

Спектр оптических вихрей в фокусе вихревого пучка

А.А. Ковалёв^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

На основе формул Ричардса–Вольфа получены аналитические выражения для спектра оптических вихрей в фокусе вихревого пучка с эллиптической поляризацией. Установлено, что спектр не зависит от фазы фокусируемого поля. От поляризации зависит только асимметрия спектра, но не распределение между главной и побочными компонентами. Напротив, от радиальной амплитуды фокусируемого поля асимметрия спектра не зависит, но зависят доли энергии, идущие в главную и в побочные компоненты. Получены квадратичные неравенства, позволяющие определить возможность получения конкретного спектра оптических вихрей с помощью ограничения начального поля кольцевой диафрагмой.

Ключевые слова: оптический вихрь, острая фокусировка, эллиптическая поляризация, спектр орбитального углового момента, формулы Ричардса–Вольфа, кольцевая диафрагма.

Цитирование: Ковалёв, А.А. Спектр оптических вихрей в фокусе вихревого пучка / А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 3. – 1709. – doi:10.18287/COJ1709.

Citation: Kovalev AA. Spectrum of optical vortices at the focus of a vortex beam. Computer Optics 2026; 50(3): 1709. doi:10.18287/COJ1709.

Введение

Структурированный свет может описываться многими параметрами, наиболее распространёнными из которых являются орбитальный угловой момент [1, 2], топологический заряд [2, 3]. Также известны такие величины, как параметр качества пучка M^2 [4, 5], эксцесс [6], орбитальные угловые моменты высших порядков [7], моменты интенсивности [8, 9]. Для описания векторных полей аналогом топологического заряда является индекс поляризационной сингулярности [10, 11]. Также известно, что орбитальный угловой момент векторного поля равен сумме орбитальных угловых моментов всех трёх его составляющих [12]. Все эти величины являются интегральными, описывающими световое поле в целом. Более детально могут описывать световое поле векторные величины, наиболее известной из которых является спиральный спектр, или спектр оптических вихрей, или спектр орбитального углового момента (ОУМ-спектр), характеризующий модовый состав всего пучка, который изучается уже более 20 лет [13–15]. За это время исследовалось влияние различных преобразований структурированных пучков на их ОУМ-спектр.

Так, в [16] изучался ОУМ-спектр внеосевых и наклонных однокольцевых пучков Лагеррра–Гаусса. В [17] показано, что ОУМ-спектр вихревых пучков расширяется при усилении аберрации комы. В [18] изучалось изменение ОУМ-спектра вихревого пучка при его полном внутреннем отражении и установлено, что при этом возникают побочные компоненты спектра, топологический заряд которых отличается от заряда падающего пучка на ± 1 . В [19] рассматривалось появление новых компонент ОУМ-спектра в процессе генерации второй гармоники, когда вихревой пучок проходит в нелинейном кристалле с неоднородным показателем преломления.

Были также разработаны различные методы измерения ОУМ-спектра. Например, в [20] предложен метод измерения ОУМ-спектра с помощью геометрического преобразования, в котором винтовая фаза света преобразуется в линейный градиент фазы. В [21] предложен метод определения комплексного ОУМ-спектра путём согласования мод. В этом методе определяются не только амплитуды компонент ОУМ-спектра, но и разности фаз между ними. В [22] рассматривается процедура цифровой обработки для определения ОУМ-спектра по одному снимку.

Одним из возможных использований ОУМ-спектра является анализ различных отклонений в оптических системах. Например, в [23] с помощью анализа ОУМ-спектра и обработки изображения с помощью преобразования Хоу [24] определяется несоосность вихревого светового пучка с осью приёмника.

Также ОУМ-спектр может рассматриваться как векторный носитель данных или сигнал в беспроводной или в волноводной оптической передаче информации. Например, в [25] рассматривается алгоритм корректировки ОУМ-спектра в системе оптической связи в свободном пространстве на основе среднеквадратичного значения ОУМ-спектра, используемого в качестве индикатора для коррекции несоосности. В [26] предложен алгоритм спиральной модуляции поля для формирования заданного ОУМ-спектра.

При этом многие оптические эффекты проявляются при острой фокусировке светового излучения. К числу таких эффектов относится потеря круговой симметрии фокусного пятна [27], достижение фокусного пятна,

меньшего дифракционного предела [28, 29], формирование протяжённых тёмных световых каналов субволновой ширины [30], формирование фотонных колёс [31], спин-орбитальное преобразование [32], возникновение полностью поляризованных областей при фокусировке неполяризованного света [33], возникновение областей с ненулевым спиновым угловым моментом (эллиптической поляризацией) вблизи фокуса поля с неоднородной линейной поляризацией (спиновый эффект Холла) [34], формирование обратного потока энергии [35, 36].

В данной работе мы изучаем свойства ОУМ-спектра в остром фокусе эллиптически поляризованного оптического вихря. Возникновение побочных угловых гармоник отмечалось ещё в [37]. Их появление объяснялось преобразованием спинового углового момента в орбитальный. Однако был не выяснен ряд вопросов. Каков максимально и минимально возможный вклад побочных угловых гармоник в энергию поля? Как он зависит от поляризации, амплитуды и фазы фокусируемого оптического вихря? Любой ли ОУМ-спектр можно сформировать при фокусировке одного вихря? Позже, в [38], были установлены значения компонент ОУМ-спектра при фокусировке линейно поляризованного оптического вихря m -го порядка с постоянной амплитудой и анализ этого спектра позволил пренебречь побочными компонентами. В данной работе мы рассматриваем ОУМ-спектр в общем виде при произвольном радиальном распределении амплитуды фокусируемого вихря, устанавливаем предельные значения разных компонент и влияние поляризации на вид ОУМ-спектра. Затем рассматривается случай фокусировки оптического вихря, прошедшего через кольцевую диафрагму, и устанавливаются условия, позволяющие определить возможность формирования заданного ОУМ-спектра.

1. Спектр орбитального углового момента светового поля

Комплексная амплитуда произвольного скалярного светового поля в цилиндрических координатах (r, φ, z) периодична по полярному углу и потому может быть разложена в ряд Фурье:

$$U(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(r, z) \exp(in\varphi), \quad (1)$$

где n – порядки угловых гармоник, A_n – коэффициенты разложения:

$$A_n(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, z) \exp(-in\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

Энергия n -й угловой гармоники равна

$$C_n = \int_0^\infty |A_n(r, z)|^2 r dr. \quad (3)$$

Тогда энергия всего поля равна сумме энергий всех его гармоник, а спектр угловых гармоник, называемый также спиральным спектром [12], спектром оптических вихрей [15] или спектром орбитального углового момента [13, 14], состоит из относительных энергий гармоник [12]:

$$P_n = C_n \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} C_q \right)^{-1}. \quad (4)$$

Если пучок не скалярный, а векторный, заданный комплексной амплитудой $\mathbf{E}(r, \varphi, z)$, то энергия n -й угловой гармоники равна сумме энергий n -й гармоники у каждой компоненты поля:

$$C_n = C_{nx} + C_{ny} + C_{nz}, \quad (5)$$

где C_{nj} – энергия угловой гармоники n -го порядка j -й компоненты поля ($j=x, y, z$):

$$C_{nj} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \int_0^{2\pi} E_j(r, \varphi, z) \exp(-in\varphi) d\varphi \right|^2 r dr. \quad (6)$$

Далее ОУМ-спектр может быть найден так же, как и для скалярного поля, то есть по формуле (4).

Знание ОУМ-спектра позволяет легко найти общий (интегральный) орбитальный угловой момент всего поля: $J_z = \sum n P_n / \sum P_n$. Заметим, что у непараксиального поля вектор ОУМ имеет и поперечные составляющие J_x и J_y . Но так как мы рассматриваем пучок, который до фокусировки имел осевую симметрию относительно оси z и оптический вихрь предполагается только в поперечной плоскости x, y , мы далее рассматриваем только продольную составляющую J_z .

2. Острая фокусировка оптического вихря с эллиптической поляризацией

Рассмотрим фокусировку оптического вихря с эллиптической поляризацией:

$$\mathbf{E}_0(\theta, \varphi) = A(\theta) \exp(im\varphi) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где (θ, φ) – угловые сферические координаты с центром в фокусе, m – топологический заряд вихря, $A(\theta)$ – радиальное распределение амплитуды, $(a_x, a_y)^T$ – вектор Джонса, задающий эллиптическую поляризацию. Световое поле вблизи фокуса описывается в общем случае теорией Ричардса–Вольфа [27], и для поля (1) оно

получено ещё в 2009 году [37]. Выражения в [37] записаны в виде интегралов, включающих несколько слагаемых, каждое из которых отличается по своей структуре, умножаясь на разные выражения от угла θ . Позднее для конкретных поляризаций были получены аналогичные выражения, позволяющие записать комплексные амплитуды компонент в едином виде, удобном для дальнейшего анализа побочных компонент ОУМ-спектра. Так, в случае горизонтальной линейной поляризации ($a_x = 1, a_y = 0$) комплексные амплитуды всех трёх компонент электрической напряжённости в фокусе были получены в [39]. Объединяя выражения из [39] с аналогичными выражениями для вертикальной линейной поляризации ($a_x = 0, a_y = 1$), получим поле в фокусе для начального линейно поляризованного поля (7):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \varphi, z) = & -i^{m+1} I_{0,m} e^{im\varphi} [a_x \ a_y \ 0]^T + \frac{1}{2} i^{m-1} (a_x - ia_y) I_{2,m+2} e^{i(m+2)\varphi} [1 \ -i \ 0]^T + \\ & + \frac{1}{2} i^{m-1} (a_x + ia_y) I_{2,m-2} e^{i(m-2)\varphi} [1 \ i \ 0]^T - i^m (a_x - ia_y) I_{1,m+1} e^{i(m+1)\varphi} [0 \ 0 \ 1]^T + \\ & + i^m (a_x + ia_y) I_{1,m-1} e^{i(m-1)\varphi} [0 \ 0 \ 1]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

где T – знак транспонирования векторов Джонса, а $I_{\nu,\mu}$ – следующие функции:

$$I_{\nu,\mu} = 2kf \int_0^\alpha \sin^{\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{1/2}(\theta) A_m(\theta) \exp(ikz \cos \theta) J_\mu(kr \sin \theta) d\theta, \quad (9)$$

где ν и μ – целые числа, $\nu = 0, 1, 2$, μ – порядок функции Бесселя.

Согласно (8), световое поле в фокусе состоит из пяти угловых гармоник порядков от $m-2$ до $m+2$. Наличие этих гармоник отмечалось ещё в [37]. Там не оценивался их вклад, но объяснялась их причина – частичное преобразование спинного углового момента в орбитальный. Угловую гармонику m -го порядка будем называть главной, а возникшие новые угловые гармоники, отличные от m -й, будем далее называть побочными, как принято называть их в литературе [19, 40]. Из (8) видно, что побочные гармоники порядков $m \pm 2$ имеют круговую поляризацию, а гармоники порядков $m \pm 1$ – продольную.

3. Спектр орбитального углового момента в фокусе оптического вихря с эллиптической поляризацией

Для получения ОУМ-спектра $C_{m-2,j}, \dots, C_{m+2,j}$ каждой составляющей светового поля по формуле (6) понадобятся следующие [38]:

$$\int_0^\infty |I_{\nu,\mu}(r, z)|^2 r dr = f^2 \int_0^\alpha \sin^{2\nu+1} \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^{5-2\nu} \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 d\theta. \quad (10)$$

Тогда из (8) и (6) получим:

$$C_{mj} = 2\pi |a_j|^2 \int_0^\infty |I_{0,m}(r, z)|^2 r dr = 4\pi f^2 |a_j|^2 \int_0^\alpha \sin^5 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^5 \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (11)$$

$$C_{m+2,j} = 2\pi \frac{1}{4} |a_x - ia_y|^2 \int_0^\infty |I_{2,m+2}(r, z)|^2 r dr = \pi f^2 |a_x - ia_y|^2 \int_0^\alpha \sin^5 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (12)$$

$$C_{m-2,j} = 2\pi \frac{1}{4} |a_x + ia_y|^2 \int_0^\infty |I_{2,m-2}(r, z)|^2 r dr = \pi f^2 |a_x + ia_y|^2 \int_0^\alpha \sin^5 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (13)$$

$$C_{m+1,z} = 2\pi |a_x - ia_y|^2 \int_0^\infty |I_{1,m+1}(r, z)|^2 r dr = 4\pi f^2 |a_x - ia_y|^2 \int_0^\alpha \sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (14)$$

$$C_{m-1,z} = 2\pi |a_x + ia_y|^2 \int_0^\infty |I_{1,m-1}(r, z)|^2 r dr = 4\pi f^2 |a_x + ia_y|^2 \int_0^\alpha \sin^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^3 \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (15)$$

где $j = x$ или y . Знание составляющих спектра (11)–(15) позволяет определить энергию всего поля W :

$$W = 2\pi f^2 (|a_x|^2 + |a_y|^2) \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin \theta d\theta, \quad (16)$$

а также его орбитальный угловой момент J_z , нормированный на энергию:

$$\frac{J_z}{W} = m + 4 \frac{Im(a_x^* a_y)}{|a_x|^2 + |a_y|^2} \frac{\int_0^\alpha \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) |A(\theta)|^2 \sin \theta d\theta}{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin \theta d\theta}. \quad (17)$$

Из (17) видно, что нормированный ОУМ, который до фокусировки был равен m , меняется на величину, определяемую вторым слагаемым. Изменение ОУМ происходит из-за наличия у начального поля спинного углового момента (если эллиптическая поляризация не вырождается в линейную), который при фокусировке частично переходит в орбитальный.

Второе слагаемое не превышает по модулю единицу, так как $\sin^2(\theta/2) \leq 1/2$ при $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Изменение первоначального ОУМ m на значение, не превышающее единицу, согласуется с объяснением формирования побочных компонент в [37], которое заключается в том, что спинной угловой момент, который имеет место, если в (17) $Im(a_x^* a_y) \neq 0$, стимулирует формирование дополнительного орбитального углового момента. В частности, видно, что при линейной поляризации (a_x и a_y вещественны) нормированный ОУМ остаётся равным m . Сохранение суммы спинного и орбитального углового момента до фокусировки и в фокусе в случае круговой поляризации рассматривалось в нашей недавней работе [41].

Получение ОУМ-спектра каждой компоненты поля позволяет теперь установить распределение энергии в фокусе по трём составляющим: энергия W_{IP} главной компоненты с топологическим зарядом m и с начальной поляризацией (индекс IP – initial polarization), суммарная энергия W_{CP} побочных компонент с зарядами $m \pm 2$ и с круговой поляризацией (CP – circular polarization), а также суммарная энергия W_{LP} побочных компонент с зарядами $m \pm 1$ с продольной поляризацией (LP – longitudinal polarization):

$$W_{IP} = C_{mx} + C_{my} = 2\pi f^2 (|a_x|^2 + |a_y|^2) \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) d\theta, \quad (18)$$

$$W_{CP} = C_{m-2,x} + C_{m-2,y} + C_{m+2,x} + C_{m+2,y} = 2\pi f^2 (|a_x|^2 + |a_y|^2) \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) d\theta, \quad (19)$$

$$W_{LP} = C_{m-1,z} + C_{m+1,z} = \pi f^2 (|a_x|^2 + |a_y|^2) \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin^3(\theta) d\theta. \quad (20)$$

Отсюда видно, что ни фаза, ни поляризация фокусируемого излучения никак не способна повлиять на доли энергии, идущие в побочные компоненты ОУМ-спектра – в продольную поляризацию (с зарядами $m \pm 1$) и в поперечную круговую поляризацию (с зарядами $m \pm 2$), то есть эти доли полностью определяются радиальным распределением амплитуды $A(\theta)$. Зато поляризация влияет на асимметрию формируемого ОУМ-спектра.

3.1. Управление асимметрией спектра орбитального углового момента с помощью поляризации фокусируемого вихря

Из (11)–(15) видно, что соотношение между компонентами в правой части ОУМ-спектра (с зарядами $m + 1$ и $m + 2$) и компонентами в левой части ОУМ-спектра (с зарядами $m - 1$ и $m - 2$) равно

$$\gamma = \frac{|a_x - ia_y|^2}{|a_x + ia_y|^2}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что при линейной поляризации ОУМ-спектр симметричен ($\gamma = 1$). Если же компоненты E_x и E_y равны по модулю, но между ними есть фазовая задержка σ , ($a_x = 1$, $a_y = e^{i\sigma}$), то компоненты правой части спектра больше по модулю компонент левой части в $\gamma = (1 + \sin \sigma)/(1 - \sin \sigma)$ раз. Так, чтобы сделать правую часть в γ раз больше, чем левую, надо внести фазовую задержку у компоненты E_y :

$$\sigma = \arcsin \left[\frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \right]. \quad (22)$$

Так как $|(\gamma - 1)/(\gamma + 1)| \leq 1$ при любом значении $0 \leq \gamma < \infty$, подбором поляризации можно добиться любой асимметрии ОУМ-спектра: если $\gamma < 1$, то есть левая часть спектра больше (по модулю), то $\sigma < 0$ и поляризация левая эллиптическая, и наоборот – если больше правая часть спектра, то поляризация должна быть правая эллиптическая.

3.2. Управление распределением спектра орбитального углового момента по побочным компонентам с помощью амплитуды фокусируемого вихря

Далее рассмотрим, как можно перераспределять энергию в порядки $m \pm 1$ и $m \pm 2$ за счёт подбора амплитуды $A(\theta)$. Определим долю энергии светового поля, которая идёт в разные угловые гармоники, и попытаемся подобрать функции $A(\theta)$ такими, чтобы они были равны соответственно неким заданным значениям δ_{IP} , δ_{CP} , δ_{LP} :

$$\delta_{IP} = \frac{W_{IP}}{W} = \frac{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta}, \quad (23)$$

$$\delta_{CP} = \frac{W_{CP}}{W} = \frac{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) d\theta}{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta}, \quad (24)$$

$$\delta_{LP} = \frac{W_{LP}}{W} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin^3(\theta) d\theta}{\int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin(\theta) d\theta}. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что выполняется условие нормировки: $\delta_{IP} + \delta_{CP} + \delta_{LP} = 1$. Получим далее оценки для долей энергии угловых гармоник, которые могут достигаться. Так как $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, справедливы неравенства $1/4 \leq \cos^4(\theta/2) \leq 1$, $0 \leq \sin^4(\theta/2) \leq 1/4$, $0 \leq \sin^3(\theta) \leq 1$. Тогда доли энергии угловых гармоник могут заключаться только в следующих пределах:

$$\frac{1}{4} \leq \delta_{IP} \leq 1, \quad 0 \leq \delta_{CP} \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq \delta_{LP} \leq \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Соответственно, задача подбора функции $A(\theta)$ может быть разрешима только в случае, если желаемые доли энергии δ_{IP} , δ_{CP} , δ_{LP} находятся в этих пределах, то есть энергия побочных компонент ОУМ-спектра с продольной поляризацией не может быть больше половины энергии всего поля, энергия побочных компонент с круговой поляризацией и с топологическими зарядами $m \pm 2$ не может быть больше четверти общей энергии, а энергия главной компоненты с зарядом m , поляризация которой совпадает с начальной эллиптической поляризацией, не

может быть меньше четверти энергии всего поля. Кроме того, можно показать, что энергия продольно поляризованных компонент как минимум в два раза превышает энергию компонент с круговой поляризацией:

$$W_{LP} - 2W_{CP} = 2 \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \sin(\theta) d\theta \geq 0. \quad (27)$$

Объединяя (26) и (27), получим необходимое условие возможности формирования конкретного распределения ОУМ-спектра по побочным компонентам:

$$0 \leq \delta_{CP} \leq \frac{\delta_{LP}}{2} \leq \frac{1}{4} \leq \delta_{IP} \leq 1. \quad (28)$$

Если условия (28) выполняются, то для формирования распределения по побочным компонентам (δ_{IP} , δ_{CP} , δ_{LP}) надо решить систему уравнений (23)–(25), которую можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \left[\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) - \delta_{IP} \right] \sin(\theta) d\theta &= 0, \\ \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 \left[\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) - \delta_{CP} \right] \sin(\theta) d\theta &= 0, \\ \int_0^\alpha |A(\theta)|^2 [\sin^2(\theta) - 2\delta_{LP}] \sin(\theta) d\theta &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

4. Спектр орбитального углового момента в фокусе эллиптически поляризованного оптического вихря с постоянной амплитудой, ограниченного кольцевой диафрагмой

Поскольку модуляция фазы не влияет на ОУМ-спектр, а поляризация влияет только на его асимметрию, распределением энергии по компонентам ОУМ-спектра можно управлять с помощью распределения амплитуды фокусируемого поля. В данной работе не решается задача (29) в общем виде, а рассматривается самое простое управление амплитудой – обрезание кольцевой диафрагмой. Заметим, что управление ОУМ-спектром в этом случае достигается ценой расщепления поля на широкий спектр мод по радиальному индексу [42]. Будем искать решение системы (29) в виде равномерного начального поля, прошедшего через кольцевую диафрагму с углами α и β :

$$|A(\theta)| = \begin{cases} 1, & \alpha \leq \theta \leq \beta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (30)$$

Тогда все интегралы в (23)–(25) являются берущимися и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{IP} = \frac{2}{3} \frac{[\cos^6(\frac{\theta}{2})]_{\theta=\alpha}^{\beta}}{[\cos(\theta)]_{\theta=\alpha}^{\beta}}, \\ \delta_{CP} = -\frac{2}{3} \frac{[\sin^6(\frac{\theta}{2})]_{\theta=\alpha}^{\beta}}{[\cos(\theta)]_{\theta=\alpha}^{\beta}}, \\ \delta_{LP} = -\frac{1}{6} \frac{[\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)]_{\theta=\alpha}^{\beta}}{[\cos(\theta)]_{\theta=\alpha}^{\beta}}. \end{cases} \quad (31)$$

Введём обозначения:

$$a = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad b = 2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (32)$$

Тогда уравнения (31) примут следующий вид:

$$\begin{cases} (2-a)^2 + (2-a)(2-b) + (2-b)^2 = 12\delta_{IP}, \\ a^2 + ab + b^2 = 12\delta_{CP}, \\ (1-a)^2 + (1-a)(1-b) + (1-b)^2 = 3(1-2\delta_{LP}). \end{cases} \quad (33)$$

Вычтем второе уравнение из первого и третьего:

$$\begin{cases} a + b = 2 - 2\delta_{IP} + 2\delta_{CP}, \\ a^2 + ab + b^2 = 12\delta_{CP}, \\ a + b = 4\delta_{CP} + 2\delta_{LP}. \end{cases} \quad (34)$$

С учётом условия нормировки ($\delta_{IP} + \delta_{CP} + \delta_{LP} = 1$) первое уравнение ничем не отличается от третьего и мы далее исключим его от системы. Получим:

$$a^2 + ab + b^2 = S, \quad a + b = T, \quad (35)$$

где $S = 12\delta_{CP}$, $T = 4\delta_{CP} + 2\delta_{LP}$. Эта система сводится к квадратному уравнению, и нас интересует не просто его разрешимость, а чтобы оба корня были в интервале от 0 до 1 (так как $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$). Выражая b из второго уравнения и подставляя его в первое, получим:

$$a^2 - Ta + T^2 - S = 0. \quad (36)$$

Дискриминант этого уравнения равен $D = T^2 - 4(T^2 - S) = 4S - 3T^2$. Так как для кольцевой диафрагмы должно быть $\alpha < \beta$, то надо, чтоб выполнялось условие $a < b$. Тогда решение системы (35) имеет вид:

$$a = \frac{1}{2}(T - \sqrt{4S - 3T^2}), \quad b = \frac{1}{2}(T + \sqrt{4S - 3T^2}). \quad (37)$$

Объединяя условие неотрицательности дискриминанта и условия принадлежности обоих корней интервалу от 0 до 1, получим условия разрешимости задачи нахождения кольцевой диафрагмы для фокусировки в заданный спектр угловых гармоник:

$$\begin{cases} 4S - 3T^2 \geq 0, \\ T - \sqrt{4S - 3T^2} \geq 0, \\ T + \sqrt{4S - 3T^2} \leq 2. \end{cases} \quad (38)$$

Упрощая эти условия, получим:

$$\frac{3T^2}{4} \leq S \leq \min\{T^2, T^2 - T + 1\}, \quad (39)$$

где $S = 12\delta_{CP}$, $T = 4\delta_{LP} + 2\delta_{LP}$.

Область допустимых значений в пространстве побочных компонент δ_{LP} и δ_{CP} показана на рис. 1. Верхняя граница имеет выступ (точка A), соответствующий случаю, когда в правой части второго неравенства в (39) вместо T^2 начинает работать $T^2 - T + 1$. Это возникает при условии $S = T^2 = 1$, то есть $\delta_{LP} = 1/3$ и $\delta_{CP} = 1/12$. Согласно (37), в этом случае $a = 0$, $b = 1$, то есть углы кольцевой диафрагмы равны $\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$, то есть это фокусировка плоского светового поля линзой с предельной числовой апертурой, равной единице (фокусировка полной полусферой).

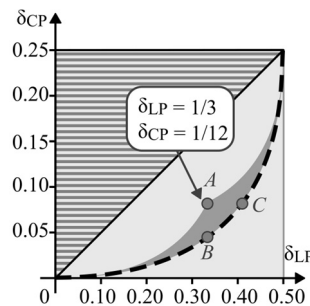


Рис. 1. Допустимые значения (тёмно-серая область) побочных компонент ОУМ-спектра с продольной (δ_{LP}) и с круговой (δ_{CP}) поляризацией при фокусировке плоского эллиптически поляризованного оптического вихря, ограниченного кольцевой диафрагмой. Заштрихованная треугольная область — значения, запрещённые условием (27). Пунктирная линия соответствует предельным случаям бесконечно узкой кольцевой диафрагмы. Точка A соответствует фокусировке полной полусферой ($\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$), точки B и C соответствуют предельным допустимым изменениям в ОУМ-спектре от точки A соответственно при уменьшении побочных компонент с круговой поляризацией (B) и при увеличении компонент с продольной поляризацией (C)

Самая широкая часть допустимой области как по горизонтали, так и по вертикали проходит через точку фокусировки всей полусферой (точка A на рис. 1).

Движение от этой точки по горизонтали соответствует увеличению энергии продольно поляризованных компонент δ_{LP} без изменения компонент с круговой поляризацией δ_{CP} . Согласно (39), можно увеличивать δ_{LP} до тех пор, пока не выполнится условие $S = 3T^2/4$. Подставляя в это условие значение $\delta_{CP} = 1/12 \approx 0,083$, получим: $\delta_{LP} = (2\sqrt{3} - 1)/6 \approx 0,411$ (точка C на рис. 1). Энергия составляющей m -го порядка с начальной эллиптической поляризацией при этом равна $\delta_{IP} = 1 - \delta_{CP} - \delta_{LP} = (13 - 4\sqrt{3})/12 \approx 0,506$.

Аналогично, движение от точки A на рис. 1 по вертикали соответствует уменьшению энергии побочных компонент с круговой поляризацией δ_{CP} без изменения компонент с продольной поляризацией δ_{LP} . Согласно (39), можно уменьшать δ_{CP} до тех пор, пока не выполнится условие $3T^2/4$. Подставляя в это условие $\delta_{LP} = 1/3 \approx 0,333$, получим: $\delta_{CP} = (2 - \sqrt{3})/6 \approx 0,045$ (точка B на рис. 1). Энергия составляющей m -го порядка с начальной эллиптической поляризацией при этом равна $\delta_{IP} = 1 - \delta_{CP} - \delta_{LP} = (2 + \sqrt{3})/6 \approx 0,622$.

5. Численное моделирование

5.1. Управление асимметрией ОУМ-спектра

Сначала продемонстрируем управление асимметрией спектра с помощью подбора поляризации начального поля. Известно, что при острой фокусировке становится существенным вклад продольной составляющей вектора электрической напряжённости светового поля [29]. Попытаемся управлять этим вкладом, придав ему конкретное значение. Согласно (26), он в принципе не может превышать 50 % от всей энергии. Но, согласно рис. 1, такой вклад

достигается в предельном случае бесконечно тонкой кольцевой апертуры. Поэтому выберем долю энергии продольно поляризованных компонент ОУМ-спектра 45 % ($\delta_{LP}=0,45$). Согласно рис. 1, этого можно добиться кольцевой диафрагмой, если доля побочных компонент ОУМ-спектра с круговой поляризацией равна около 13 % ($\delta_{CP}=0,13$). Проверим такую возможность с помощью неравенств (39): $S=12\delta_{CP}=1,56$, $T=4\delta_{CP}+2\delta_{LP}=1,42$. Так как $1,5123=3T^2/4 \leq S=1,56 \leq \min\{T^2, T^2-T+1\}=\min\{2,0164, 1,5964\}$, неравенства (39) подтверждают возможность формирования такого ОУМ-спектра. Отсюда найдём углы кольцевой диафрагмы: $a=0,4916$, $b=0,9284$, $\alpha=\arccos(1-a) \approx 59,442^\circ$, $\beta=\arccos(1-b) \approx 85,894^\circ$.

На рис. 2 показаны распределения интенсивности (рис. 2а, в, д, ж) и ОУМ-спектры (рис. 2б, г, е, з), полученные по формулам (4)–(6) при следующих параметрах: длина волны $\lambda=532$ нм, фокусное расстояние линзы $f=10$ мкм, топологический заряд фокусируемого вихря $m=3$, поляризация подобрана по формулам (21)–(22) так, чтобы правые побочные компоненты (с топологическими зарядами 4 и 5) превышали левые (с топологическими зарядами 1 и 2) в $\gamma=0$ раз (левая круговая поляризация, рис. 2а, б), в $\gamma=\infty$ раз (правая круговая поляризация, рис. 2в, г), в $\gamma=1$ раз (линейная поляризация под углом 45° , рис. 2д, е), в $\gamma=2$ раза (эллиптическая поляризация, рис. 2ж, з).

Из рис. 2 видно, что на всех распределениях интенсивности присутствуют боковые кольца. Это происходит потому, что фокусировка происходит с большой числовой апертурой (углы кольцевой диафрагмы $\alpha \approx 59^\circ$, $\beta \approx 86^\circ$). Распределения, полученные для круговой поляризации (рис. 2а, в), обладают радиальной симметрией, потому что при правой (левой) круговой поляризации падающего поля, согласно (8), побочная компонента ОУМ-спектра имеет соответственно левую (правую) круговую поляризацию. Из-за ортогональности двух круговых поляризаций главная компонента ОУМ-спектра не интерферирует с побочной и потому распределение их суммы также радиально симметрично. Для линейной же (рис. 2д) или эллиптической (рис. 2ж) поляризации формируются обе побочные компоненты с круговой поляризацией и с зарядами $m-2=1$ и $m+2=5$. Поляризации главной и побочных компонент не ортогональны и интерферируют между собой, формируя фокусную картину, вытянутую в направлении поляризации начального поля, то есть под углом 45° , что согласуется с [27] и ссылками оттуда на более ранние работы.

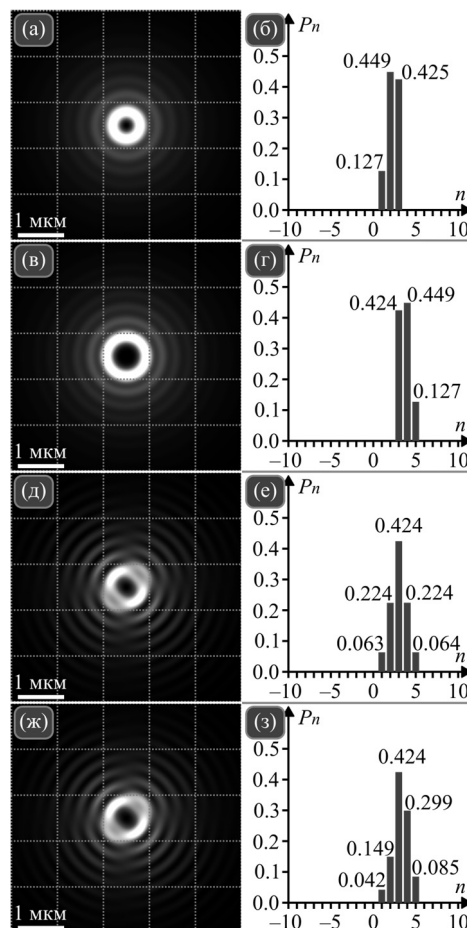


Рис. 2. Распределения интенсивности (а, в, д, ж) и ОУМ-спектры (б, г, е, з) эллиптически поляризованного сфокусированного оптического вихря при следующих параметрах: длина волны $\lambda=532$ нм, фокусное расстояние $f=10$ мкм, топологический заряд фокусируемого вихря $m=3$, поляризация подобрана по формулам (21)–(22) так, чтобы правые побочные компоненты превышали левые в $\gamma=0$ раз (а, б), в $\gamma=\infty$ раз (в, г), в $\gamma=1$ раз (д, е), в $\gamma=2$ раза (ж, з). Радиусы кольцевой диафрагмы равны $\alpha \approx 59,442^\circ$, $\beta \approx 85,894^\circ$ и подобраны так, чтобы доли энергии, идущие в главную и в побочные компоненты ОУМ-спектра, составили $\delta_{LP}=0,42$, $\delta_{CP}=0,13$, $\delta_{LP}=0,45$

Также на рис. 2а, в видно, что в случае левой круговой поляризации начального поля тёмное пятно в центре меньше, чем в случае правой круговой поляризации. Это объясняется меньшим диаметром побочных компонент 1-го и 2-го порядка в первом случае по сравнению с диаметрами побочных компонент 4-го и 5-го порядка во втором случае.

На рис. 2 видно, что, рассчитанные ОУМ-спектры действительно обладают заданной асимметрией, а числа над отдельными компонентами показывают, что, как и планировалось, в побочные компоненты с продольной поляризацией во всех случаях пошло около 45 % всей энергии. Соответственно, в побочные компоненты с круговой поляризацией пошло примерно 13 % энергии, а остальная энергия (примерно 42 %) пошла в главную компоненту ОУМ-спектра.

5.2. Управление распределением ОУМ-спектра по побочным компонентам

Рассмотрим теперь управление распределением ОУМ-спектра по побочным компонентам. Для наглядности выберем самую широкую часть допустимой области в пространстве побочных компонент (точки А, В, С на рис. 1). Согласно теории [38], фокусировка полной полусферой ($\alpha=0$, $\beta=\pi/2$) приводит к распределению $\delta_{IP}=7/12 \approx 0,583$, $\delta_{LP}=1/3 \approx 0,333$ и $\delta_{CP}=1/12 \approx 0,083$ (точка А на рис. 1). Выберем для примера асимметрию, при которой правая часть ОУМ-спектра в два раза превышает левую, как на рис. 2ж, з. Распределение интенсивности и ОУМ-спектр такого поля показаны на рис. 3а,б.

Из рис. 1 видно, что можно увеличить компоненты ОУМ-спектра с продольной поляризацией, не изменяя компоненты с круговой поляризацией, и наоборот. В первом случае получим точку С на рис. 1, для которой $\delta_{LP} \approx 0,411$. Этот случай соответствует бесконечно узкой кольцевой апертуре, так как дискриминант уравнения (36) равен нулю. Выберем близкие параметры: $\delta_{LP}=0,400$, $\delta_{IP}=0,520$ и $\delta_{CP}=0,080$. Рассчитаем углы кольцевой диафрагмы для такого ОУМ-спектра: $S=0,96$, $T=1,12$, $a \approx 0,421$, $b \approx 0,699$, $\alpha \approx 54,65^\circ$, $\beta \approx 72,46^\circ$. При расчёте получился следующий ОУМ-спектр (рис. 3з): $\delta_{IP}=0,521$, $\delta_{LP}=0,400$ (0,133 + 0,267) и $\delta_{CP}=0,079$ (0,026 + 0,053).

Аналогично, не изменяя компоненту ОУМ-спектра с продольной поляризацией в точке А на рис. 1, уменьшим компоненты с круговой поляризацией, получив точку В с $\delta_{CP} \approx 0,045$. Выберем также близкие параметры: $\delta_{IP}=0,620$, $\delta_{LP}=0,330$ и $\delta_{CP}=0,050$. Рассчитаем углы кольцевой диафрагмы для такого ОУМ-спектра: $S=0,60$, $T=0,86$, $a \approx 0,217$, $b \approx 0,643$, $\alpha \approx 38,48^\circ$, $\beta \approx 69,07^\circ$. При расчёте получился следующий ОУМ-спектр (рис. 3е): $\delta_{IP}=0,621$, $\delta_{LP}=0,330$ (0,110 + 0,220) и $\delta_{CP}=0,049$ (0,016 + 0,033).

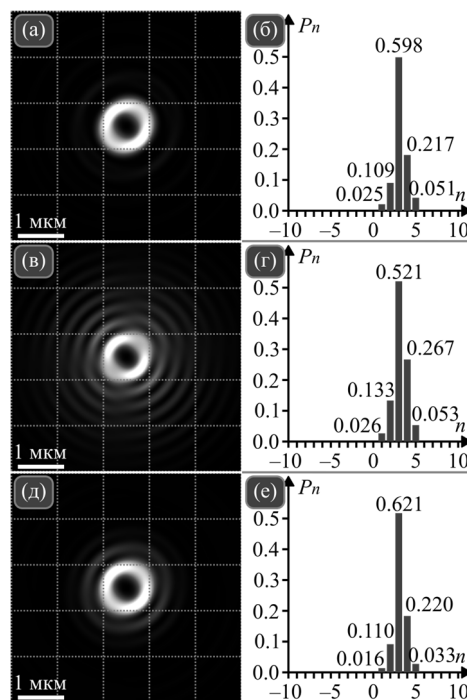


Рис. 3. Распределения интенсивности (а, в, д) и ОУМ-спектры (б, г, е) для этих распределений (б, г, е), соответствующие точкам А, С, В с рис. 1, при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, фокусное расстояние сферической линзы $f = 10$ мкм, топологический заряд фокусируемого вихря $t = 3$, поляризация подобрана так, чтобы правая часть спектра в два раза превышала левую ($\gamma = 2$), радиусы кольцевой диафрагмы подобраны так, чтобы ОУМ-спектр состоял из следующих компонент: $\delta_{IP} \approx 0,583$, $\delta_{LP} \approx 0,333$, $\delta_{CP} \approx 0,083$ (а, б), $\delta_{IP} \approx 0,520$, $\delta_{LP} \approx 0,400$, $\delta_{CP} \approx 0,080$ (в, г), $\delta_{IP} \approx 0,620$, $\delta_{LP} \approx 0,330$, $\delta_{CP} \approx 0,050$ (д, е)

В отличие от рис. 2, на рис. 3а распределение интенсивности практически без боковых колец, потому что средний угол кольцевой диафрагмы $(\alpha + \beta)/2$ заметно меньше (примерно 73° на рис. 2 и 45° на рис. 3а). На рис. 3в появилось много боковых колец, потому что средний угол кольцевой диафрагмы увеличился примерно до 64° .

На рис. 3д боковые кольца пропали, кроме одного, потому что средний угол кольцевой диафрагмы уменьшился примерно до 54° – больше, чем для рис. 3а, но меньше, чем на рис. 3в.

Заключение

Анализ светового поля в фокусе оптического вихря с эллиптической поляризацией на основе формул Ричардса–Вольфа показывает [37], что спектр орбитального углового момента (ОУМ-спектр) такого поля состоит из пяти компонент – одной главной, топологический заряд и поляризация которой совпадает с зарядом и поляризацией начального поля, и четырёх побочных – двух с круговой поляризацией и двух с продольной. Топологический заряд побочных компонент отличается от топологического заряда падающего поля на ± 2 и ± 1 . Ранее, в работе [38], мы оценили вклад побочных компонент в частном случае, когда амплитуда поля однородна, а апертура фокусирующей линзы – круглая. Это позволило пренебречь побочными компонентами и существенно упростить формулы для спинового углового момента в фокусе. Однако очевидно, что в случае неоднородной амплитуды, сосредоточенной на краях апертуры, побочные компоненты должны оказывать большее влияние и пренебрегать ими, как в [38], можно не всегда.

В данной работе исследован ОУМ-спектр оптического вихря с эллиптической поляризацией в более общем случае. Получены общие аналитические выражения (11)–(15) для всех пяти компонент ОУМ-спектра. Анализ этого спектра показал следующее.

Во-первых, радиальное распределение фазы фокусируемого вихря не влияет на ОУМ-спектр.

Во-вторых, поляризация фокусируемого вихря влияет на асимметрию ОУМ-спектра, позволяя полностью или частично перераспределять энергию в правую или левую часть спектра с соответственно повышенными или пониженными топологическими зарядами. При этом поляризация никак не влияет на доли энергии, идущие в главную компоненту ОУМ-спектра с поляризацией, как у начального поля, в побочные компоненты с круговой поляризацией, и в побочные компоненты с продольной поляризацией.

В-третьих, распределение энергии в главную компоненту ОУМ-спектра и в побочные компоненты с круговой и с продольной поляризацией полностью определяется радиальным распределением амплитуды фокусируемого излучения, которое наоборот, в отличие от поляризации, не оказывает влияния на асимметрию ОУМ-спектра.

Согласно полученным выражениям для ОУМ-спектра, главная компонента не может составлять менее 25 % всей энергии поля. Две побочные компоненты с продольной поляризацией в сумме не могут составлять более 50 % энергии поля. Две побочные компоненты с круговой поляризацией в сумме не могут составлять более 50 % энергии побочных компонент с продольной поляризацией (неравенства (28)).

Далее мы рассмотрели простую форму амплитуды фокусируемого излучения – световое поле постоянной амплитуды, ограниченное кольцевой диафрагмой. Для такого случая получены квадратичные неравенства, описывающие допустимую область в пространстве побочных компонент – область, которая соответствует ОУМ-спектрам, которые можно сформировать кольцевой диафрагмой (неравенства (39)).

Численное моделирование подтвердило возможность формирования ОУМ-спектров заданного вида с помощью кольцевой диафрагмы.

Для измерения спектра оптических вихрей у поперечных компонент вектора ОУМ необходимо анализировать распределение поля в продольных плоскостях xz и yz . В данной работе мы ограничились рассмотрением спектра только продольной компонентой ОУМ, которая определяется распределением поля в поперечной плоскости xy . Основная трудность экспериментального измерения такого ОУМ-спектра состоит в его зависимости от всех трёх составляющих поля E_x , E_y , E_z . Если эти компоненты измерены, например с помощью интерферограмм, то дальнейшее определение ОУМ-спектра не представляет труда и является чисто вычислительной процедурой по формулам (4) – (6).

Среди возможных применений результатов работы мы видим компактные анализаторы различных отклонений в оптических системах путём анализа ОУМ-спектра в остром фокусе, как, например, в [16, 17, 23], или компактные приёмники информации в оптической передаче данных, закодированных топологическим зарядом и поляризацией. Формирование заданного ОУМ-спектра также нужно для конструирования трёхмерных оптических ловушек, построения оптических пинцетов, избирательных к размерам частиц [26].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 26-12-00117 (в части теории) и в рамках Государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» (в части моделирования).

References

- [1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45: 8185-8189. doi:10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [2] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. doi:10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [3] Berry MV, Liu W. No general relation between phase vortices and orbital angular momentum. *J Phys A: Math Theor* 2022; 55: 374001. doi:10.1088/1751-8121/ac80de.

- [4] Siegman A. Lasers. Mill Valley, CA: Univ. Science; 1986. ISBN: 0935702113.
- [5] Yoda H, Polynkin P, Mansuripur M. Beam quality factor of higher-order modes in a step-index fiber. *J Lightwave Technol* 2006; 24(3): 1350-1355. doi:10.1109/JLT.2005.863337.
- [6] Martinez-Herrero R, Piquero G, Mejias PM. On the propagation of the kurtosis parameter of general beams. *Opt Commun* 1995; 115(3-4): 225-232. doi:10.1016/0030-4018(95)00012-W.
- [7] Le DH, Pal A, Qadeer A, Kleinert M, Kleinert J, Goel S, Khare K, Bhattacharya M. Conservation of extremal ellipticity for coherent single-mode Gaussian beams propagating in rotationally invariant media. *Opt Commun* 2022; 503: 127465. doi:10.1016/j.optcom.2021.127465.
- [8] Anan'ev YA, Bekshaev AY. Theory of intensity moments for arbitrary light beams. *Opt Spectrosc* 1994; 76(4): 558-568.
- [9] Eppich B, Gao C, Weber H. Determination of the ten second-order intensity moments. *Opt Laser Technol* 1998; 30(5): 337-340. doi:10.1016/S0030-3992(98)00063-2.
- [10] Freund I. Poincaré vortices. *Opt Lett* 2001; 26: 1996-1998. doi:10.1364/OL.26.001996.
- [11] Freund I. Polarization singularity indices in Gaussian laser beams. *Opt Commun* 2002; 201: 251-270. doi:10.1016/S0030-4018(01)01725-4.
- [12] Allen L, Padgett MJ, Babiker M. IV. The orbital angular momentum of light. *Prog Opt* 1999; 39: 291-372. doi:10.1016/S0079-6638(08)70391-3.
- [13] Molina-Terriza G, Torres JP, Torner L. Management of the angular momentum of light: preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum. *Phys Rev Lett* 2002; 88: 013601. doi:10.1103/PhysRevLett.88.013601.
- [14] Torner L, Torres JP, Carrasco S. Digital spiral imaging. *Opt Express* 2005; 13(3): 873-881. doi:10.1364/OPEX.13.000873.
- [15] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Beyond the light intensity, or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams. *Computer Optics* 2018; 42(5): 736-743. doi:10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
- [16] Vasnetsov MV, Pas'ko VA, Soskin MS. Analysis of orbital angular momentum of a misaligned optical beam. *New J Phys* 2005; 7: 46. doi:10.1088/1367-2630/7/1/046.
- [17] Zi-Yang C, Ji-Xiong P. Effect of coma aberration on orbital angular momentum spectrum of vortex beams. *Chin Phys Lett* 2009; 26(3): 034202. doi:10.1088/0256-307X/26/3/034202.
- [18] Löffler W, Hermosa N, Aiello A, Woerdman JP. Total internal reflection of orbital angular momentum beams. *J Opt* 2013; 15(1): 014012. doi:10.1088/2040-8978/15/1/014012.
- [19] Sabouri SG. Orbital angular momentum sidebands in second harmonic generation of a vortex beam by a nonlinear crystal with inhomogeneous refractive index. *J Opt* 2022; 24(6): 065501. doi:10.1088/2040-8986/ac6960.
- [20] Lavery MP, Berkhout GC, Courtial J, Padgett MJ. Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation. *J Opt* 2011; 13(6): 064006. doi:10.1088/2040-8978/13/6/064006.
- [21] Zhao P, Li S, Feng X, Cui K, Liu F, Zhang W, Huang Y. Measuring the complex orbital angular momentum spectrum of light with a mode-matching method. *Opt Lett* 2017; 42(6): 1080-1083. doi:10.1364/OL.42.001080.
- [22] Ote E, Bobkova V, Trinschek S, Rosales-Guzmán C, Denz C. Single-shot all-digital approach for measuring the orbital angular momentum spectrum of light. *APL Photonics* 2022; 7(8): 086105. doi:10.1063/5.0086536.
- [23] Gao X, Song X, Zheng Z, Xie M, Huang S. Misalignment measurement of orbital angular momentum signal based on spectrum analysis and image processing. *IEEE Trans Antennas Propag* 2020; 68(1): 521-526. doi:10.1109/TAP.2019.2938850.
- [24] Stockman G, Shapiro LG. Computer vision. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall PTR; 2001. ISBN: 0130307963.
- [25] Liu YD, Gao C, Qi X, Weber H. Orbital angular momentum (OAM) spectrum correction in free-space optical communication. *Opt Express* 2008; 16(10): 7091-7101. doi:10.1364/OE.16.007091.
- [26] Wan C, Chen J, Zhan Q. Tailoring optical orbital angular momentum spectrum with spiral complex field modulation. *Opt Express* 2017; 25(13): 15108-15117. doi:10.1364/OE.25.015108.
- [27] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc R Soc Lond A* 1959; 253: 358-379. doi:10.1098/rspa.1959.0200.
- [28] Quabis S, Dorn R, Eberler M, Glöckl O, Leuchs G. Focusing light to a tighter spot. *Opt Commun* 2000; 179(1-6): 1-7. doi:10.1016/S0030-4018(99)00729-4.
- [29] Dorn R, Quabis S, Leuchs G. Sharper focus for a radially polarized light beam. *Phys Rev Lett* 2003; 91(23): 233901. doi:10.1103/PhysRevLett.91.233901.
- [30] Tian B, Pu J. Tight focusing of a double-ring-shaped, azimuthally polarized beam. *Opt Lett* 2011; 36(11): 2014-2016. doi:10.1364/OL.36.002014.
- [31] Aiello A, Banzer P, Neugebauer M, Leuchs G. From transverse angular momentum to photonic wheels. *Nat Photonics* 2015; 9(12): 789-795. doi:10.1038/nphoton.2015.203.
- [32] Bliokh KY, Rodríguez-Fortuño FJ, Nori F, Zayats AV. Spin-orbit interactions of light. *Nat Photonics* 2015; 9(12): 796-808. doi:10.1038/nphoton.2015.201.
- [33] Lindfors K, Priimagi A, Setälä T, Shevchenko A, Friberg AT, Kaivola M. Local polarization of tightly focused unpolarized light. *Nat Photonics* 2007; 1(4): 228-231. doi:10.1038/nphoton.2007.30.
- [34] Stafeev SS, Nalimov AG, Kovalev AA, Zaitsev VD, Kotlyar VV. Circular polarization near the tight focus of linearly polarized light. *Photonics* 2022; 9(3): 196. doi:10.3390/photonics9030196.
- [35] Monteiro PB, Neto PAM, Nussenzveig HM. Angular momentum of focused beams: beyond the paraxial approximation. *Phys Rev A* 2009; 79(3): 033830. doi:10.1103/PhysRevA.79.033830.
- [36] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Energy density and energy flux in the focus of an optical vortex: reverse flux of light energy. *Opt Lett* 2018; 43(12): 2921-2924. doi:10.1364/OL.43.002921.
- [37] Chen B, Pu J. Tight focusing of elliptically polarized vortex beams. *Appl Opt* 2009; 48(7): 1288-1294. doi:10.1364/AO.48.001288.
- [38] Kovalev AA, Kotlyar VV. Spin Hall effect of double-index cylindrical vector beams in a tight focus. *Micromachines* 2023; 14(2): 494. doi:10.3390/mi14020494.

- [39] Kotlyar VV, Kovalev AA, Kozlova ES, Telegin AM. Hall effect at the focus of an optical vortex with linear polarization. *Micromachines* 2023; 14(4): 788. doi:10.3390/mi14040788.
- [40] Lu X, Wu Z, Zhang W, Chen L. Polarization singularities and orbital angular momentum sidebands from rotational symmetry broken by the Pockels effect. *Sci Rep* 2014; 4: 4865. doi:10.1038/srep04865.
- [41] Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Telegin AM. Orbital angular momentum at the tight focus of a circularly polarized Gaussian beam. *J Opt Soc Am A* 2025; 42: 52-58. doi:10.1364/JOSAA.543260.
- [42] Volyar A, Bretsko M, Akimova Y, Egorov Y. Digital sorting perturbed Laguerre-Gaussian beams by radial numbers. *J Opt Soc Am A* 2020; 37(6): 959-968. doi:10.1364/JOSAA.391153.

Сведения об авторах

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает ведущим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 08 апреля 2025 г. Окончательный вариант – 23 мая 2025 г.

Spectrum of optical vortices at the focus of a vortex beam

A.A. Kovalev ^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", Molodogvardeyskaya Str. 151, Samara, 443001, Russia;

² Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

Based on the Richards-Wolf formulas, analytical expressions are obtained for the spectrum of optical vortices at the focus of a vortex beam with elliptical polarization. The spectrum is found to be independent of the phase of the focused field. It is also revealed that the polarization of the field affects only the spectrum asymmetry but not the distribution between the main and secondary components. On the contrary, the spectrum asymmetry does not depend on the radial amplitude of the focused field, but the energy fractions that go to the main and secondary components do. Quadratic inequalities are obtained that allow one to assess the possibility of obtaining a specific spectrum of optical vortices by constraining the initial field with an annular diaphragm.

Keywords: optical vortex, sharp focusing, elliptical polarization, orbital angular momentum spectrum, Richards-Wolf formulae, annular aperture.

Citation: Kovalev AA. Spectrum of optical vortices at the focus of a vortex beam. *Computer Optics* 2026; 50(3): 1709. doi:10.18287/COJ1709.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Science Foundation under grant 26-12-00117 (Theory). Part of this work was performed within the government project of NRC "Kurchatov Institute" (Numerical simulation).

Author's information

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a Leading Researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC "Kurchatov Institute", holding a part-time position of Professor at Technical Cybernetics department at Samara National Research University. He is co-author of more than 200 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru ORCID: 0000-0002-0488-4267

Received April 08, 2025. The final version – May 23, 2025.
