

Топологический заряд осевой суперпозиции Гауссовых оптических вихрей

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалев^{1,2}, А.Г. Налимов^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассмотрен топологический заряд конечной суперпозиции оптических вихрей с гауссовой огибающей. Теоретически и численно показано, что в начальной плоскости у такой суперпозиции топологический заряд равен числу нулей комплексного многочлена степени n , где n – максимальный топологический заряд оптических вихрей в суперпозиции, находящихся в круге единичного радиуса вместе с границей. А при распространении в свободном пространстве топологический заряд такой суперпозиции всегда равен n . Если модуль коэффициента члена суперпозиции с топологическим зарядом, равным k , больше суммы модулей всех остальных коэффициентов суперпозиции, то в круге единичного радиуса лежат k нулей и топологический заряд всей суперпозиции в начальной плоскости равен k ($k \leq n$). Если все коэффициенты суперпозиции равны по модулю, то в начальной плоскости топологический заряд равен половине ($n/2$), но при распространении топологический заряд равен опять n . В этом случае дополнительные нули суперпозиции оптических вихрей формируются почти сразу на расстоянии, много меньшем длины волны от начальной плоскости, и на расстоянии от оптической оси большем, чем радиус ограничивающей апертуры начального поля.

Ключевые слова: оптический вихрь, топологический заряд, суперпозиция оптических вихрей, пучки Бесселя, пучки Лагерра–Гаусса.

Цитирование: Котляр, В.В. Топологический заряд осевой суперпозиции Гауссовых оптических вихрей / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 1. – 1659 – DOI: 10.18287/COJ1659.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Topological charge of axial superposition of Gaussian optical vortices. Computer Optics 2026; 50(1): 1659. DOI: 10.18287/COJ1659.

Введение

Топологический заряд (ТЗ) оптических вихрей является важной характеристикой лазерных пучков, несущих орбитальный угловой момент (ОУМ) [1]. Хотя в оптике конструктивное определение для расчета ТЗ было дано М. Берри [2], в теории функций комплексной переменной [3] давно было известно, что число корней (нулей) комплексного многочлена равно степени многочлена, а число нулей аналитической (целой) функции – счетное [4]. Поэтому ТЗ конечной суперпозиции оптических вихрей равен числу нулей интенсивности этой суперпозиции с учетом их вырожденности. ТЗ отдельных модовых пучков типа пучков Лагерра–Гаусса [5] или Бесселя–Гаусса [6] хорошо известен и равен нормированному ОУМ. Но если рассматривать суперпозицию Бесселевых пучков, пучков Бесселя–Гаусса [7] одинакового масштаба или структурно-инвариантную суперпозицию пучков Лагерра–Гаусса [8–10], то расчет ТЗ таких суперпозиций, как будет показано в данной работе, сводится к расчету числа нулей комплексного многочлена в круге единичного радиуса. Известно несколько [11] теорем о границах нулей комплексного многочлена. Так, теорема Лагранжа утверждает, что все корни многочлена лежат в круге единичного радиуса, если сумма модулей всех коэффициентов многочлена меньше модуля коэффициента многочлена при максимальной степени. А теорема Коши утверждает, что все корни многочлена лежат в круге радиуса, равного максимальному по модулю коэффициенту плюс единица. Другая теорема Руше [12] утверждает, что если модуль одной аналитической (точнее голоморфной) функции больше модуля другой аналитической функции на замкнутой границе некоторой области, то число нулей большей функции равно числу нулей суммы этих функций. Для сингулярной оптики это означает, что ТЗ конечной суперпозиции оптических вихрей (ОВ) равен максимальному ТЗ в суперпозиции. Это также означает, что если у какой-то суперпозиции ОВ имеется n невырожденных нулей интенсивности, каждое из которых имеет ТЗ +1, то, перемещая эти нули по сечению пучка, можно изменять распределение интенсивности в пучке, но ТЗ всей суперпозиции будет оставаться неизменным и равным n . В итоге можно собрать все нули в центр пучка, тогда такой ноль будет иметь вырожденность порядка n , а суперпозиция сведется к одному ОВ с ТЗ, равным n . В работе [13] рассматривалась суперпозиция ОВ в виде геометрической прогрессии. Было показано, что в начальной плоскости у такой суперпозиции ТЗ с максимальным ТЗ n может быть полуцелый $n/2$, но при распространении ТЗ суперпозиции становится равным n .

В данной работе мы попытались ответить на некоторые вопросы, связанные с ТЗ суперпозиции ОВ. Чем объясняется полуцелый ТЗ, $n/2$, в начальной плоскости геометрической прогрессии ОВ с одинаковыми

коэффициентами? Как при распространении в пространстве формируются дополнительные ОВ, чтобы ТЗ стал равен n . Как с помощью коэффициентов суперпозиции можно управлять ТЗ в начальной плоскости?

1. Суперпозиция пучков Бесселя одинакового масштаба

Рассмотрим осевую суперпозицию вихревых пучков Бесселя одинакового масштаба:

$$E_b(r, \varphi, z = 0) = \sum_{p=0}^n a_p J_p(\alpha r) \exp(in\varphi), \tag{1}$$

где $J_p(x)$ – функция Бесселя, $\alpha = k \sin \theta$ – параметр масштаба пучка Бесселя, k – волновое число, θ – полуугол при вершине конической волны, формирующей пучок Бесселя. При распространении в свободном пространстве суперпозиция (1) будет сохранять свою структуру, то есть будет бездифракционной на некотором расстоянии от начальной плоскости. В дальней зоне дифракции или в фокусе сферической линзы суперпозиция (1) сформирует световое кольцо некоторого радиуса:

$$E_b(r, \varphi, f) = \alpha \delta \left(r - \frac{\alpha f}{k} \right) \sum_{p=0}^n (-i)^{n+1} a_p \exp(in\varphi), \tag{2}$$

где f – фокусное расстояние идеальной сферической линзы, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Чтобы определить топологический заряд поля (2), надо определить ТЗ комплексного многочлена порядка n в круге радиуса $r = 1$.

2. Структурно устойчивая суперпозиция пучков Лагерра–Гаусса

К аналогичному многочлену (2) сводится и задача определения ТЗ структурно устойчивой суперпозиции пучков Лагерра–Гаусса, комплексная амплитуда которой в начальной плоскости имеет вид:

$$E_{LG}(r, \varphi, z = 0) = \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_p \left(\frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^{n-2p}, L_p^{n-2p} \left(\frac{2r^2}{w^2} \right) \exp(i(n-2p)\varphi), \tag{3}$$

где w – радиус перетяжки гауссова пучка, $L_p^n(x)$ – многочлен Лагерра, порядок которого равен числу p . Суперпозиция (3) является структурно стабильной, так как все слагаемые имеют одинаковую фазу Гоу: $(1+n)\tan(z/z_0)$, где z_0 – расстояние Рэлея. Так как многочлен Лагерра при больших значениях аргумента равен слагаемому с наибольшей степенью, $L_p^q(x \gg 1) \approx (-x)^p (p!)^{-1}$, то вместо (3) можно записать:

$$E_{LG}(r, \varphi, z = 0) \approx \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}r}{w} \right)^n, e^{in\varphi} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_p \frac{(-2)^p}{p!} \exp(-i2p\varphi). \tag{4}$$

Из (4) видно, что при больших значениях радиуса окружности r комплексная амплитуда суперпозиции пучков ЛГ представляет собой суперпозицию оптических вихрей, аналогичную суперпозиции (2). Таким образом, чтобы определить ТЗ суперпозиции пучков ЛГ (3), надо определить ТЗ комплексного многочлена степени n в круге единичного радиуса.

3. Топологический заряд суперпозиции оптических вихрей

Амплитуда структурно устойчивого светового поля может быть выражена через нули интенсивности в сечении пучка [14, 15]:

$$E(r, \varphi) = E_0 \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \prod_{p=1}^n (r e^{i\varphi} - \gamma_p)^{n_p}, \tag{5}$$

где E_0 – действительная постоянная, w – радиус перетяжки гауссова пучка, (r, φ) – полярные координаты в сечении пучка, $\gamma_p = r_p \exp(i\varphi_p)$ – комплексный корень многочлена порядка n , который может стремиться к бесконечности, n_p – номер вырожденности корня. Так как световое поле (5) при распространении в свободном пространстве сохраняет свою структуру, то будем его рассматривать в начальной плоскости (плоскости перетяжки). Представим правую часть в виде амплитуды и фазы:

$$E(r, \varphi) = A \exp(i\Phi), \tag{6}$$

$$\Phi = \sum_{p=1}^n n_p \arctg \left(\frac{r \sin \varphi - r_p \sin \varphi_p}{r \cos \varphi - r_p \cos \varphi_p} \right),$$

Топологический заряд поля (6) будем находить по формуле М. Берри [2]:

$$A = |E_0| \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \times \prod_{p=1}^n (r^2 + r_p^2 - 2r r_p \cos(\varphi - \varphi_p))^{n_p/2}. \tag{7}$$

$$TC[E(r, \varphi)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Подставим фазу из (6) в (7), получим:

$$TC[E(r, \varphi)] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n n_p \left(1 + \frac{r^2 - r_p^2}{|r^2 - r_p^2|} \right). \tag{8}$$

Из (8) следует, что при $r \rightarrow \infty$ ТЗ светового поля (5) равен сумме вырожденности всех нулей интенсивности:

$$TC[E(r \rightarrow \infty, \varphi)] = \sum_{p=1}^n n_p. \quad (9)$$

Из (8) видно, что если радиус окружности, на которой находится ноль интенсивности r_p , больше текущего радиуса окружности r , то этот ноль дает нулевой вклад в сумму (8). Поэтому если ограничить радиус круга единицей ($r = 1$), то ТЗ поля (5) будет равен числу нулей, лежащих в этом круге:

$$TC[E(r = 1, \varphi)] = \sum_{p=1}^m n_p, \quad (10)$$

где m – это число нулей, для которых $r_p < 1$.

4. Корни комплексного многочлена и нули суперпозиции оптических вихрей

На практике комплексная амплитуда задается как суперпозиция оптических вихрей, а не как произведение нулей функции, так как нули функции нужно еще найти. Поэтому дальнейшая наша цель будет заключаться в определении ТЗ суперпозиции гауссовых оптических вихрей с произвольными весовыми коэффициентами:

$$E(r, \varphi) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{p=0}^n a_p \exp(ip\varphi), \quad (11)$$

где a_n – весовые коэффициенты, могут быть комплексными числами. Чтобы найти ТЗ пучка (11), рассмотрим комплексные многочлены n -й степени:

$$P_n(r, \varphi) = \sum_{p=0}^n a_p (re^{i\varphi})^p = \sum_{p=0}^n a_p z^p. \quad (12)$$

Известно [3], что многочлен n -й степени имеет n комплексных корней с учетом вырожденности. Поэтому ТЗ поля-многочлена (12) равен также n , а ТЗ поля (11) равен числу корней (нулей) многочлена (12), которые лежат в круге $r = 1$ (или $r/w = 1$). Известна теорема Руше [12], которая утверждает, что если имеет место неравенство

$$|a_k|r^k > |a_0| + |a_1|r + \dots + |a_{k-1}|r^{k-1} + |a_{k+1}|r^{k+1} + \dots + |a_n|r^n, \quad (13)$$

то в круге радиуса r имеются k корней с учетом их вырожденности. То есть если коэффициенты многочлена (11) или (12) при $r = 1$ удовлетворяют неравенству (13), то ТЗ поля (11) равен k .

5. Амплитуда поля в зоне дифракции Френеля

Заметим, что световое поле (11) не является структурно устойчивым и при распространении в свободном пространстве меняет свою структуру. В работе [16] было получено асимптотическое выражение для комплексной амплитуды начального поля

$$E_n(r, \varphi) = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right) \quad (14)$$

в зоне дифракции Френеля. Приведем это выражение:

$$E_n(r, \varphi, z) = E_0 (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z} + in\varphi\right) \sqrt{\xi} e^{-\xi} \left(I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi)\right), \quad (15)$$

$$\xi = \left(\frac{z_0 r}{zw}\right)^2 \frac{1}{2q(z)}, \quad q(z) = 1 - i\frac{z_0}{z}, \quad (15)$$

$$E_n(r \rightarrow \infty, \varphi, z) \approx E_0 (-i)^{n+1} \left(\frac{z_0}{2zq(z)}\right) \left(\frac{n}{4\xi}\right) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z} + in\varphi\right). \quad (16)$$

Выражение (15) – это комплексная амплитуда поля (14) на расстоянии z от начального поля, а выражение (16) – это асимптотика комплексной амплитуды (15) при стремлении r к бесконечности. Используя (16), нетрудно записать асимптотику для суперпозиции оптических вихрей (11):

$$E(r \rightarrow \infty, \varphi, z) \approx E_0 \left(-i\frac{z_0}{8zq(z)\xi}\right) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) \sum_{p=1}^n (-i)^p p a_p \exp(ip\varphi). \quad (17)$$

Из (17) видно, что при распространении в свободном пространстве начальное поле (11) меняет свою структуру, так как каждый весовой коэффициент суперпозиции умножается на величину ТЗ данной угловой гармоники, pa_p . То есть если в начальном поле модули весовых коэффициентов суперпозиции (11) были равны $|a_p|$, то при распространении в свободном пространстве модули коэффициентов суперпозиции (11) увеличиваются, $p|a_p|$.

6. Сингулярная оптика и теория функций комплексной переменной

Интересно, что многие вопросы, связанные с топологическим зарядом оптических вихрей, можно решить с помощью хорошо известных даже студентам университетов теорем из теории функций комплексной переменной [3]. Например, само понятие ТЗ, данное М. Берри (3), следует из теоремы о логарифмическом вычете. Согласно

этой теореме число нулей N аналитической функции $f(z)$ в области D с границей C , у которой нет полюсов в этой области, равно

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \tag{18}$$

где $f'(z)$ – производная от функции $f(z)$ по z . Интеграл в правой части (18) можно преобразовать:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d(\ln f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z), \tag{19}$$

где \ln – натуральный логарифм, \arg – аргумент комплексного числа, Δ_C – приращение аргумента функции при полном обороте по замкнутой границе C . Видно, что определение ТЗ (3) совпадает с определением числа нулей в области D , если это круг с границей в виде окружности C . Причем обход границы C в положительном направлении следует делать против часовой стрелки. Интересно, что когда аргумент делает один полный оборот вокруг начала координат (или просто по границе C), то аргумент функции $f(z)$ совершает $2\pi N$ оборотов. Таким образом, топологический заряд оптического вихря, равен числу нулей целой аналитической функции с учетом их вырожденности, если эта целая функция описывает комплексную амплитуду оптического вихря. При этом кривая интегрирования C должна охватывать все возможные нули. Еще одним условием применения уравнений (18) и (19) является отсутствие нулей на самой границе C .

Еще одной важной теоремой комплексного анализа для сингулярной оптики является теорема Руше [12]. Теорема Руше утверждает, что если две аналитические (точнее голоморфные) функции $f(x)$ и $g(x)$ в области D с границей C и на границе модуль одной функции больше модуля другой, $|f(x)| > |g(x)|$, то число нулей в области D у функции $f(x)+g(x)$ такое же, как и у функции $f(x)$. Из этой теоремы следует, что число нулей у многочлена (11) степени n равно n . Действительно, модуль последнего n -го члена суперпозиции (12) больше модуля суммы всех остальных членов при большом радиусе окружности ($r \gg 1$):

$$|a_n r^n e^{in\varphi}| > |a_0 + a_1 r e^{i\varphi} + a_2 r^2 e^{i2\varphi} + \dots + a_{n-1} r^{(n-1)} e^{i(n-1)\varphi}|. \tag{20}$$

Поэтому, считая левую часть неравенства (20) как модуль функции $f(x)$ в теореме Руше, а правую часть неравенства (20) как модуль функции $g(x)$, можно утверждать, что число корней у многочлена комплексной переменной порядка n , $f(x)+g(x)$ столько же, сколько нулей у функции $f(x)=a_n r^n \exp(in\varphi)$. А у этой функции один корень в центре координат с вырожденностью n . То есть из теоремы Руше следует основная теорема алгебры, что у комплексного многочлена степени n имеются n корней, с учетом их вырожденности.

Из теоремы Руше также следует, что если коэффициенты многочлена (12) удовлетворяют неравенству (13), то в круге радиуса r будет находиться k корней многочлена. В частности, топологический заряд в начальной плоскости суперпозиции оптических вихрей (11) при $r=1$ будет равен k .

Из хорошо известной теоремы Виета, которая устанавливает связь между корнями многочлена и его коэффициентами, следует, что свободный член многочлена a_0 равен произведению всех корней многочлена. Это означает, во-первых, что при действительном коэффициенте a_0 комплексные корни появляются парами (корень и ему сопряженный корень). И, во-вторых, если $a_0 = 1$, то для корней, находящихся на удалении от круга радиуса $r=1$, должны быть парные корни, которые находятся в круге единичного радиуса, чтобы произведение этих корней давало 1. Если корень находится на самой окружности единичного радиуса, то он дает половинный вклад в топологический заряд. Если коэффициенты многочлена все одинаковые $a_k = 1$, то получается геометрическая прогрессия и топологический заряд суперпозиции [13] равен $n/2$. При нечетном n получается, что ТЗ – полуцелый. Это объясняется тем, что один корень, которому нет пары, обязательно должен быть на самой окружности единичного радиуса. Этот корень дает только половинный вклад внутри единичной окружности. Поэтому если все коэффициенты многочлена одинаковые ($a_k = 1$) и $n = 2p+1$, то из-за того, что произведение корней должно быть равно 1, нужно, чтобы p лежало внутри единичной окружности, другие p корней лежали вне круга, а один корень без пары должен лежать на самой окружности. При распространении суперпозиции (11) в свободном пространстве каждое слагаемое (11) будет иметь вид (15), и вблизи оптической оси при условии, что аргумент функций Бесселя мал, получим

$$E_n(r \rightarrow 0, \varphi, z) \sim \left(\frac{z_0 r}{z q(z)}\right)^n \exp\left(-\frac{r^2}{w^2 q(z)} + in\varphi\right). \tag{21}$$

То есть вместо суперпозиции (11) в начальной плоскости получаем при распространении в пространстве суперпозицию (12), и, значит, по основной теореме алгебры ТЗ поля (12) равен n .

7. Суперпозиция оптических вихрей в виде геометрической прогрессии

Если в суперпозиции ОВ (11) коэффициенты выбрать в виде $a_p = a^p$, то получится геометрическая прогрессия, и вместо (11) можно записать:

$$\begin{aligned}
 E(r, \phi) &= E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) \left(a^k e^{ikm\phi} + a^{k+1} e^{i(k+1)m\phi} + \dots + a^n e^{inm\phi}\right) = \\
 &= E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) a^k e^{ikm\phi} \left(\frac{1-a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\phi}}{1-a e^{im\phi}}\right).
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

В [13] показано, что в начальной плоскости у суперпозиции (22) будет разный ТЗ, в зависимости от значения коэффициента a :

$$TC = \begin{cases} km, & |a| < 1, \\ (k+n)m/2, & |a| = 1, \\ nm, & |a| > 1. \end{cases}
 \tag{23}$$

Из (23), например, видно, что ТЗ в начальной плоскости при $|a| < 1$ равен km и меньше, чем ТЗ поля (22) при распространении в свободном пространстве, который равен nm ($k < n$). Возникает вопрос, каким образом появляются дополнительные $(n-k)m$ нули поля (11) при начале его распространения? Если посмотреть на последнее выражение в (22), то можно увидеть, что в числителе в круглых скобках минимумы амплитуды будут появляться на лучах с углами $\phi_p = 2\pi p / ((n-k+1)m)$, $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ Таких минимумов на всем круге будет $(n-k)m$. И при начале распространения света из начальной плоскости на расстоянии много меньше длины волны (почти мгновенно) на «концах» этих минимумов сформируются дополнительных $(n-k)m$ нулей интенсивности. И ТЗ всего поля (22) будет равен nm . Так как аналитическая функция не может иметь постоянное значение на любом отрезке, то минимумы с постоянным значением амплитуды, которые были в начальной плоскости, постепенно уменьшаются с расстоянием от оптической оси до нуля в какой-то точке $r > R$. Чем больше будет радиус круга R , ограничивающий на практике начальное поле, тем дальше от центра пучка сформируются дополнительные вихри (нули интенсивности). Они сформируются на расстояниях больших, чем R . Это будет показано в разделе моделирования. По-другому формируются дополнительные вихри при распространении поля (22), если $|a| = 1$. В этом случае ТЗ в начальной плоскости будет равен $(k+n)m/2$. И в начальной плоскости будут не минимумы интенсивности, а нули интенсивности, то есть будет $(n-k)m/2$ краевых дислокаций. При распространении светового поля с краевыми дислокациями (отрезками нулей интенсивностей) они должны преобразовываться в отрезки со множеством изолированных нулей интенсивности и формировать пары оптических вихрей с ТЗ $+1$ и -1 . А дополнительные $(n-k)m/2$ оптических вихрей с ТЗ $+1$ сформируются на концах краевых дислокаций при $r > R$. То есть и при $|a| = 1$ ТЗ поля (22) будет равен nm .

8. Моделирование

В табл. 1 показаны результаты моделирования для суперпозиции ОВ (11) при $n=3$ и при разных значениях коэффициентов a_p . Рассчитывались распределение интенсивности (табл. 1, столбцы 1, 3) и фазы (табл. 1, столбцы 2, 4, 5) в начальной плоскости (табл. 1, столбцы 1, 2) и на расстоянии Рэлея (табл. 1, столбцы 3–5). Радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 1$ мм, длина волны – 532 нм, и ТЗ отдельных пучков в суперпозиции был равен $p = 3, 4, 10$. Топологический заряд на картинках фазы рассчитывался по формуле (3) и приведен на табл. 1 для каждой фазы. Интенсивность и фаза на расстоянии Рэлея рассчитывались с помощью преобразования Френеля. В первой строке модули коэффициентов в (11) были $|a_p| = 1, 1, 3$, поэтому преимущество третьего вихря велико (он больше суммы остальных коэффициентов) и ТЗ в первой строке на табл. 1 равен ТЗ максимального ОВ $p = 10$ и в начальной плоскости, и на расстоянии Рэлея. При выборе модулей коэффициентов (11) в виде $|a_p| = 1, 3, 1$ преимущество у второго вихря, поэтому ТЗ в начальной плоскости равен 4, а на расстоянии Рэлея ТЗ равен 5 (табл. 1, строка 2). Хотя ожидается, что, независимо от выбора коэффициентов, ТЗ на расстоянии Рэлея должен быть равен 10. Недостающие 5 вихрей (нулей интенсивности) находятся за кадром. При выборе коэффициентов суммы (11) в виде $|a_p| = 1, 4, 1$ преимущество второго вихря становится больше и ТЗ равен 4 на всех трех кадрах фазы в строке 3 на табл. 1. По-прежнему недостающие 6 нулей находятся за кадром в строке 3 табл. 1. При выборе большим первого коэффициента ($|a_p| = 3, 1, 1$) ТЗ в начальной плоскости равен 3, а на расстоянии Рэлея равен 6 (табл. 1, строка 4). Недостающие 4 нуля не попали в кадр. При выборе коэффициентов $|a_p| = 5, 1, 1$ преимущество первого вихря становится заметным и ТЗ равен 3 на всех распределениях фазы (табл. 1, строка 5). Таким образом, мы показали, что если в суперпозиции вихрей (11) один коэффициент больше суммы модулей всех других коэффициентов, то ТЗ суперпозиции в начальной плоскости равен ТЗ оптического вихря с максимальным коэффициентом. Но то, что на некотором расстоянии от начальной плоскости ТЗ суперпозиции должен быть равен максимальной степени многочлена, это моделирование не показало (кроме строки 1 на табл. 1).

На рис. 1 показан другой вариант моделирования. Расчет фазы производился по той же формуле (11), но ТЗ трех оптических вихрей были равны $p = 3, 4, 6$. Размер кадров фазы был увеличен в 4 раза, чтобы можно было следить за движением нулей интенсивности при изменении модулей коэффициентов $|a_p|$. Из приведенной выше теории следует, что на любом расстоянии от начальной плоскости у комплексного многочлена при любом наборе коэффициентов ТЗ будет равен максимальному ТЗ в суперпозиции (или максимальной степени многочлена). В нашем случае ТЗ равен 6. То есть на всех кадрах фазы на рис. 1 должно быть 6 оптических вихрей первого

порядка с ТЗ +1. На рис. 1 центральный вихрь в нуле с ТЗ 3 обозначен квадратом, а остальные 3 вихря с ТЗ +1, которые меняют свое положение при изменении коэффициентов в (11), обозначены кружками.

Табл. 1. Распределения интенсивности (столбцы 1, 3) и фазы (столбцы 2, 4, 5) в начальной плоскости (столбцы 1, 2) и на расстоянии Рэлея (столбцы 3 – 5) для разных значений весовых коэффициентов в суперпозиции (7), если имеются только три оптических вихря с ТЗ $p = 3, 4, 10$

	Интенсивность в начальной плоскости $-R \leq x, y \leq R$ $R = 2,5$ мм	Фаза в начальной плоскости $-R \leq x, y \leq R$ $R = 2,5$ мм	Интенсивность на расстоянии Рэлея $-R \leq x, y \leq R$ $R = 10$ мм	Фаза на расстоянии Рэлея $-R \leq x, y \leq R$ $R = 10$ мм	Фаза на расстоянии Рэлея $-R \leq x, y \leq R$ $R = 20$ мм
$a_p = 1, -1, 3i$					
		TC = 9,997026 ≈ 10		TC = 9,961571 ≈ 10	TC = 9,846296 ≈ 10
$a_p = 1, -3, i$					
		TC = 4,000158 ≈ 4		TC = 3,984690 ≈ 4	TC = 4,931876 ≈ 5
$a_p = 1, 4i, -1$					
		TC = 4,000094 ≈ 4		TC = 3,984584 ≈ 4	TC = 3,939235 ≈ 4
$a_p = 3, -1, i$					
		TC = 2,999521 ≈ 3		TC = 4,982104 ≈ 5	TC = 5,898285 ≈ 6
$a_p = 5, -1, i$					
		TC = 2,999699 ≈ 3		TC = 2,988528 ≈ 3	TC = 2,953744 ≈ 3

Окружностями обозначены периферийные единичные вихри, жёлтый кружок – это вихрь с ТЗ +3 в центре.

Из рис. 1 видно, во-первых, что на всех кадрах имеются 6 вихрей (1 ноль с вырожденностью 3 и три нуля с вырожденностью 1), а, во-вторых, один из нулей при уменьшении модуля коэффициента при ОВ с максимальным ТЗ 6 удаляется от центра. И в последнем случае, когда коэффициенты почти равны по модулю, этот шестой ноль уже не виден в кадре на рис. 1е. Таким образом, это моделирование показало, что при любых значениях модулей коэффициентов в суперпозиции (11) ТЗ равен степени многочлена.

Мы провели еще одно моделирование, чтобы ответить на вопрос: если в начальной плоскости ТЗ суперпозиции оптических вихрей может быть меньше, чем ТЗ этой суперпозиции на некотором расстоянии от начальной плоскости, то как и откуда появляются дополнительные оптические вихри (нули интенсивности)?

Расчет производился по формуле (22). Параметры расчета: $k=2$, $n=5$, $m=3$, $a=0,8$, $w_0=4$ мкм, длина волны – 532 нм. Начальное поле (22) задано в квадратной области 20×20 мкм, 400×400 отсчетов, за пределами данной области амплитуда поля равна нулю. Амплитуда суперпозиции (22) в области лепестка интенсивности ($x > 0$, $y = 0$) на краю изображения ($x = 10$ мкм, $y = 0$) равна 0,0007, а максимальная амплитуда равна 2. На рис. 2 показана амплитуда и фаза поля (22) при указанных параметрах. На рис. 2б у фазы видны 6 скачков фазы на 2π , то есть ТЗ данной суперпозиции в начальной плоскости равен 6.

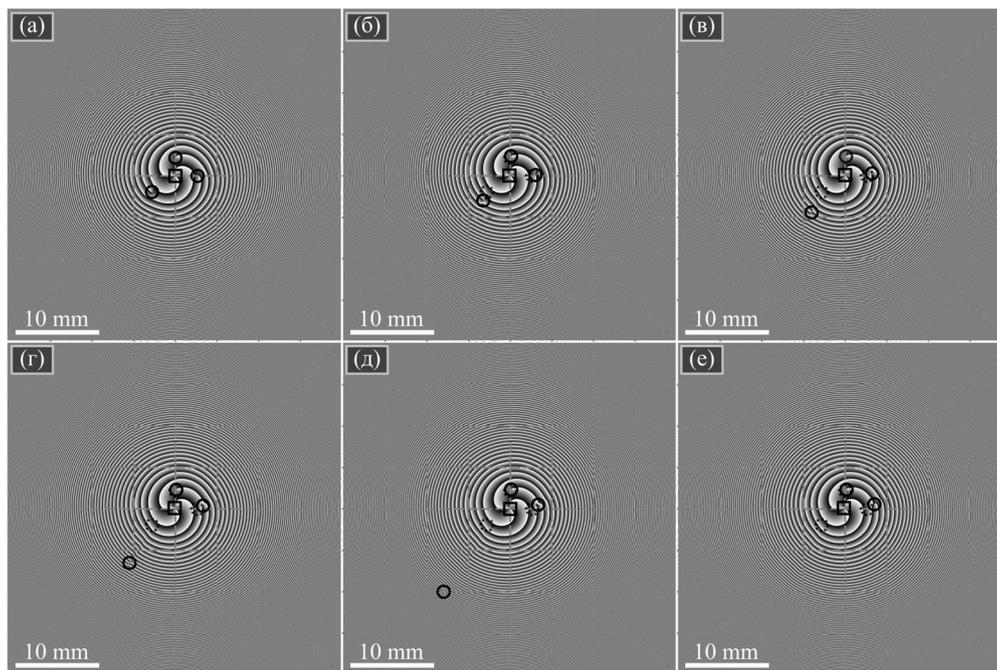


Рис. 1. Распределение фазы на расстоянии Рэлея, рассчитанное с помощью преобразования Френеля для начального поля (7) при разных значениях весовых коэффициентов a_p : (а) 1, -1, 2i; (б) 1, -1, 1,5i; (в) 1, -1, 1,3i; (г) 1, -1, 1,2i; (д) 1, -1, 1,15i; (е) 1, -1, 1,1i

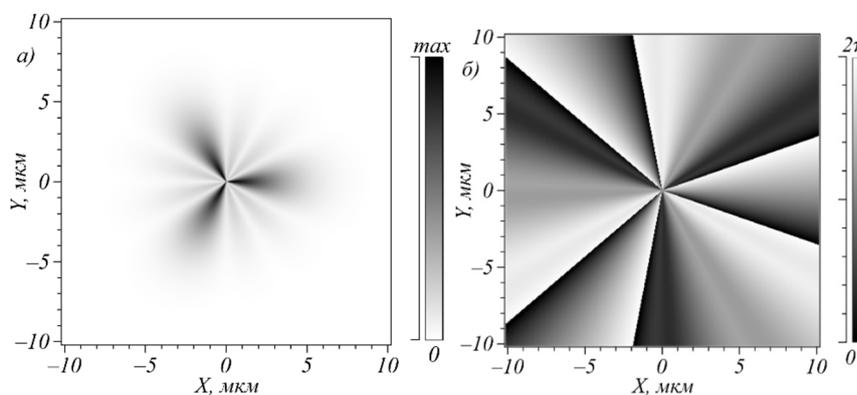


Рис. 2. Амплитуда (а) и фаза (б) в начальной плоскости поля (22) при $k=2$, $n=5$, $m=3$, $a=0,8$, $w_0=4$ мкм, длина волны – 532 нм

Моделирование проводилось с помощью непараксиального интеграла Рэлея–Зоммерфельда. На рис. 3 показаны результаты моделирования распространения света на расстоянии 100 нм от начальной плоскости. Выходное поле имеет размер 600×600 отсчетов, 20×20 мкм. Из рис. 3б видно, что фаза поля изменилась только на краях из-за дифракции, а за ней видны черно-белые линии скачков фазы на 2π , которые показывают расходящийся сферический волновой фронт. На рис. 3в видно, что ТЗ равен 6 в круге радиуса $r = 10$ мкм. Далее в области $10 \text{ мкм} < r < 13 \text{ мкм}$ имеет место переходная зона, в которой ТЗ скачками изменяется. И при $r > 13$ мкм ТЗ равен 15, как и предсказывает теория.

На рис. 4 показаны зависимости ТЗ от радиуса окружности, на которой он рассчитывался, для начального поля на рис. 2 на расстоянии 100 нм при разных ограничивающих квадратных диафрагмах. Из рис. 4 видно, что чем больше размер диафрагмы, тем на большем расстоянии от центра появляются дополнительные 9 нулей и ТЗ суперпозиции (22) становится равен максимальному ТЗ в суперпозиции $nm = 15$.

На рис. 3, 4 присутствуют переходные зоны, в которых появляются дополнительные вихри. На рис. 3б видно, что у фазы в переходной области присутствуют одновременно и гладкие области изменения фазы, и набор спиральных линий скачков фазы на 2π . Из-за того, что эти линии скачков фазы в переходной области прерываются и опять появляются, не удастся правильно подсчитать полное число скачков фазы на 2π вдоль

окружности с центром в начале координат. Но когда радиус окружности становится достаточно большим, то ТЗ считается правильно, так как при обходе по такой окружности пересекаются все спиральные линии скачков фазы на 2π .

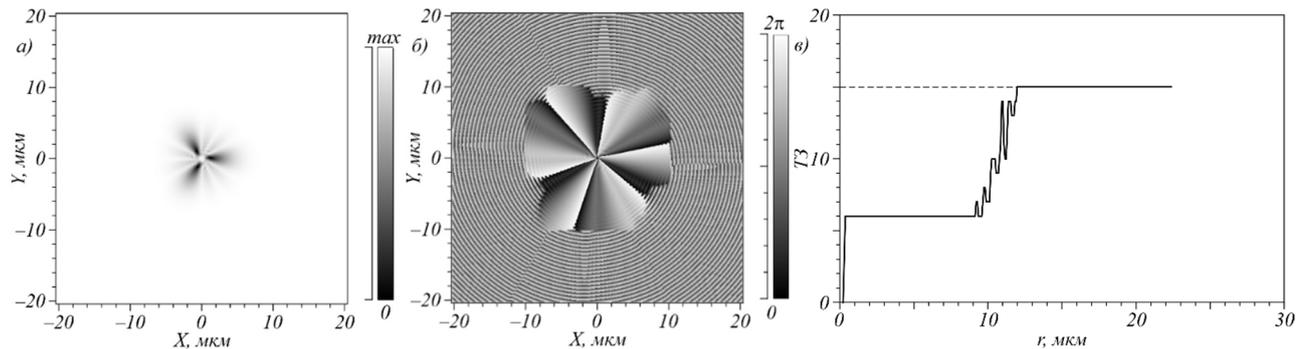


Рис. 3. Амплитуда (а) и фаза (б) на расстоянии 100 нм от начальной плоскости для начального поля на рис. 2 и зависимость ТЗ от радиуса окружности, на которой он рассчитывался (в)

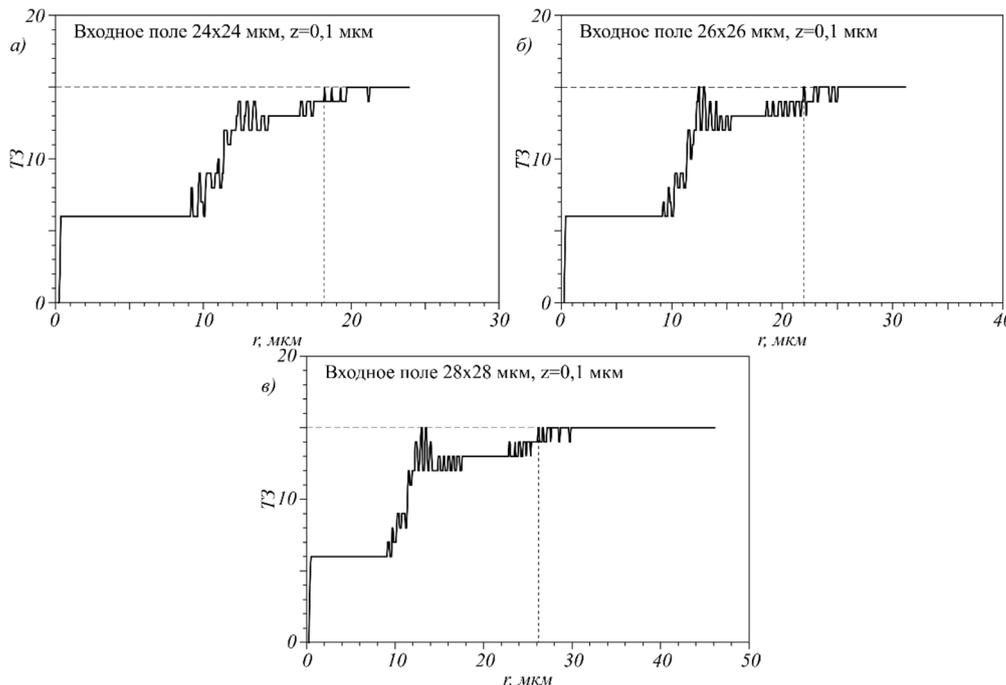


Рис. 4. ТЗ поля на рис. 2 на расстоянии 100 нм в зависимости от радиуса окружности, на которой он рассчитывается, при разном размере ограничивающих начальное поле диафрагм: 24×24 мкм (а), 26×26 мкм (б) и 28×28 мкм (в)

Заключение

В работе рассмотрена конечная суперпозиция ОВ с гауссовой огибающей. Показано, что при распространении в свободном пространстве ТЗ такой суперпозиции будет равен числу нулей комплексного многочлена. От соотношения модулей коэффициентов в суперпозиции будет зависеть расположение нулей интенсивности и близость их к центру пучка (к оптической оси). Например, если модуль коэффициента при максимальной степени многочлена больше всех остальных коэффициентов, то все нули интенсивности будут группироваться вблизи оптической оси и их все можно будет найти в эксперименте путем подсчета числа вилок на интерферограмме. Если же все коэффициенты имеют примерно равные модули или модули коэффициентов при членах с малыми степенями больше, чем модули коэффициентов при членах с высокими степенями, то часть нулей может быть далеко от оптической оси и может находиться там, где интенсивность света почти нулевая. В этом случае часть нулей нельзя будет обнаружить в эксперименте. И ТЗ, обнаруженный в эксперименте, будет меньше, чем предсказывает теория. В заключение отметим, что, произвольно смещая n нулей интенсивность по сечению пучка, можно управлять распределением интенсивности пучка, но ТЗ такого пучка при этом не будет изменяться. Это свойство ТЗ можно использовать для кодирования информации при ее передаче в свободном пространстве.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23–12–00236 (в части теории и моделировании) и в рамках Государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» (в частях «Введение» и «Заключение»).

References

- [1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185–8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [2] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A* 2004; 6(2): 259–268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [3] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Наука, М., 576с (1969).
- [4] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. Гос. изд. тех.–теор. лит., М., 632с. (1956).
- [5] Zauderer E. Complex argument Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1986; 3: 465–469.
- [6] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel–Gauss beams. *Opt. Commun.*, 1987; 64(6): 491–495. doi:10.1016/0030-4018(87)90276-8.
- [7] Supp S, Jahns J. Coaxial superposition of Bessel beams by discretized spiral axicons. *Journal of the European Optical Society–Rapid Publications*, 2018; V.14: 51938687. DOI: 10.1186/s41476-018-0086-8.
- [8] Ando T, Matsumoto N, Ohtake Y, Takiguchi Y, Inoue T. Structure of optical singularities in coaxial superpositions of Laguerre–Gaussian modes. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2010; 27: 2602–2612.
- [9] Volyar AV, Abramochkin EG, Razueva EV, Akimova YE, Bretsko MV. Structural stability of spiral beams and fine structure of an energy flow. *Computer Optics* 2021; 45(4): 482–489. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-885.
- [10] Volyar A, Abramochkin E, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Fine structure of perturbed Laguerre–Gaussian beams: Hermite–Gaussian mode spectra and topological charge. *Appl Opt* 2020; 59(25): 7680–7687. DOI: 10.1364/AO.396557.
- [11] Hirst HP, Macey WT. Bounding the Roots of Polynomials. *The College Mathematics Journal*, 1997; 28(4): 292–295. <https://doi.org/10.1080/07468342.1997.11973878>.
- [12] Rouché É. Mémoire sur la série de Lagrange. *Journal de l'École Polytechnique*, 1862; 22: 193–224.
- [13] Kotlyar V, Kovalev A, Kozlova E, Savelyeva A, Stafeev S. Geometric Progression of Optical Vortices. *Photonics*. – 2022. – V.9. – P.407. DOI: 10.3390/ photonics9060407.
- [14] Indebetouw G. Optical Vortices and Their Propagation. *J. Mod. Opt.* 1993, 40, 73–87. <https://doi.org/10.1080/09500349314550101>.
- [15] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral-type beams. *Opt. Commun.* 1993, 102, 336. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(93\)90406-U](https://doi.org/10.1016/0030-4018(93)90406-U).
- [16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt. Express*, 2010; 28: 8266–8281.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 560 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт». В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно–кристаллические устройства. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267

Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Окончил очную аспирантуру по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт» в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 200 работ и 3 патентов. E-mail: anton@ipsiras.ru ORCID: 0000-0003-0211-7897

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 19 декабря 2024 г. Окончательный вариант – 27 марта 2025 г.

Topological charge of axial superposition of Gaussian optical vortices

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.G. Nalimov^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute, NRC Kurchatov Institute, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

²Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

The topological charge of a finite superposition of optical vortices with a Gaussian envelope is considered in this work. In the initial plane of such a superposition, the topological charge is shown theoretically and numerically to be equal to the number of zeros of a complex polynomial of degree n , where n is the maximum topological charge of the optical vortices in the superposition, located in a circle of unit radius together with the boundary. And during propagation in free space, the topological charge of such a superposition is always equal to n . If the modulus of the coefficient of the superposition term with topological charge equal to k is greater than the sum of the moduli of all other superposition coefficients, then there are k zeros in the unit radius circle and the topological charge of the entire superposition in the initial plane is equal to k ($k \leq n$). If all superposition coefficients are equal in modulus, then the topological charge is equal to half ($n/2$) in the initial plane, but during propagation the topological charge is again equal to n . In this case, additional zeros of the optical vortices superposition are formed almost immediately, at a distance much smaller than the wavelength from the initial plane, and at a distance from the optical axis greater than the radius of the limiting aperture of the initial field.

Keywords: optical vortex, topological charge, optical vortices superposition, Bessel beam, Laguerre–Gaussian beam.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Topological charge of axial superposition of Gaussian optical vortices. *Computer Optics* 2026; 50(1): 1-9. DOI: 10.18287/COJ1659.

Acknowledgements: The work was partly funded Russian Science Foundation grant #23–12–00236 (in parts of theory and simulation) and NRC “Kurchatov Institute” within the State assignment (in parts “Introduction”, “Conclusion”).

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC Kurchatov Institute and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 560 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI, NRC Kurchatov Institute. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000–0002–0488–4267

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Finished postgraduate study in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute, NRC Kurchatov Institute, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 200 papers and 3 inventions. E-mail: anton@ipsiras.ru

Received December 19, 2024. The final version – March 27, 2025.
