_2\kappa_{sh})(Z_1-i)+Z_2}{1+i\kappa_{sh}(iZ+1)}, \tag{5}$$

где

$$\bar{q}_x(z) = \frac{[z(\kappa_x^2+1)-\kappa_x]-i}{\kappa_x^2+1}, \bar{q}_y(z_1) = Z_1 - i, \tag{6}$$

где

$$\bar{q}_{xy} = q_{xy}/z_0, \kappa_{sh} = z_0/f_{sh}, \kappa_x = z_0/f_x, \tag{7}$$

$$1/\bar{w}_{x2}^2 = -Re(i/\bar{q}_{x2}), 1/\bar{w}_{y2}^2 = -Re(i/\bar{q}_{y2}),$$

с фазой Гуй $\Gamma_{x2} = arg \sqrt{1/\bar{q}_{x2}}$, $\Gamma_{y2} = arg(1/\sqrt{\bar{q}_{y2}})$, и астигматической фазой

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_{x2} - \Gamma_{y2}. \tag{8}$$

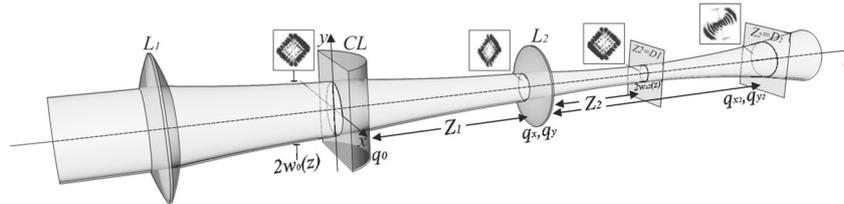


Рис. 1. Эскиз астигматической системы с двумя сферическими линзами L_1, L_2 и одной цилиндрической CL -линзой между ними. На вставках изображены картины интенсивности обобщенного сЛГ-пучка с $n = 5, \ell = 1, \varepsilon = -1, \theta = 2,93$ в соответствующих плоскостях

Безразмерный лучевой параметр $\bar{q}_{x,y}$ не зависит от длины Релея. При этом безразмерная длина $Z_1 = z_1/z_0$ задает расстояние между сферической линзой с безразмерным фокусным расстоянием $\kappa_{sh}^{-1} = f_{sh}/z_0$ и положением плоскости после цилиндрической линзы с безразмерным фокусным расстоянием $\kappa_x^{-1} = f_x/z_0$, а длина $Z_2 = z_2/z_0$ задает положение плоскости после сферической линзы. Поскольку координаты x и y нормированы на радиус перетяжки w_0 , то комплексная амплитуда (4) не зависит от геометрических параметров исходного пучка, но определяется исключительно управляющими параметрами ε, q, p, g и положением плоскости наблюдения $Z_2 = z_2/z_0$.

Критические преобразования структуры пучка происходят в критических плоскостях оптической системы, в которых и измеряются орбитальные параметры Стокса [14]. Положение критических плоскостей определяется равенством радиусов перетяжек $w_x(Z_2)$ и $w_y(Z_2)$, показанных на рис. 2а – в. В первой критической плоскости фаза Гуй на рис. 2г испытывает максимум $\Gamma_{xy} = \pi/2$, а во второй критической плоскости она обращается в ноль $\Gamma_{xy} = 0$. Ширина всплеска фазы Гуй зависит от соотношения между фокусным расстоянием сферической линзы f_{sh} и положением Z_2 второй критической плоскости. По мере приближения положения Z_2 к фокусному расстоянию f_{sh} ширина возрастает и, как мы покажем далее, стремится к бесконечности при их равенстве $Z_2 = f_{sh}$.

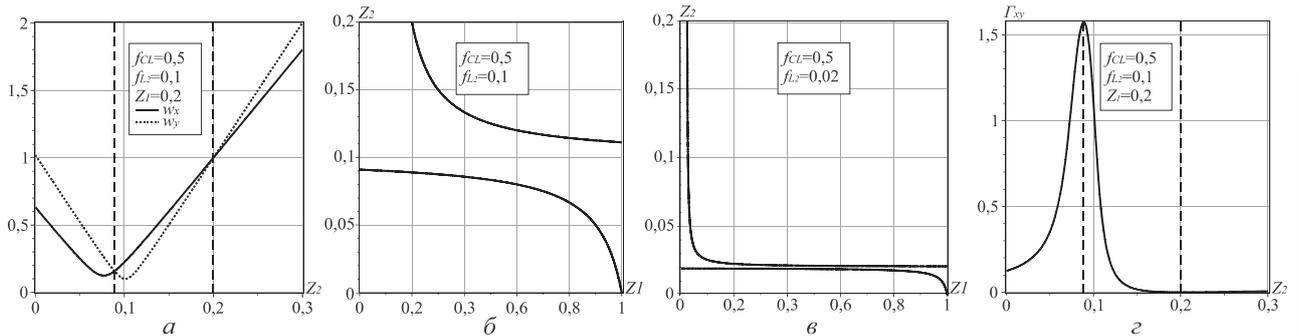


Рис. 2. (а) Пересечение кривых безразмерных радиусов астигматического пучка, (б, в) положение первой (нижняя кривая) и второй (верхняя кривая) критических плоскостей на параметрической плоскости (Z_1, Z_2) , (г) астигматическая фаза Гуй. Пунктирные прямые указывают на положение критических плоскостей

Если симплектическая матрица ABCD позволяет определить лучевой комплексный параметр $q_{xy}(z)$ структурированного пучка (4), то за измерение основных параметров пучка (радиуса перетяжки, кривизны волнового фронта, эллипса интенсивности, ОУМ, орбитальных параметров Стокса (S_1, S_2, S_3) и многих других) отвечают 10 элементов матрицы интенсивности второго порядка [12]. Но только 3 из них W_{xx}, W_{yy}, W_{xy} можно непосредственно измерить на эксперименте. Как мы показали в статье [14], поперечный параметр W_{xy} можно связать с ОУМ ℓ_z в критических плоскостях, в то время как W_{xx} и W_{yy} можно измерять в любой плоскости пучка. Этого оказывается достаточным для измерения всех трех орбитальных параметров Стокса. Их вид записывается как [14]

$$W_{xy} = (\bar{w}_x(z)\bar{w}_y(z)/2J_{00}) \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)! (j+1)! \operatorname{Re}(C_j C_{j+1}^*), \quad (9)$$

$$W_{xx} = (\bar{w}_x^2(z)/4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2N-2j+1)(N-j)! j! |C_j|^2, \quad (10)$$

$$W_{yy} = (\bar{w}_y^2(z)/4J_{00}) \sum_{j=0}^N (2j+1)(N-j)! j! |C_j|^2, \quad (11)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \{ (W_{xx} - W_{yy}) + (U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta}) \}, \quad (12)$$

$$S_2 = W_{xy} + U_{\xi\eta}, \quad (13)$$

$$S_3 = M_{x\eta} - M_{y\xi} = \ell_z. \quad (14)$$

Здесь S_3 определяется через разность недиагональных элементов 2D-субматрицы \mathbf{M} в 4D-матрице моментов интенсивности \mathbf{P} моментов интенсивности второго порядка (см. [12, 14]), при этом параметр S_3 задает ОУМ $S_3 = \ell_z$ структурированного пучка.

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{j} \iint_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} \partial_x \Psi \partial_x \Psi^* & \partial_x \Psi \partial_y \Psi^* \\ \partial_x \Psi \partial_y \Psi^* & \partial_y \Psi \partial_y \Psi^* \end{pmatrix} d^2 \mathbf{r}. \quad (15)$$

Если измерены S_2 и S_3 параметры, то астигматическая фаза Γ записывается как

$$\Gamma_{xy} = \arctan(S_3/S_2). \quad (16)$$

Кривые зависимости $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$ на рис. 3а, б демонстрируют эволюцию обобщенного сЛГ-пучка с начальным $LG(\varepsilon = 0)$ и $HG(\varepsilon = 0)$ вдоль оси пучка Z_2 после сферической линзы. Максимумы и минимумы пучков приходятся на первую критическую плоскость, причем максимум ОУМ на рис. 3а достигает величины $\ell_z \approx 28$, т.е. равен почти удвоенному радиальному числу $n = 15$. Но наиболее удивительными являются следующие две особенности ОУМ. Во-первых, сравнение кривых ОУМ и поперечного момента интенсивности W_{xy} показывает, что переход от начального LG -состояния в начальное HG -состояние сопровождается взаимной заменой кривых $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$. Во-вторых, сумма квадратов ОУМ $\ell_z(Z_2)$ и $4W_{xy}(Z_2)$ не изменяется вдоль длины пучка и является инвариантом

$$LW = \ell_z(\varepsilon, \theta) = \pm \sqrt{\ell_z^2(\varepsilon, \theta, Z_2) + (4W_{xy}(\varepsilon, \theta, Z_2))^2} = const, \quad (17)$$

всегда равным исходному ОУМ $\ell_z(\varepsilon, \theta, Z_2)$, здесь знак (\pm) задает начальное ОУМ $\ell_z(\varepsilon, \theta)$. Компьютерное моделирование показывает, что этот инвариант распространяется на все состояния обобщенного сЛГ-пучка при различных четырех $(\varepsilon, \theta, p, g)$ параметрах. Причем это соотношение можно экспериментально подтвердить или опровергнуть.

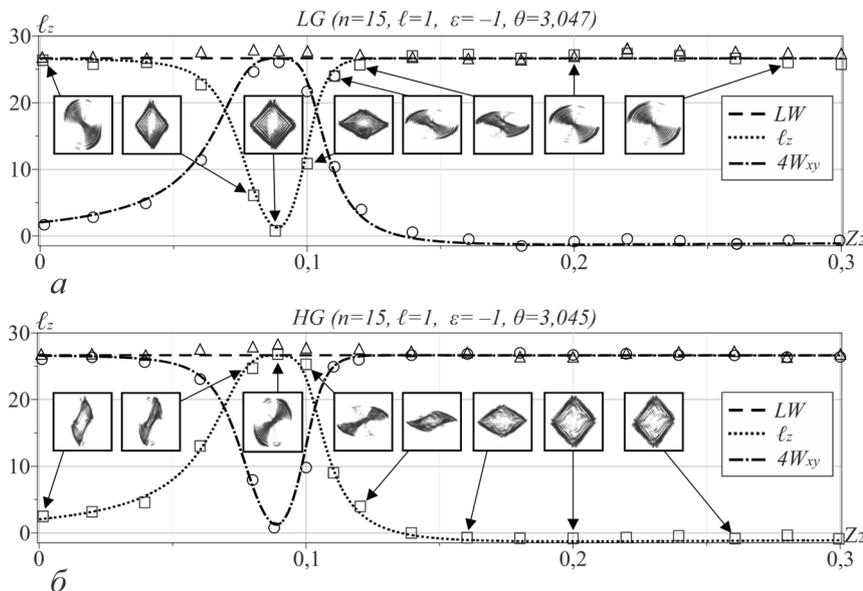


Рис. 3. Эволюция максимума ОУМ ℓ_z и безразмерного поперечного момента интенсивности $4W_{xy}$ вдоль оси пучка после сферической линзы ($f_{cl} = 0,5 \text{ m}$, $f_{sh} = 0,1 \text{ m}$, $z_0 = 1 \text{ m}$) обобщенного сЛГ-пучка в (а) начальном ЛГ-состоянии: с параметрами $\varepsilon = -1$, $\theta = 3,047$, (б) в начальном ЭГ-состоянии с $\varepsilon = -1$, $\theta = 3,045$, $n = 15$, $\ell = 1$. Пунктирная прямая соответствует инварианту $LW^2 = \ell_z^2(Z_2) + (4W_{xy}(Z_2))^2 = \ell_z^2(Z_2 = 0)$. На вставках приведены картины интенсивности пучков в соответственных плоскостях. Кружки, квадратики и треугольники указывают на экспериментальные точки

1.2. Фурье-инварианты обобщенного структурированного пучка
 1.2.1. Вихревой, астигматический и общий ОУМ

В этом подпараграфе мы сфокусируемся на поиске условий, при которых ОУМ сложного структурированного пучка сохраняется при распространении через астигматическую оптическую систему. При этом особое внимание обращается на возможность прямого измерения полученных теоретических предсказаний. Прежде всего, обратимся к основополагающим статьям [10, 11]. Так, в статье [10] авторы предположили, что использование квадратичного фазового элемента позволяет скорректировать действие астигматизма в оптической системе. Более детальное описание этого процесса было дано в статье [11]. Здесь авторы предсказали, что полный ОУМ вихревого пучка складывается из чисто симметричной вихревой составляющей и несимметричной астигматической составляющей, тогда как полный ОУМ характеризуется состоянием вихревого пучка на входе астигматического элемента. При этом квадратичный фазовый корректор выделяет именно вихревую составляющую. Связав астигматизм системы с астигматической линзой с двумя фокусными расстояниями f_x и f_y , авторы получили явный вид вихревого и астигматического ОУМ составляющими для простейшего ЛГ-пучка с нулевым радиальным числом в виде

$$\Lambda_V(z) = \ell \left[(z/z_0)^2 + (1 - z/f_x)(1 - z/f_y) \right] / \mathfrak{R}, \tag{18}$$

$$\Lambda_A(z) = (\ell/2) (z/f_x - z/f_y)^2 / \mathfrak{R}, \tag{19}$$

где $\mathfrak{R}(z) = (z/z_0)^2 + (1 - z/f_x)^2/2 + (1 - z/f_y)^2/2$.

Здесь мы ввели безразмерные величины ОУМ, нормировав соответствующие выражения из работы [10] на полный поток энергии. Полный поток должен сохраняться, т.е. является инвариантом астигматического преобразования

$$\ell_{total}(z = 0) = \Lambda_V(z) + \Lambda_A(z). \tag{20}$$

С другой стороны, отображение состояний астигматического сЛГ-пучка на орбитальную сферу Пуанкаре показало, траектория на сфере вращается вокруг оси S_1 без изменения площади, ограниченной траекторией на сфере. Отсюда сразу следует сохранение корня квадратов ОУМ $\ell_z(z)$ и поперечного момента интенсивности $4W_{xy}(z)$, равного ОУМ $\ell_z(z = 0)$ на входе в цилиндрическую линзу. Сравнение этих двух подходов демонстрирует рис. 4. Мы видим, что, несмотря на различие в форме кривых $\Lambda_V(z)$, $\Lambda_A(z)$ и $\ell_z(z)$, $4W_{xy}(z)$, сумма $\Lambda_V(z) + \Lambda_A(z) = \ell_{total}(z = 0)$ и $LW = \pm \sqrt{\ell_z^2(\varepsilon, \theta, Z_2) + (4W_{xy}(\varepsilon, \theta, Z_2))^2}$ равны общему ОУМ $\ell_z(z = 0)$ на входе в цилиндрическую линзу. Однако это не значит, что поперечный момент интенсивности $4W_{xy}(z)$ и астигматическая Λ_A часть ОУМ описывают один и тот же астигматический процесс, хотя W_{xy} и характеризует асимметрию пучка [17 – 19]. С нашей точки зрения, более надежным подходом в определении общего ОУМ является метод коррекции с помощью сферической линзы, совершающей Фурье-преобразование [20].

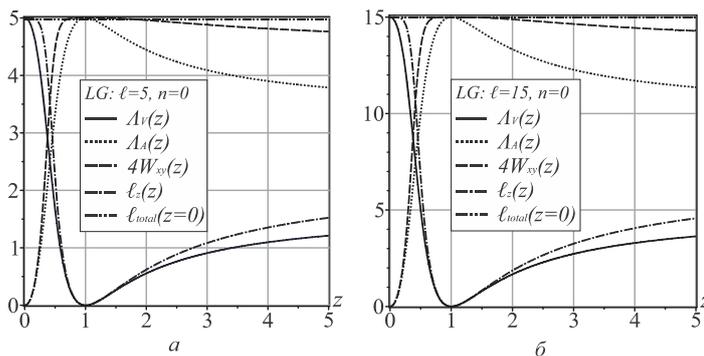


Рис. 4. Эволюция вихревого $\Lambda_V(z)$, астигматического $\Lambda_A(z)$, общего $\ell_{total}(z = 0)$ ОУМ и их сравнение с $4W_{xy}(z)$, $\ell_z(z)$, рассчитанные по формулам (18), (19), (20), (9) и (14) соответственно, после цилиндрической линзы с $f_x = 0,5$ м, $z_0 = 1$ м

1.2.2. Фурье-инварианты ОУМ астигматического преобразования и их разрушение

Авторы статьи [21] (см. также главу 6 в монографии [22] и литературу в ней) предложили особый вид структурированного пучка, содержащий вихревую эллиптическую моду и астигматическую безвихревую моду с согласованными радиусами перетяжек. Они показали, что сумма вихревого ОУМ от вихревой моды и астигматического ОУМ от астигматической моды сохраняется при распространении в дальней зоне дифракции (аналог Фурье-преобразования). Такое семейство пучков стали называть Фурье-инвариантными гауссовыми пучками. В то же время недавно нами было показано [20], что Фурье-преобразование сЛГ-пучка позволяет подавить астигматическую составляющую ОУМ, так что в Фурье-плоскости восстанавливается пучок с

исходной картиной интенсивности до цилиндрической линзы и тем же ОУМ. Однако эти экспериментальные исследования касались только астигматического преобразования ЭГ-пучков. В этом подпараграфе мы постараемся распространить этот принцип на широкий класс обобщенных структурированных пучков и сравним полученные результаты с подходом вихревых и астигматических ОУМ, составляющих общий ОУМ.

Стандартное преобразование Фурье сферической линзой соответствует такому положению линзы, когда объект и его образ располагаются на расстояниях, равных фокусному расстоянию линзы [23], т.е. для нашего случая на рис. 1 это значит $Z_1 = Z_2 = f_{sh}$. Поскольку ОУМ обобщенного сЛГ-пучка зависит от фазового θ -параметра, то эта зависимость $\ell_z(\theta)$ предопределяет все исследования Фурье-инвариантов. В качестве примера (рис. 5а) представлена зависимость $\ell_z(\theta)$ для $n = 10, \ell = 1, \varepsilon = -1$. Рис. 5б иллюстрирует эволюцию обобщенного сЛГ-пучка вдоль оси Z_2 при $Z_1 = f_{sh} = 0,1$ для фазового параметра $\theta = 3,043$, соответствующего максимуму ОУМ. Здесь следует заметить, что максимум ОУМ приходится на положение первой критической плоскости $Z_2 = 0,09$, в то время как состояние ОУМ пучка и другие его параметры наблюдаются в Фурье-плоскости $Z_2 = 0,1$ (пунктирная прямая на рис. 5б). Для наблюдения Фурье-инвариантов вдоль оси Z_1 после цилиндрической линзы необходимо зафиксировать положение наблюдения $Z_2 = f_{sh} = 0,1$ и сдвигаться вдоль оси Z_1 . Оказалось, что Фурье-инвариантами являются не только общий ОУМ LW , но и ОУМ $\ell_z(\theta)$ вместе с поперечным моментом интенсивности $4W_{xy}(\theta)$, как показано на рис. 5в для $n = 10, \ell = 1, \varepsilon = -1, \theta = 3,045$ и на рис. 5г для $n = 1, \ell = 1, \varepsilon = -1, \theta = 3\pi/4$.

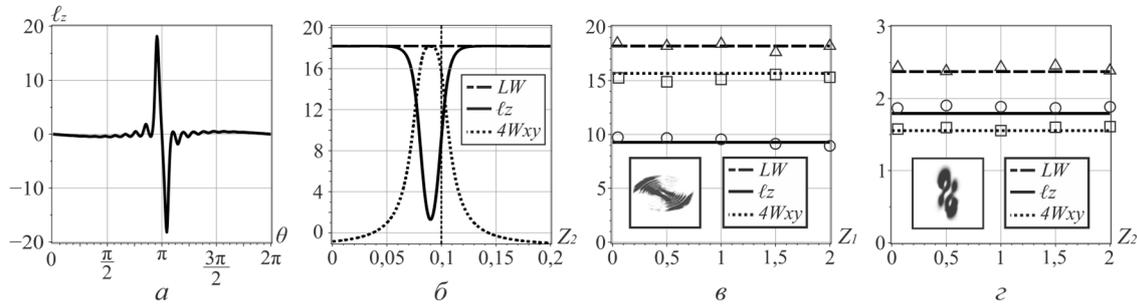


Рис. 5. Фурье-инварианты астигматического преобразования обобщенного сЛГ-пучка. (а) кривая ОУМ по фазовому θ – параметру; (б) эволюция ОУМ поперечного момента интенсивности $4W_{xy}$ и полного углового момента LW ; пунктирная линия указывает на Фурье-плоскость; (в) Фурье-инварианты ОУМ для $n = 10, \ell = 1, \varepsilon = -1, \theta = 3$; (г) $n = 1, \ell = 1, \varepsilon = -1, \theta = 3,045$; кружки, квадратики и треугольники – экспериментальные точки. На выноске – картины интенсивности при первом всплеске ОУМ для $Z_1 = Z_2 = f_{sh} = 0,1$

Однако есть ряд деталей, при которых Фурье-инвариантность может нарушаться. Действительно, процессом преобразования состояния пучка управляет астигматическая фаза Гуи. Ее узкий всплеск на рис. 2г заставляет быстро изменяться тонкую структуру поля вблизи первой критической плоскости, которая располагается в области фокуса сферической линзы. Чтобы состояние системы не изменялось при сдвиге плоскости наблюдения Z_2 , требуется радикально увеличить контур астигматической фазы. Фурье-преобразование выполняет это действие, что подтверждает прямая линия при $Z_2 = Z_1 = f_{sh} = 0,1$ на рис. 6. Тем не менее стоит только немного сдвинуть плоскость наблюдения Z_2 , как Фурье-инвариантность резко нарушается (см. рис. 6). Степень такого нарушения зависит от длины Релея z_0 . Кривые на рис. 6 соответствуют небольшому сдвигу $\Delta Z_2 = \pm 0,01$. Для компьютерного моделирования формировался пучок с длиной Релея $z_0 = 1$ м, так что такой сдвиг соответствует $\Delta Z_1 = 1$ см. Это не критично при использовании стандартного оптомеханического оборудования. Однако при длине Релея $z_0 = 10$ см сдвиг уменьшается до $\Delta Z_1 = 1$ мм, что указывает на использование специальных устройств. Однако даже небольшое смещение плоскости наблюдения может стать критическим даже при большой длине Релея при измерении ОУМ. Об этом свидетельствует рис. 5б, где резкий всплеск ОУМ как раз приходится на область Фурье-преобразования.

2. Эксперимент

Для измерения орбитальных параметров Стокса в астигматическом обобщенном сЛГ-пучке использовался метод, основанный на аналогии с измерением поляризационных параметров Стокса, подробно описанный в нашей статье [14]. Аналогом поляризатора служили моменты интенсивности W_{xx}, W_{yy}, W_{xy} и W_{yx} . Моменты интенсивности W_{xx} и W_{yy} выделяли направления вдоль x - и y -осей в первой критической плоскости, в то время как W_{xy} и W_{yx} – направления под углом $\pi/4$ и $3\pi/4$. В качестве $\lambda/4$ пластины выступала цилиндрическая линза и свободное пространство на длине до второй критической плоскости.

1) Процесс измерения и экспериментальная установка, эскиз которой показан на рис. 1, также подробно описаны в работе [14]. В этой серии экспериментов исследовалась эволюция ОУМ и поперечного момента интенсивности $4W_{xy}$ вдоль оси Z_2 в обобщенном сЛГ-пучке с ЛГ- и ЭГ- начальными состояниями (при $\varepsilon = 0$) для случая максимума ОУМ при $\theta = 3,047, \varepsilon = -1$ (ЛГ-начальное состояние) и $\theta = 3,043, \varepsilon = -1$ (ЭГ-

начальное состояние), как видно из рис. 3. Особое внимание уделялось области первой критической плоскости $Z_2 = 0,1$, где ОУМ и W_{xy} быстро изменяются. Лазерное пятно на длине волны $\lambda = 0,6328$ мкм радиусом $w_0 \approx 0,53$ мм (что соответствует длине Релея $z_0 \approx 1$ м) формировалось на входной плоскости цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f_x = f_{cl} = 0,5$ м. Размер пятна контролировался измерением W_{xx} и W_{yy} моментов интенсивности (см. рекомендации ISO [24]). Как видно из рис. 3а, положения экспериментальных точек хорошо согласуется с кривой компьютерного моделирования при средней ошибке измерений не хуже 4%. Кроме того, важно было экспериментально показать, что при смене начального состояния $LG \rightleftharpoons HG$ наблюдается взаимная замена зависимостей $l_z(Z_2) \rightleftharpoons 4W_{xy}(Z_2)$. Также экспериментально подтвердился теоретический результат (17) постоянства корня из суммы квадратов ОУМ и поперечного момента интенсивности.

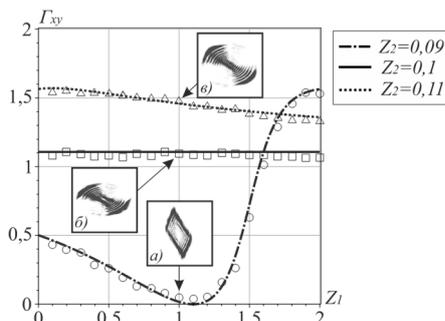


Рис. 6. Астигматическая фаза Гуй Γ_{xy} Фурье инвариантного преобразования при $Z_2 = 0,1$ и ее изменения при небольшом сдвиге $Z_2 = 0,09$ и $Z_2 = 0,11$ плоскости наблюдения. Вставка: картины интенсивности для $n = 10, \ell = 1, \varepsilon = -1, \theta = 3,047$ (а) $Z_2 = 0,09$, (б) $Z_2 = 0,1$ и (в) $Z_2 = 0,11$. Кружки, треугольники и квадраты – эксперимент

2) Для экспериментального исследования Фурье-инвариантов астигматического преобразования была модернизирована экспериментальная установка, эскиз которой приведен на рис. 7. Для формирования обобщенного сЛГ-пучка использовалась использовалась SLM-модулятор типа Thorlabs EXULUS-4K1/M, а как фотодетектор использовался CMOS типа Michrome 20, который располагался на расстоянии $Z_2 = Z_1 = f_{sh} = 0,1$ м. Фотодетектор совместно со сферической линзой $f_{sh} = 0,1$ м располагались на оптическом столике типа Thorlabs “MAX603D”. В процессе измерений сферическая линза и CMOS смещались совместно вдоль оси оптической системы для измерения Фурье-инвариантов астигматического обобщенного сЛГ-пучка. Изменялись орбитальные параметры Стокса для обобщенного сЛГ-пучка с начальным LG -состоянием для $n = 10, \ell = 1$ и $n = 1, \ell = 1$ с управляющими параметрами $\varepsilon = -1, \theta = 3,043$ при смещении системы L - линза – CMOS-камера вдоль оси пучка. Фазовый параметр $\theta = 3,043$ выбирался для максимального значения ОУМ, как показано на рис. 5з. Эволюция Фурье-инвариантного обобщенного сЛГ-пучка представлена на рис. 5в, г. Экспериментальные точки вдоль прямых $l_z(Z_1), W_{xy}(Z_1), LW(Z_1)$ свидетельствуют о том, что ОУМ, W_{xy} и LW являются инвариантами астигматического преобразования.

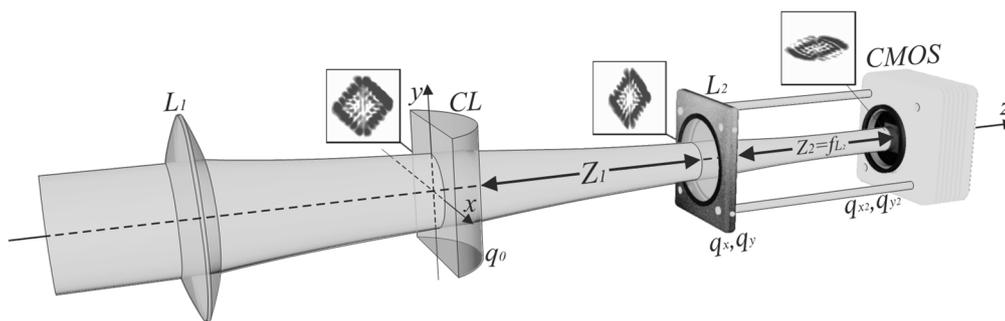


Рис. 7. Эскиз части экспериментальной установки с двумя сферическими линзами L_1, L_2 и одной цилиндрической CL -линзой между ними. CMOS-камера помещена в плоскости $Z_1 = Z_2 = f_{sh} = 0,1$ м и смещается вдоль оси астигматической системы вместе со сферической линзой

Даже небольшое нарушение условий Фурье-инвариантов мгновенно сказывается на астигматической разности фаз Гуй, которая радикально изменяет ОУМ и поперечный момент интенсивности W_{xy} в окрестности первой критической плоскости. Как правило, измерение фазы Гуй сводится к использованию специальных интерферометрических методов (см., например, работу [25]) и тщательного контроля процесса измерений. Тем не менее наш подход матриц интенсивности позволяет непосредственно измерять астигматическую фазу Γ_{xy} , не прибегая к интерферометрическому измерению, но непосредственно используя формулу (16) как арктангенс

отношения третьего и второго орбитальных параметров Стокса. Чтобы обнаружить отклонения астигматической фазы от прямой линии на рис. 5в, з, мы смещали плоскость наблюдения (*CMOS*-детектор) на длину $\Delta Z_1 = \pm 0,01$. Измерения осуществлялись для двух типов обобщённых сЛГ-пучков с параметрами $n = 10$, $\ell = 1$ и $n = \ell = 1$ в области резкого изменения ОУМ для (см. рис. 5б) для $\theta = 2,994$ и $\theta = 2,356$ соответственно, при амплитудном параметре $\varepsilon = -1$. Экспериментальные данные с хорошей точностью соответствуют изменениям кривых аномальной фазы на рис. 5в, з. Бросается в глаза несимметричное изменение кривых при одинаковом смещении на $\Delta Z_1 = -0,01$ и $\Delta Z_1 = 0,01$. Асимметрия кривых становится понятной, если обратиться к рис. 5б. Пунктирная линия на рисунке указывает на положение плоскости наблюдения Фурье-инвариантности. Смещение $\Delta Z_1 = -0,01$ сдвигает плоскость наблюдения в область максимума ОУМ, где его величина медленно изменяется. Соответственно, медленно изменяется аномальная фаза на верхней кривой на рис. 6. Смещение плоскости наблюдения в противоположном направлении приходится на участок быстрого изменения ОУМ на рис. 5б, что и отражается в быстром изменении аномальной фазы на нижней кривой на рис. 6з.

Заключение

Мы теоретически и экспериментально исследовали условия, при которых основные свойства астигматических обобщённых сЛГ-пучков (ОУМ, орбитальные параметры Стокса и их комбинации) не изменяются (являясь их инвариантами) при распространении через оптическую систему из двух сферических и цилиндрической линзы между ними. Было показано, что обобщённый сЛГ-пучок испытывает быстрые изменения ОУМ и поперечного момента интенсивности после цилиндрической линзы. Однако корень из суммы квадратов ОУМ и поперечного момента интенсивности остается неизменным и равным ОУМ на входе в цилиндрическую линзу. Для обеспечения Фурье-инвариантности ОУМ вдоль всей длины астигматического пучка фотодетектор закреплялся в передней фокальной плоскости второй сферической линзы, и оптическая конструкция сферической линзы и фотодетектора смещала как единое целое вдоль оси пучка. Было показано, что Фурье-преобразование формирует инварианты ОУМ и поперечного момента интенсивности по всей длине пучка. Мы обнаружили, что даже небольшие отклонения плоскости фотодетектора от фокальной плоскости приводят к разрушению Фурье-инвариантов. Компьютерное моделирование и эксперимент показали, что процессами формирования и разрушения Фурье-инвариантов управляет астигматическая фаза Гуи.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект №24–22–00278).

References

- [1] Weng Yi, Pan Z. Orbital angular momentum based sensing and their applications: a review. *J Lightwave Technol* 2023; 41(7): 2007–2016.
- [2] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. *Nat Photonics* 2021; 15: 253–262. DOI: 10.1038/s41566-021-00780-4.
- [3] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4): 210–213. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- [4] Zhang K, Wang Y, Yuan Y, Burokur SN. A review of orbital angular momentum vortex beams generation: From traditional methods to metasurfaces. *Appl Sci* 2020; 10(3): 1015. DOI: 10.3390/app10031015.
- [5] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141–156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.
- [6] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1–2): 123–135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-k.
- [7] Abramochkin EG, Razuvaeva EV, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams and its transformation in astigmatic optical systems. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya* 2006; 2(42): 103–121.
- [8] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [9] Van Enk SJ, Nienhuis SJ. Eigenfunction description of laser beams and orbital angular momentum of light. *Opt Commun* 1992; 94(1–3): 147–158. DOI: 10.1016/0030-4018(92)90424-P.
- [10] Anan'ev YuA, Bekshaev AY. Theory of intensity moments for arbitrary light beams. *Opt Spectrosc* 1994; 76(4): 624–635.
- [11] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. *J Opt Soc Am A* 2003; 20(8): 1635–1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
- [12] Volyar A, Bretsko M. Mapping structured Laguerre–Gaussian beam states onto the orbital Poincaré sphere in the form of controllable spatial trajectories. *J Opt Soc Am A* 2024; 41(9): 1648–1655. DOI: 10.1364/JOSAA.529894.
- [13] Volyar A, Bretsko M, Khalilov S, Akimova Y. Simple direct measurement of the orbital Stokes parameters in structured vortex beams. *Photonics* 2024; 11(11): 1095. DOI: 10.3390/photonics11111095.
- [14] Volyar A, Bretsko M, Khalilov S, Akimova Ya. Self-healing and self-matching effects in astigmatic structured beams as a basis for measuring orbital Stokes parameters. *Appl Opt* 2025; 64(12): 3241–3249. DOI: 10.1364/AO.558709.
- [15] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Ya, Bretsko M. Super bursts of the orbital angular momentum in astigmatic-invariant structured LG beams. *Opt Lett* 2022; 47(21): 5537–5540. DOI: 10.1364/OL.474385.
- [16] Abramochkin E, Volostnikov V. *Modern optics of Gaussian beams [In Russian]*. Moscow: “Fizmatlit” Publishers; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.

- [17] Nemes G, Siegman AE. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by the use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics. *J Opt Soc Am A* 1994; 11(8): 2257–2264. DOI: 10.1364/JOSAA.11.002257.
- [18] Eppich B, Gao C, Weber H. Determination of the ten second order intensity moments. *Opt Laser Technol* 1998; 30(5): 337–340. DOI: 10.1016/S0030-3992(98)00063-2.
- [19] Cutolo A, Isemia T, Izzo II, Pierri R, Zeni L. Transverse mode analysis of a laser beam by near- and far-field intensity measurements. *Appl Opt* 1995; 34(34): 7974–7978. DOI: 10.1364/AO.34.007974.
- [20] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Ya. Engineering orbital angular momentum in structured beams in general astigmatic systems via symplectic matrix approach. *Photonics* 2024; 11(3): 191. DOI: 10.3390/photonics11030191.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. A variety of Fourier-invariant Gaussian beams. *Computer Optics* 2018; 42(5): 727–735. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-5-727-735.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. *Topological Charge of Optical Vortices*. Boca Raton: Taylor & Francis Ltd; 2022. DOI: 10.1201/9781003326304.
- [23] Goodman JW. *Introduction to Fourier Optics*. Roberts and Company Publishers; 2005. ISBN: 9780974707723.
- [24] ISO 11146-2:2021. *Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios. Part 2: General astigmatic beams*. Geneva, Switzerland: ISO; 2021.
- [25] Stoyanov L, Gorunski N, Mincheva M, Drenkov P, Lazarov E, Dreischuh A. Experimental Verification of the Gouy Phase for Higher-Order Hermite-Gaussian Beams. *C R Acad Bulg Sci* 2024; 77(8): 1138–1145. DOI: 10.7546/CRABS.2024.08.03.

Сведения об авторах

Воляр Александр Владимирович – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Брецько Михаил Владимирович – кандидат физико-математических наук (2022), старший преподаватель кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика. E-mail: mihailbretcko4@gmail.com

Халилов Сервер Искандарович – ассистент кафедры бизнес-информатики и математического моделирования Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Акимова Яна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: akimova.yana@yandex.ru

Поступила в редакцию 15 февраля 2025 г. Окончательный вариант – 25 марта 2025 г.

How the astigmatic Gouy phase control invariants of structured beams

A.V. Volyar¹, M.V. Bretsko¹, S.I. Khalilov¹, Y.E. Akimova¹

¹ Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4

Abstract

The article theoretically and experimentally highlights the properties of Fourier invariants in generalized structured Laguerre–Gauss beams in an optical system of two spherical and one cylindrical lenses between them. The first spherical lens forms a generalized structured Laguerre–Gauss beam with a given geometry at the cylindrical lens input. The second spherical lens performs a Fourier transform of the astigmatic structured beam formed by the cylindrical lens. The photodetector located in the focal plane of the second spherical displaced along the beam axis together with it. The analysis of the orbital Stokes parameters is performed using second-order intensity matrix methods. It has been found that the orbital Stokes parameters, including the orbital angular momentum, do not change during free propagation of structured astigmatic beams of any order for any values of the control parameters and are their invariants. It is shown that violation of the Fourier invariance conditions leads to breaking the beam Fourier invariants down, and their transformations are controlled by the astigmatic Gouy phase.

Keywords: orbital angular momentum, structured Laguerre–Gaussian beam, Stokes orbital parameters.

Citation: Volyar AV, Bretsko MV, Khalilov SI, Akimova YE. How the astigmatic Gouy phase control invariants of structured beams. *Computer Optics* 2026; 50(1): 1729. DOI: 10.18287/COJ1729.

Acknowledgements: This work was financially supported by the Russian Science Foundation under project No. 24–22–00278.

About authors

Alexander Vladimirovich Volyar (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com

Mikhail Vladimirovich Bretsko, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his Ph. D. in Physics in 2022. He is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co–author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics. E-mail: mihailbretcko4@gmail.com

Server Iskandarovich Khalilov, (b. 1994) assistant of Business Informatics and Mathematical Modeling department of the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University named after V.I. Vernadsky. Research interests: singular optics, laser physics. E-mail: server.khalilov.94@mail.ru

Yana Evgenievna Akimova, (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her Ph. D. in Physics in 2022. She is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co–author of about 40 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics. E-mail: ak1mova.yana@yandex.ru

Received February 15, 2025. The final version – March 25, 2025.
