Распределение плотности орбитального углового момента в остром фокусе векторных световых полей

В.В. Котляр [1,2], А.А. Ковалев [1,2], А.Г. Налимов [1,2], А.М. Телегин [2]
[1] Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;
[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В этой работе мы получили явные аналитические выражения для плотности продольной проекции вектора орбитального углового момента в плоскости острого фокуса четырех световых полей с однородной и неоднородной поляризациями: оптического вихря с эллиптической поляризацией, суперпозиции цилиндрического векторного пучка и пучка с линейной поляризацией, оптического вихря с цилиндрической поляризацией и пучка с неоднородной эллиптической поляризацией. Все плотности орбитального углового момента для этих четырех полей зависят от состояния поляризации начального светового поля. Для двух световых полей с гибридной поляризацией плотность орбитального углового момента в фокусе меняет знак при изменении как азимутальной, так и радиальной координаты. Известно, что в случае параксиальных оптических вихрей с эллиптической поляризацией плотность орбитального углового момента не зависит от состояния поляризации, а полностью определяется топологическим зарядом оптического вихря. Поэтому в параксиальном случае азимутальный орбитальный поток энергии вращается всегда в одну сторону, определяемую знаком топологического заряда оптического вихря. Однако в случае непараксиальных световых полей, как показано в этой работе, плотность орбитального углового момента в фокусе зависит от состояния поляризации и на разных расстояниях от оптической оси поток энергии может вращаться в разные стороны.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, топологический заряд, оптический вихрь, поток энергии.

Цитирование: **Котляр, В.В.** Распределение плотности орбитального углового момента в остром фокусе векторных световых полей / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов, А.М. Телегин // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 3. – 1719. – DOI: 10.18287/COJ1719.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Telegin AM. Orbital angular momentum density distribution at the sharp focus of vector light fields. Computer Optics 2026; 50(3): 1719. DOI: 10.18287/COJ1719.

Введение

В современной оптике много внимания уделяется структурированным световым полям, которые обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ) и неоднородной поляризацией [1–3]. Интерес к структурированному свету обусловлен его применением в задачах оптической телекоммуникации [4], манипулирования микрообъектами [5], квантовой информатики [6], оптической микроскопии [7] и микроструктурирования поверхности [8]. Важной задачей для структурированного света является теоретическое определение его ОУМ. Первая работа по определению ОУМ у пучков Лагерра–Гаусса была выполнена еще в 1992 году [9]. В последующих работах было показано, что азимутальный поток энергии (азимутальная проекция вектора Пойнтинга) в сечении параксиальных вихревых пучков зависит от состояния поляризации и вращается в разные стороны (по часовой стрелке или против часовой) для света с левой и правой круговой поляризацией [10–12]. В [13] экспериментально показано, что на разных расстояниях от оптической оси в пучке Бесселя с круговой поляризацией захваченные микрочастицы движутся в разные стороны. Но оказывается, что вектор Пойтинга является суммой двух векторов, один из которых описывает канонический поток энергии, а второй вектор описывает поток спина [14]. В [14] показано, что для параксиального оптического вихря с эллиптической поляризацией азимутальный орбитальный поток энергии (канонический поток) не зависит от состояния поляризации света (левая или правая эллиптическая поляризация), а зависит только от топологического заряда оптического вихря. Поэтому плотность ОУМ также не будет зависеть от направления вращения вектора поляризации. Но в случае параксиальных световых полей с неоднородной поляризацией это не будет выполняться. Например, в [15] показано, что у параксиального векторного поля (без оптического вихря) с неоднородной линейной поляризацией (суперпозиция света с линейной и цилиндрической поляризациями) плотность ОУМ на некоторых расстояниях от плоскости перетяжки зависит от $\sin(n\varphi)$, где n – порядок цилиндрической

поляризации, φ – азимутальный угол в сечении пучка. То есть плотность ОУМ зависит от состояния поляризации пучка и меняет знак при изменении азимутального угла. Для непараксиальных световых полей из-за эффекта спин-орбитальной конверсии продольная проекция ОУМ зависит от состояния поляризации [16–18].

В данной работе мы получим аналитические выражения продольной проекции вектора ОУМ в плоскости острого фокуса для четырех разных световых полей. Выражения получены в рамках теории Ричардса–Вольфа [19]. Из полученных выражений следует, что плотность ОУМ у всех четырех полей зависит от состояния поляризации. Мы покажем, что для двух из четырех полей, у которых нет оптического вихря, плотность ОУМ в фокусе меняет знак при изменении обеих координат: радиальной и азимутальной.

1. Плотность ОУМ в фокусе оптического вихря с эллиптической поляризацией

Вектор орбитального углового момента задается следующей формулой с точностью до постоянной 1/(8πω), где ω – угловая частота монохроматического света [20]:

$$\boldsymbol{J} = Im\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{p=x,y,z} E_p^*(\boldsymbol{r}\times\nabla)E_p\, r dr d\varphi,$$
$$\boldsymbol{j} = Im\sum_{p=x,y,z} E_p^*(\boldsymbol{r}\times\nabla)E_p, \tag{1}$$

где в скобках написано векторное произведение радиуса вектора **r** на вектор набла, ∇. Нижняя формула описывает вектор плотности ОУМ, а верхняя – полный ОУМ, проинтегрированный по всему сечению пучка. Далее мы получим аналитические выражения как для плотности, так и для полного ОУМ, но только для одной проекции векторов (1), а именно, для продольной проекции:

$$J_z = Im\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(E_x^*\frac{\partial}{\partial\varphi}E_x + E_z^*\frac{\partial}{\partial\varphi}E_z + E_z^*\frac{\partial}{\partial\varphi}E_z\right) r dr d\varphi,$$
$$j_z = Im\left(E_x^*\frac{\partial}{\partial\varphi}E_x + E_z^*\frac{\partial}{\partial\varphi}E_z + E_z^*\frac{\partial}{\partial\varphi}E_z\right). \tag{2}$$

Рассмотрим острую фокусировку оптического вихря с эллиптической поляризацией, вектор Джонса начального поля которого имеет вид:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\begin{pmatrix}1\\ i\alpha\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где m – топологический заряд оптического вихря, α – действительный параметр, задающий векторное состояние начального поля (3): при α = 1 – правая круговая поляризация, при α = 0 – линейная поляризация, при 0 < α < 1 – эллиптическая поляризация. Три проекции вектора напряженности электрического поля в остром фокусе для начального поля (3) известны [21]:

$$E_x = \frac{i^{m-1}}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{im\varphi}\left(I_{0,m} + \frac{(1+\alpha)}{2}e^{2i\varphi}I_{2,m+2} + \frac{(1-\alpha)}{2}e^{-2i\varphi}I_{2,m-2}\right),$$
$$E_y = \frac{i^m}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{im\varphi}\left(\alpha I_{0,m} - \frac{(1+\alpha)}{2}e^{2i\varphi}I_{2,m+2} + \frac{(1-\alpha)}{2}e^{-2i\varphi}I_{2,m-2}\right), \tag{4}$$
$$E_z = \frac{-2i^m}{\sqrt{1+\alpha^2}}e^{im\varphi}\left((1+\alpha)e^{i\varphi}I_{1,m+1} - (1-\alpha)e^{-i\varphi}I_{1,m-1}\right),$$

где

$$I_{\alpha,\beta} = \left(\frac{4\pi f}{\lambda}\right)\int_0^{\theta_0}\sin^{\alpha+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{3-\alpha}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{1/2}(\theta)B(\theta)e^{ikz\cos\theta}J_\beta(\xi)d\theta, \tag{5}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ, f – фокусное расстояние апланатической системы, (r, φ, z) – цилиндрические координаты, θ_0 – максимальный угол наклона лучей к оптической оси, определяющий числовую апертуру апланатической оптической системы $NA = \sin(\theta_0)$, $\xi = kr\sin(\theta)$, $B(\theta)$ – действительная функция, зависящая только от полярного угла и описывающая распределение амплитуды фокусируемого пучка света. У поля (3) $B(\theta) = 1$. Проекции поля в фокусе (4) получены на основе формализма Ричардса–Вольфа [19]. Заметим, что если для начального поля (3) вычислить плотность ОУМ (2), пренебрегая продольной координатой (как это делается в случае параксиального приближения), то получим хорошо известный результат: $j_z = m$. То есть в параксиальном случае плотность ОУМ не зависит от параметра поляризации α. В случае непараксиальных световых полей, как и в случае острой фокусировки, плотность ОУМ будет зависеть от параметров поляризации начального поля. Действительно, подставляя выражения для проекций поля в фокусе (4) в (2), получим выражение для плотности ОУМ:

$$j_{1z}(r,\varphi)=\frac{1}{1+\alpha^2}\Big\{\Big[(1+\alpha^2)mI_{0,m}^2+\frac{(1+\alpha)^2}{2}(m+2)I_{2,m+2}^2+$$
$$+\frac{(1-\alpha)^2}{2}(m-2)I_{2,m-2}^2+(1+\alpha)^2(m+1)I_{1,m+1}^2+(1-\alpha)^2(m-1)I_{1,m-1}^2\Big]+ \quad (6)$$
$$+(1-\alpha^2)\cos(2\varphi)\big[(m+1)I_{0,m}I_{2,m+2}+(m-1)I_{0,m}I_{2,m-2}-2mI_{1,m+1}I_{1,m-1}\big]\Big\}.$$

Из (6) видно, что плотность ОУМ зависит от обеих полярных координат (r, φ). Поэтому при разных азимутальных углах она может иметь разные знаки. Из (6) можно получить более простые выражения для плотности ОУМ оптического вихря с линейной и правой круговой поляризациями:

$$j_{1z,L}(r,\varphi)=\Big\{\Big[mI_{0,m}^2+\frac{1}{2}(m+2)I_{2,m+2}^2+\frac{1}{2}(m-2)I_{2,m-2}^2+(m+1)I_{1,m+1}^2+(m-1)I_{1,m-1}^2\Big]+$$
$$+\cos(2\varphi)\big[(m+1)I_{0,m}I_{2,m+2}+(m-1)I_{0,m}I_{2,m-2}-2mI_{1,m+1}I_{1,m-1}\big]\Big\}, \quad (7)$$
$$j_{1z,C}(r)=mI_{0,m}^2+(m+2)I_{2,m+2}^2+2(m+1)I_{1,m+1}^2. \quad (8)$$

Видно, что плотность ОУМ в фокусе для оптического вихря с круговой поляризацией имеет радиальную симметрию (8), а плотность ОУМ для линейной поляризации может 4 раза менять знак при обходе вокруг оптической оси (7), так как имеется слагаемое с cos(2φ). Квадраты интегралов (5) в первых квадратных скобках всегда будут положительные, а произведения этих интегралов во вторых квадратных скобках могут менять знак при изменении радиальной координаты. То есть на некотором расстоянии от оптической оси при том же азимутальном угле выражение для плотности ОУМ (7) может сменить знак. В параксиальном случае такого эффекта нет [14], так как в параксиальном случае ОУМ не может изменять знак при изменении радиальной координаты. Полные ОУМ обоих пучков (7) и (8) равны:

$$J_{1z,L}=mW_0+mW_2+2mW_1=mW, \quad (9)$$
$$J_{1z,C}=mW_0+(m+2)W_2+2(m+1)W_1=mW+2(W_2+W_1). \quad (10)$$

В (9) и (10) использованы обозначения [22]:

$$W_\alpha=2\pi\int_0^\infty\left|I_{\alpha,\beta}(r)\right|^2 rdr=4\pi f^2\int_0^{\theta_0}\sin^{2\alpha+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^{5-2\alpha}\left(\frac{\theta}{2}\right)|B(\theta)|^2 d\theta. \quad (11)$$

Из сравнения (9) и (10) видно, что при $m=0$ (нет вихря) полный ОУМ для поля с линейной поляризацией равен нулю, а для поля с круговой поляризацией полный ОУМ отличен от нуля из-за спин-орбитального эффекта в остром фокусе.

2. Плотность ОУМ в фокусе гибридного светового поля

Рассмотрим другие примеры векторных световых полей, у которых плотность ОУМ в фокусе может менять знак при изменении радиальной переменной. Рассмотрим вектор Джонса начального векторного поля, у которого в сечении есть области с линейной и круговой поляризацией, поэтому оно названо гибридным [23]:

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\begin{pmatrix}\cos n\varphi\\ i\delta+\sin n\varphi\end{pmatrix}. \quad (12)$$

При $\delta=0$ поле (12) является цилиндрическим векторным полем n-го порядка, а при $n=0$ поле (12) является плоской волной с правой эллиптической поляризацией. У светового поля (12) нет оптического вихря, но мы покажем, что в фокусе плотность продольного ОУМ отлична от нуля и имеются области с положительным и отрицательным ОУМ. Проекции вектора напряженности электрического поля в фокусе для поля (12) имеют вид [23]:

$$E_x=\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[i^{n-1}\left(I_{0,n}\cos n\varphi+I_{2,n-2}\cos(n-2)\varphi\right)+\delta I_{2,2}\sin 2\varphi\right],$$
$$E_y=\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}}\left[i^{n-1}\left(I_{0,n}\sin n\varphi-I_{2,n-2}\sin(n-2)\varphi\right)+\delta\left(I_{0,0}-I_{2,2}\cos 2\varphi\right)\right], \quad (13)$$
$$E_z=\frac{2}{\sqrt{1+\delta^2}}\left(i^n I_{1,n-1}\cos(n-1)\varphi-i\delta I_{1,1}\sin\varphi\right).$$

Подставляя проекции поля в фокусе (13) в выражение (2) для плотности продольного ОУМ, получим при четном номере $n=2p$, $p=0, 1, 2, \ldots$ (при $n=2p+1$ плотность ОУМ равна нулю):

$$j_{2z}=\frac{\delta(-1)^p}{1+\delta^2}\big[I_{2,2}I_{0,n}(n+2)\cos(n-2)\varphi-I_{2,2}I_{2,n-2}(n-4)\cos n\varphi-I_{0,0}I_{0,n}n\cos n\varphi-$$
$$-I_{0,0}I_{2,n-2}(n-2)\cos(n-2)\varphi-4I_{1,1}I_{1,n-1}((n-1)\sin\varphi\sin(n-1)\varphi+\cos\varphi\cos(n-1)\varphi)\big]. \quad (14)$$

Из (14) видно, что при $\delta=0$ плотность ОУМ равна нулю. Также из (14) видно, что все слагаемые плотности умножены на тригонометрические функции от азимутального угла. Это означает, что при интегрировании по углу все эти слагаемые дадут ноль, и поэтому полный продольный ОУМ пучка (13) равен нулю: $J_{2z}=0$. Исключение составляет случай, когда $n=0$. В этом случае поле (12) имеет эллиптическую

поляризацию и из-за спин-орбитального эффекта в фокусе полный продольный ОУМ будет отличен от нуля и равен: $J_{2z,n=0} = 4\delta\left(1+\delta^2\right)^{-1}(W_2 + W_1)$, плотность продольного ОУМ при $n=0$ равна:

$$j_{2z,n=0} = \frac{4\delta}{1+\delta^2}\left(I_{2,2}^2 + I_{1,1}^2 + I_{2,2}I_{0,0}\cos 2\,\varphi\right). \tag{15}$$

Также из (14) и (15) видно, что все слагаемые, состоящие из произведений разных интегралов (5), могут менять свой знак при изменении радиальной переменной r. Поэтому и плотность продольного ОУМ может менять знак при изменении радиальной координаты. Это означает, что микрочастицы, захваченные в фокус пучка (12), на разных расстояниях будут вращаться в разные стороны по окружностям разных радиусов (по часовой стрелке и против часовой стрелки). Получим простое выражение для плотности ОУМ (14) при $n=2$:

$$j_{2z,m=2} = \frac{\delta}{1+\delta^2}\left[4I_{2,2}I_{0,2} - 4I_{1,1}^2 + 2\cos 2\,\varphi\left(I_{2,2}I_{2,0} - I_{0,0}I_{0,2}\right)\right]. \tag{16}$$

Полный продольный ОУМ поля (16) будет равен нулю, так как можно показать, что он равен выражению:

$$J_{2z,n=2} = \frac{4\delta}{(1+\delta^2)}(W_{20} - W_1) = 0, \tag{17}$$

а в (17) оба слагаемых равны друг другу:

$$W_{20} = 2\pi\int_0^\infty I_{2,2}(r)I_{0,2}(r)rdr = 4\pi f^2\int_0^{\theta_0}\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)|B(\theta)|^2 d\theta = W_1. \tag{18}$$

3. Плотность ОУМ в фокусе оптического вихря с цилиндрической поляризацией

Получим выражение для продольной проекции плотности ОУМ в остром фокусе оптического вихря с топологическим зарядом m и с цилиндрической поляризацией порядка n. Вектор Джонса для начального поля имеет вид:

$$\boldsymbol{E}_3 = e^{im\varphi}\begin{pmatrix}\cos n\,\varphi\\ \sin n\,\varphi\end{pmatrix}. \tag{19}$$

В плоскости фокуса проекции вектора напряженности электрического поля имеют вид [24]:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{i^{m+n-1}}{2}e^{i(m+n)\varphi}\left(I_{0,m+n} + e^{-2i\varphi}I_{2,m+n-2}\right) + \frac{i^{m-n-1}}{2}e^{i(m-n)\varphi}\left(I_{0,m+n} + e^{2i\varphi}I_{2,m+n+2}\right),\\
E_y &= \frac{i^{m+n}}{2}e^{i(m+n)\varphi}\left(-I_{0,m+n} + e^{-2i\varphi}I_{2,m+n-2}\right) + \frac{i^{m-n}}{2}e^{i(m-n)\varphi}\left(I_{0,m+n} - e^{2i\varphi}I_{2,m+n+2}\right),\\
E_z &= i^{m+n}e^{i(m+n-1)\varphi}I_{1,m+n-1} - i^{m-n}e^{i(m-n+1)\varphi}I_{1,m-n+1}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя проекции поля в фокусе (20) в выражение (2) для плотности продольного ОУМ, получим:

$$\begin{aligned}
j_{3z}(r,\varphi) = &\left[\frac{(m+n)}{2}I_{0,m+n}^2 + \frac{(m-n)}{2}I_{0,m-n}^2 + \frac{(m+n-2)}{2}I_{2,m+n-2}^2 + \frac{(m-n+2)}{2}I_{2,m-n+2}^2 + \right.\\
&\left. +(m+n-1)I_{1,m+n-1}^2 + (m-n+1)I_{1,m-n+1}^2\right] + (-1)^n\cos(\,(2n-2)\varphi)\left[(m+1)I_{0,m+n}I_{2,m-n+2} + \right.\\
&\left. +(m-1)I_{0,m-n}I_{2,m+n-2} - 2mI_{1,m-n+1}I_{1,m+n-1}\right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Из (21) видно, что плотность ОУМ в фокусе поля (19) зависит от обоих номеров m и n, а также от обеих цилиндрических координат (r, φ). При обходе по замкнутой траектории определенного радиуса и с центром на оптической оси плотность ОУМ может иметь $4(n–1)$ областей разного знака, так как присутствует слагаемое с $\cos(2n–2)\varphi$. Поскольку в (21) входят слагаемые с произведением интегралов (5) с разными номерами, то такие слагаемые будут менять знак при изменении радиальной переменной. Поэтому и вся плотность ОУМ (21) может менять знак при изменении переменной r при постоянной переменной φ. При $m=0$ (нет вихря) плотность ОУМ (21) будет равна нулю. При $n=1$ плотность ОУМ (21) будет радиально симметричной и больше нуля ($m>0$). Если проинтегрировать плотность ОУМ (21) по всей плоскости фокуса, то получим продольную проекцию полного ОУМ:

$$J_{3z} = m(W_0 + W_2 + 2W_1) = mW. \tag{22}$$

Выражение (22) совпадает с выражением (9) и показывает, что полный ОУМ пучка (19) определяется только топологическим зарядом оптического вихря m и не зависит от порядка цилиндрической поляризации n.

4. Плотность ОУМ в фокусе поля с угловой зависимостью эллиптической поляризации

Рассмотрим начальное поле с гибридной поляризацией, которая меняет эллипс поляризации в зависимости от азимутального угла и описывается вектором Джонса вида:

$$\boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix}-i\sin n\,\varphi\\ \cos n\,\varphi\end{pmatrix}. \tag{23}$$

Проекции вектора напряженности электрического поля в плоскости острого фокуса поля (23) имеют вид [25]:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-i^n}{2}\left[I_{0,n}\sin n\,\varphi + \frac{1+i}{2}I_{2,m+2}\sin(m+2)\,\varphi + \frac{1-i}{2}I_{2,m-2}\sin(m-2)\,\varphi\right], \\ E_y &= \frac{-i^n}{2}\left[iI_{0,n}\cos n\,\varphi - \frac{1+i}{2}I_{2,m+2}\cos(m+2)\,\varphi + \frac{1-i}{2}I_{2,m-2}\cos(m-2)\,\varphi\right], \\ E_z &= \frac{i^n}{2}\left[(1+i)I_{1,n+1}\sin(n+1)\varphi + (1-i)I_{1,m-1}\sin(m-1)\,\varphi\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Подставляя проекции поля в фокусе (24) в выражение (2) для плотности продольного ОУМ, получим:

$$\begin{aligned} j_{4z} = \frac{1}{4}\Big[&-\sin 2\,\varphi\{(n+1)I_{0,n}I_{2,n+2} + (n-1)I_{0,n}I_{2,n-2} + 2nI_{1,n+1}I_{1,n-1}\} + \\ &+2\sin 2\,n\varphi\{I_{2,n+2}I_{2,n-2} + 2I_{1,n+1}I_{1,n-1}\}\Big]. \end{aligned} \tag{25}$$

Плотность ОУМ (25) зависит от удвоенного азимутального угла 2φ. Поэтому распределение плотности в фокусе будет иметь центрально симметричный вид (как снежинка), то есть на лучах φ и φ+π будут одинаковые распределения ОУМ. Из-за того, что все слагаемые в (25) умножаются на тригонометрические периодические функции, полный ОУМ будет равен нулю, $J_{4z}=0$. При $n=0$ начальное поле (23) будет иметь вертикальную линейную поляризацию, и из (25) следует, что плотность ОУМ у такого поля в фокусе будет равна нулю. При $n>0$ в выражении (25) все слагаемые имеют произведение интегралов (5) с разными номерами и поэтому все слагаемые могут менять знак при изменении радиальной переменной r. Поэтому и выражение для плотности ОУМ (25) может менять знак при изменении r и при постоянном φ. Эти выводы будут подтверждены с помощью моделирования.

5. Моделирование

На рис. 1 показаны распределения интенсивности (рис. 1*а, в, д, ж*) и плотности орбитального углового момента (рис. 1*б, г, е, з*) в остром фокусе пучков с гибридной поляризацией (вектор Джонса $[-i\sin n\varphi, \cos n\varphi]^{\mathrm{T}}$ (23), рис. 1*а–г*) и суперпозиции пучков с радиальной и линейной поляризацией (вектор Джонса $[\cos n\varphi, i\alpha + \sin n\varphi]^{\mathrm{T}}$ (12), рис. 1*д–з*). Расчет света в фокусе проводился по интегралам Дебая в рамках формализма Ричардса–Вольфа [19], а плотность ОУМ вычислялась по формуле (2). Для расчётов использовались следующие параметры: длина волны λ = 532 нм, фокусное расстояние $f=20\lambda$, порядок поляризации $n=2$ (рис. 1*а, б, д, е*) и $n=4$ (рис. 1*в, г, ж, з*), относительная амплитуда линейно поляризованного пучка $\alpha=1$, числовая апертура $NA=0{,}95$, размер показанной области – 2×2 мкм.

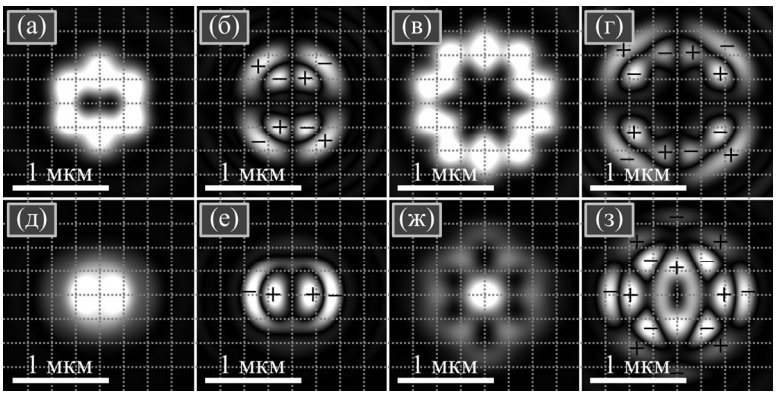

Рис. 1. Распределения интенсивности (а, в, д, ж) и плотности продольной проекции ОУМ (б, г, е, з) в остром фокусе пучков с гибридной поляризацией (23) (а–г) и суперпозиции пучков с радиальной и линейной поляризацией (12) (д–з) при разном порядке поляризации: n = 2 (а, б, д, е) и n = 4 (в, г, ж, з). В 1-м и 3-м столбце интенсивность от максимальной к минимальной меняет цвет от белого до черного. А во 2-м и в 4-м столбце положительный ОУМ – плюс, отрицательный – минус, черный цвет – нулевой ОУМ

Из рис. 1 видно, что плотность ОУМ меняет знак как при изменении радиальной переменной r, так и при изменении азимутального угла φ. Распределение на рис. 1*б, г* подтверждает правильность выражения (25), вид распределений ОУМ на рис. 1*е, з* подтверждает правильность выражений (14) и (16). Разный знак ОУМ в разных областях плоскости фокуса демонстрирует орбитальный эффект Холла, то есть разделение в пространстве фотонов с разным по знаку ОУМ. При этом в областях с разным знаком ОУМ канонический поток энергии, а также азимутальная проекция вектора Пойнтинга вращаются в разные стороны (по часовой и против часовой стрелки).

Заключение

В работе получены следующие результаты. Для четырех начальных векторных световых полей: оптического вихря с эллиптической поляризацией (3), суперпозиции света с линейной и цилиндрической поляризациями (12), оптического вихря с цилиндрической поляризацией (19) и света с циркулярно цилиндрической поляризацией (23) – получены явные выражения для продольной проекции вектора плотности ОУМ в остром фокусе,

соответственно, выражения (6), (14), (21) и (25). Из полученных выражений видно, что плотность ОУМ в фокусе зависит от состояния поляризации начального поля: от порядка цилиндрической поляризации n и от параметра эллиптической поляризации α. Из полученных выражений для плотности ОУМ также следует, что в тех случаях в фокусе наблюдается орбитальный эффект Холла, когда в разных областях плоскости фокуса плотность ОУМ имеет разный знак (рис. 1). Заметим, что в начальной плоскости у полей (12), (23) и на рис. 1 нет оптического вихря, но из-за локального спин-орбитального эффекта в фокусе формируются области, в которых поток энергии (и канонический в том числе) вращается в разные стороны.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 26-12-0011, в теоретической части и в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» в части моделирования.

References

[1] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. Nat Photonics. 2021; 15: 253-262. doi:10.1038/s41566-021-00780-4.
[2] He C, Shen Y, Forbes A. Towards higher-dimensional structured light. Light Sci Appl. 2022; 11: 205. doi:10.1038/s41377-022-00897-3.
[3] Shen Y, Wang X, Xie Z, et al. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. Light Sci Appl. 2019; 8: 90. doi:10.1038/s41377-019-0194-2.
[4] Wang J. Advances in communications using optical vortices. Photon Res. 2016; 4: B14-B28.
[5] Bustamante CJ, Chemla YR, Liu S, et al. Optical tweezers in single-molecule biophysics. Nat Rev Methods Primers. 2021; 1: 25. doi:10.1038/s43586-021-00021-6.
[6] Slussarenko S, Joch DJ, Tischler N, et al. Quantum steering with vector vortex photon states with the detection loophole closed. npj Quantum Inf. 2022; 8: 20. doi:10.1038/s41534-022-00531-5.
[7] Zhang B, Daly S, Zhu C, Lenz MO, Weiss LE, Needham LM, Peters R, Lee SF, O'Holleran K. Vortex light field microscopy: 3D spectral single-molecule imaging with a twist. Optica. 2024; 11: 1519-1525.
[8] Kawaguchi H, Yasuhara R, Yang H, Hori C, Miyagawa R, Sugioka K, Ota M, Uehara H. Femtosecond vector vortex laser ablation in tungsten: chiral nano-micro texturing and structuring. Opt Mater Express. 2024; 14: 424-434.
[9] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys Rev A. 1992; 45: 8185-8189.
[10] Allen L, Padgett MJ. The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. Opt Commun. 2000; 184: 67-71.
[11] Wang XL, Chen J, Li YN, et al. Optical orbital angular momentum from the curl of polarization. Phys Rev Lett. 2010; 105: 253602.
[12] Huang S, Zhang G, Wang Q, et al. Spin-to-orbital angular momentum conversion via light intensity gradient. Optica. 2021; 8: 1231-1236.
[13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Radial dependence of the angular momentum density of a paraxial optical vortex. Phys Rev A. 2018; 97: 053833. doi:10.1103/PhysRevA.97.053833.
[14] Ghosh B, Daniel A, Gorzkowski B, Bekshaev AY, Lapkiewicz R, Bliokh KY. Canonical and Poynting currents in propagation and diffraction of structured light: tutorial. J Opt Soc Am B. 2024; 41: 1276-1289.
[15] Kovalev AA, Kotlyar VV, Stafeev SS. Spin Hall Effect in the Paraxial Light Beams with Multiple Polarization Singularities. Micromachines. 2023; 14: 777. doi:10.3390/mi14040777.
[16] Bliokh KY, Nori F. Transverse and longitudinal angular momenta of light. Phys Rep. 2015; 592: 1-38.
[17] Bliokh KY, Rodríguez-Fortuño FJ, Nori F, et al. Spin-orbit interactions of light. Nat Photonics. 2015; 9: 796-808.
[18] Bliokh KY, Alonso MA, Ostrovskaya EA, et al. Angular momenta and spin-orbit interaction of nonparaxial light in free space. Phys Rev A. 2010; 82: 063825.
[19] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. Proc R Soc A Math Phys Eng Sci. 1959; 253: 358-379.
[20] Fang L, Wang J. Optical angular momentum derivation and evolution from vector field superposition. Opt Express. 2017; 25(19): 23364-23375. doi:10.1364/OE.25.023364.
[21] Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Telegin AM. Orbital angular momentum at the tight focus of a circularly polarized Gaussian beam. J Opt Soc Am A. 2025; 42: 52-58. doi:10.1364/JOSAA.543260.
[22] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall Effect of Double-Index Cylindrical Vector Beams in a Tight Focus. Micromachines. 2023; 14: 494.
[23] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG. Sharp focusing of a hybrid vector beam with a polarization singularity. Photonics. 2021; 8: 227. doi:10.3390/photonics8060227.
[24] Kotlyar VV, Stafeev SS, Telegin AM. Spin angular momentum at the tight focus of a cylindrical vector beam with an imbedded optical vortex. Optik. 2023; 287: 171103. doi:10.1016/j.ijleo.2023.171103.
[25] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kozlova ES, Nalimov AG. Spin-orbital conversion of a strongly focused light wave with high-order cylindrical-circular polarization. Sensors. 2021; 21(19): 6424. doi:10.3390/s21196424.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в

Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 560 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: *kotlyar@ipsiras.ru*

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико–математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт». В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: *alanko@ipsiras.ru* ORCID: 0000–0002–0488–4267

Налимов Антон Геннадьевич, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Окончил очную аспирантуру по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт» в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 200 работ и 3 патентов. E-mail: *anton@ipsiras.ru*

Телегин Алексей Михайлович, в 2009 году окончил СГАУ с дипломом по специальности «Радиотехника», в 2012 году защитил диссертацию, к.ф.-м.н., доцент кафедры конструирования и технологии электронных систем и устройств Самарского университета, с.н.с. института космического приборостроения Самарского университета. Область научных интересов: космическое приборостроение. E-mail: *talex85@mail.ru*

ГРНТИ: 29.31.15
Поступила в редакцию 30 февраля 2025 г. Окончательный вариант – 17 июня 2025 г.

Orbital angular momentum density distribution at the sharp focus of vector light fields

V.V. Kotlyar [1,2], A.A. Kovalev [1,2], A.G. Nalimov [1,2], A.M. Telegin [2]
[1] Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", Molodogvardeyskaya Str. 151, Samara, 443001, Russia;
[2] Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

In this work, we obtained explicit analytical expressions for the density of the longitudinal projection of the orbital angular momentum vector. These expressions were analyzed in the plane of a sharp focus of four light fields with uniform and non-uniform polarizations: an optical vortex with elliptical polarization, a superposition of a cylindrical vector beam and a beam with linear polarization, an optical vortex with cylindrical polarization, and a beam with non-uniform elliptical polarization. All orbital angular momentum densities for these four fields were found to depend on the polarization state of the initial light field. For two light fields with hybrid polarization, the orbital angular momentum density at the focus was revealed to change sign with a change in both the azimuthal and radial coordinates. It is known that in the case of paraxial optical vortices with elliptical polarization, the orbital angular momentum density does not depend on the polarization state, and is completely determined by the topological charge of the optical vortex. Therefore, in the paraxial case, the azimuthal orbital energy flux always swirls in one direction determined by the sign of the optical vortex topological charge. However, for non-paraxial light fields, the orbital angular momentum density at the focus was shown in this work to depend on the polarization state, so that the energy flow can swirl in different directions at different distances from the optical axis.

Keywords: orbital angular momentum, topological charge, optical vortex, energy flow.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Telegin AM. Orbital angular momentum density distribution at the sharp focus of vector light fields. Computer Optics 2026; 50(3): 1719. DOI: 10.18287/COJ1719.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant #26-12-0011 (Theoretical analysis) and NRC "Kurchatov Institute" under a government project (Numerical simulation).

Author's information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC Kurchatov Institute and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA–member. He is co–author of 560 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics and optical vortices. E-mail: *kotlyar@ipsiras.ru*

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI, NRC Kurchatov Institute. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: *alanko@ipsiras.ru* ORCID: 0000–0002–0488–4267

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Finished postgraduate study in 2006 with speciality 01.04.05 "Optics". A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute, NRC Kurchatov Institute, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 200 papers and 3 inventions. E-mail: *anton@ipsiras.ru*

Aleksey Mikhailovich Telegin, in 2009 graduated from Samara State Aerospace University with a degree in "Radio Engineering", in 2012 he defended his thesis, Ph.D., associate professor of the Designing and Technology of Electronic Systems and Devices department, Samara University, senior researcher of Institute of Space Device Engineering, Samara University. Research interests: space instrumentation. E-mail: *talex85@mail.ru*

Received Febrary 30, 2025. The final version – June 17, 2025.