

Дизайн гармонических ДОЭ для формирования заданных распределений интенсивности

Л.Л. Досколович^{1,2}, Е.В. Бызов^{1,2}, Н.В. Головастиков^{1,2}, Е.А. Безус^{1,2}, Д.А. Быков^{1,2}, Р.В. Скиданов^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Предложен метод расчета дифракционных оптических элементов с гладкой фазовой функцией, обобщающих гармонические дифракционные линзы и предназначенных для формирования заданного распределения интенсивности при нескольких гармонических длинах волн. В рамках метода фазовая функция задается в виде разложения по некоторой системе гладких и дифференцируемых функций. Коэффициенты разложения рассматриваются как параметры оптимизации и рассчитываются градиентным методом из условия минимизации функции ошибки, представляющей отличие формируемого и заданного распределений интенсивности. Представлены примеры расчета гармонических дифракционных оптических элементов с фазовой функцией в виде суммы B -сплайнов, и показано, что для хорошей работоспособности указанных элементов необходимо в функции ошибки явно учитывать вид формируемых распределений интенсивности не только на центральной длине волны, но и на других гармонических длинах волн.

Ключевые слова: дифракционный оптический элемент, скалярная теория дифракции, фазовая функция, обратная задача, требуемое распределение интенсивности, градиентный метод.

Цитирование: Досколович, Л.Л. Дизайн гармонических ДОЭ для формирования заданных распределений интенсивности / Л.Л. Досколович, Е.В. Бызов, Н.В. Головастиков, Е.А. Безус, Д.А. Быков, Р.В. Скиданов // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 3. – 1757. – doi: 10.18287/COJ1757.

Citation: Doskolovich LL, Byzov EV, Golovastikov NV, Bezus EA, Bykov DA, Skidanov RV. Harmonic DOE design for generating required intensity distributions. Computer Optics 2026; 50(3): 1757. doi: 10.18287/COJ1757.

Введение

Дифракционные оптические элементы (ДОЭ) широко используются при решении различных задач по преобразованию и фокусировке лазерного излучения [1–4]. Как правило, ДОЭ выполняются в виде фазового дифракционного микрорельефа на некоторой подложке, осуществляющего фазовую модуляцию падающего светового пучка. Задача расчета ДОЭ относится к классу обратных задач скалярной теории дифракции и состоит в расчете такой функции фазовой модуляции (далее просто фазовой функции), которая обеспечивает формирование светового поля с заданными характеристиками (например, с заданным распределением интенсивности в заданной плоскости). Для расчета фазовой функции ДОЭ были предложены различные итерационные градиентные алгоритмы, включающие «классический» алгоритм Гершберга–Сакстона, алгоритм уменьшения ошибки и их модификации [5–12]. При этом функция высоты дифракционного микрорельефа ДОЭ однозначно определяется фазовой функцией, а в приближении тонкого оптического элемента – прямо пропорциональна фазовой функции.

В большинстве случаев ДОЭ рассчитываются для работы с излучением одной заданной длины волны λ_0 . Это ограничивает функциональные возможности ДОЭ и сужает область их применения. Поэтому большой интерес представляет разработка методов дизайна ДОЭ, позволяющих работать с излучением различных длин волн. Хорошо известным оптическим элементом для работы с излучением нескольких различных длин волн является т.н. гармоническая дифракционная линза (ГДЛ) [13–21]. Отметим, что «обычные» дифракционные линзы (ДЛ), осуществляющие на расчетной длине волны модуляцию светового поля по модулю 2π , имеют большие хроматические aberrации, которые проявляются в смещении фокуса вдоль оптической оси, в снижении интенсивности и деградации формы фокального пятна. В отличие от обычных ДЛ, ГДЛ имеют большую высоту дифракционного микрорельефа и осуществляют фазовую модуляцию светового поля по модулю $2\pi M$, где $M > 1$. ГДЛ можно рассматривать как своеобразный гибрид обычной дифракционной линзы ($M=1$) и тонкой рефракционной линзы, которая получается из ГДЛ при $M \gg 1$. ГДЛ обладают меньшими хроматическими aberrациями и позволяют в различных порядках дифракции сфокусировать в одном фиксированном фокусе излучение несколько различных (т.н. гармонических) длин волн. Отметим, что данные длины волн не произвольны, а задаются аналитической формулой, зависящей от M и λ_0 [13–20].

В настоящей работе рассматривается расчет гармонических ДОО, обобщающих ГДЛ и предназначенных для формирования заданного распределения интенсивности на гармонических длинах волн. Отметим, что при расчете фазы ДОО стандартным итерационным или градиентным алгоритмом получаемая фазовая функция, как правило, имеет крайне нерегулярный вид и приведена к интервалу $[0, 2\pi)$. При этом даже просто формальный переход к фазовой функции по модулю $2\pi M$, $M > 1$ требует «развертки» такой фазы, что является нетривиальной задачей. Чтобы избежать данной проблемы, в настоящей статье для расчета гармонических ДОО фазовая функция задается в виде разложения по некоторой системе гладких и дифференцируемых функций. Коэффициенты в этом разложении рассматриваются как параметры оптимизации и рассчитываются градиентным методом из условия минимизации функции ошибки, представляющей отличие формируемого и заданного распределений интенсивности. При этом для производных функции ошибки получены явные выражения. Получаемая при таком расчете фазовая функция является гладкой, и на основе её приведения к интервалу $[0, 2\pi M)$ при заданном M можно получить гармонический ДОО. Представленные в работе результаты численного моделирования показывают, что гармонические ДОО, рассчитанные для длины волны λ_0 , в общем сохраняют свою работоспособность на гармонических длинах волн, хотя и при заметном снижении качества формируемого распределения интенсивности. При этом установлено, что для хорошей работоспособности ДОО на нескольких заданных гармонических длинах функция ошибки должна в явном виде учитывать вид формируемых распределений интенсивности на этих длинах волн и, соответственно, оптимизироваться одновременно на нескольких длинах волн.

1. Градиентный метод расчета ДОО с фазовой функцией в виде отрезка функционального ряда

Задачу расчета ДОО, предназначенного для формирования заданного распределения интенсивности, будем рассматривать как задачу расчета фазовой функции светового поля, формируемого ДОО. Пусть при длине волны λ_0 ДОО формирует в прилегающей к нему плоскости $z=0$ световое поле с комплексной амплитудой $w_0(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u})\exp(i\varphi(\mathbf{u}))$, $\mathbf{u} \in G$, где функции $A(\mathbf{u})$ и $\varphi(\mathbf{u})$ представляют амплитуду и фазу сформированного поля. Здесь $\mathbf{u} = (u, v)$ – декартовы координаты, а область G задает апертуру ДОО. Задача состоит в расчете фазовой функции $\varphi(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in G$, обеспечивающей формирование в плоскости $z=f$ светового поля с заданным распределением интенсивности $I(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$, где $\mathbf{x} = (x, y)$ – декартовы координаты в данной плоскости.

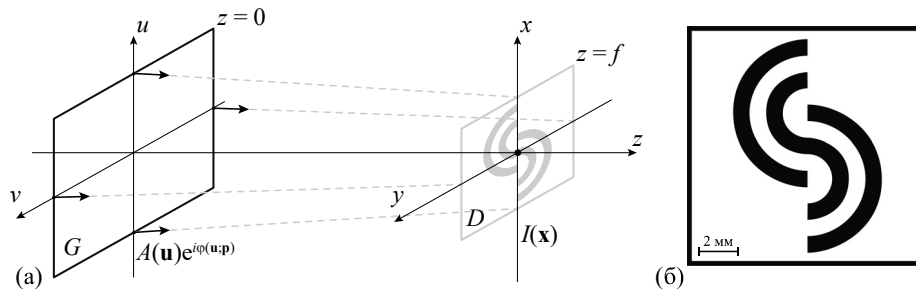


Рис. 1. (а) Геометрия задачи расчета ДОО. (б) Требуемое распределение интенсивности

Будем считать, что фазовая функция представлена в виде конечного разложения по некоторой системе гладких и дифференцируемых функций

$$\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p}) = \sum_{m,n} p_{m,n} B_{m,n}(\mathbf{u}), \quad (1)$$

где $m = 0, \dots, M$, $n = 0, \dots, N$, а $\mathbf{p}$ – вектор, составленный из коэффициентов $p_{m,n}$. В качестве функций $B_{m,n}(\mathbf{u})$ можно, например, использовать полиномиальные функции, сплайны, тригонометрические функции и т.д. Коэффициенты разложения $p_{m,n}$ будем рассматривать как параметры оптимизации, и, соответственно, задача расчета фазовой функции сводится к расчету данных параметров. В приближении Френеля–Кирхгофа скалярной теории дифракции комплексная амплитуда поля в выходной плоскости $z=f$ описывается следующим интегралом свертки:

$$w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \iint_G A(\mathbf{u}) e^{i\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p})} R(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d^2\mathbf{u}, \quad (2)$$

где

$$R(\mathbf{u}) = \frac{k_0 e^{ik_0 f}}{2\pi i f} \exp\left(\frac{ik_0}{2f} \mathbf{u}^2\right), \quad (3)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число. Отметим, что вектор параметров фазовой функции $\mathbf{p}$ внесен в выражение для комплексной амплитуды формируемого поля $w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p})$, чтобы явно подчеркнуть зависимость формируемого поля от данных параметров. Пусть ошибка формирования заданного распределения интенсивности представляется следующей квадратичной функцией ошибки

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \iint [I_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) - I(\mathbf{x})]^2 d^2 \mathbf{x}, \quad (4)$$

где $I_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = |w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p})|^2$ – формируемое распределение интенсивности при некотором векторе параметров $\mathbf{p}$. Далее задачу расчета фазовой функции (1) будем рассматривать как задачу минимизации функции ошибки

$$\varepsilon(\mathbf{p}) \rightarrow \min_{\mathbf{p}}. \quad (5)$$

Для решения задачи (5) будем использовать градиентный метод. Для этого вычислим производные функции ошибки

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_{m,n}} &= \iint \frac{\partial}{\partial p_{m,n}} [I_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) - I(\mathbf{x})]^2 d^2 \mathbf{x} = \iint 2[I_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) - I(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial p_{m,n}} [w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \cdot w_{\text{rez}}^*(\mathbf{x}; \mathbf{p})] d^2 \mathbf{x} = \\ &= 4\text{Re} \left(\iint [I_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) - I(\mathbf{x})] \left[\frac{\partial w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p})}{\partial p_{m,n}} w_{\text{rez}}^*(\mathbf{x}; \mathbf{p}) \right] d^2 \mathbf{x} \right) 2\text{Re} \left(\iint \frac{\partial w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p})}{\partial p_{m,n}} U^*(\mathbf{x}; \mathbf{p}) d^2 \mathbf{x} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $U(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = 2[I_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) - I(\mathbf{x})]w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p})$.

Из (1)–(3) легко видеть, что

$$\frac{\partial w_{\text{rez}}(\mathbf{x}; \mathbf{p})}{\partial p_{m,n}} = \iint_G A(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial p_{m,n}} [e^{i\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p})}] R(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d^2 \mathbf{u} = \iint_G A(\mathbf{u}) e^{i\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p})} i B_{m,n}(\mathbf{u}) R(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d^2 \mathbf{u}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и меняя порядок интегрирования, получим производные функции ошибки в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_{m,n}} &= 2\text{Re} \left(\iint A(\mathbf{u}) e^{i\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p})} i B_{m,n}(\mathbf{u}) Q^*(\mathbf{u}; \mathbf{p}) d^2 \mathbf{u} \right) = \\ &= \iint A(\mathbf{u}) B_{m,n}(\mathbf{u}) |Q(\mathbf{u}; \mathbf{p})| \sin(\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p}) - \arg(Q(\mathbf{u}; \mathbf{p}))) d^2 \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$Q(\mathbf{u}; \mathbf{p}) = \iint U(\mathbf{x}; \mathbf{p}) R^*(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d^2 \mathbf{x}, \quad (9)$$

а функция $U(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ определена непосредственно после формулы (6).

Таким образом, расчет производных функции ошибки осуществляется по формулам (8), (9). Отметим, что вместо градиентного метода можно использовать его улучшенные варианты, в частности, метод адаптивной оценки моментов (англ. Adaptive Moment Estimation, ADAM) [21].

2. Гармонические ДОЭ

При использовании для расчета ДОЭ «обычного» градиентного или итерационного алгоритма получаемая фазовая функция имеет нерегулярный вид и приведена к интервалу $[0, 2\pi)$. При параметрическом представлении фазы (1), например, в виде полиномов или сплайнов, градиентный метод позволит рассчитать непрерывную фазовую функцию, не приведённую к интервалу $[0, 2\pi)$. Из такой фазовой функции можно получить «гармонический» ДОЭ, описываемый следующей функцией высоты дифракционного микрорельефа

$$h(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_0}{2\pi(n-1)} \text{mod}_{2\pi M} [\varphi(\mathbf{u})], \quad (10)$$

где n – показатель преломления материала ДОЭ, а M – натуральное число. При $M > 1$ ДОЭ (10) можно рассматривать как обобщение гармонической дифракционной линзы (ГДЛ), которая получается из (10) при $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi_{\text{lens}}(\mathbf{u})$, где $\varphi_{\text{lens}}(\mathbf{u}) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\mathbf{u}^2}{2f}$ – фазовая функция линзы. У обычной дифракционной линзы ($M = 1$) при изменении длины волны падающего излучения изменяется положение фокуса и формируются дополнительные «паразитные» порядки дифракции [17–19]. В то же время ГДЛ ($M > 1$), если пренебречь дисперсией материала, при т.н. гармонических длинах волн

$$\lambda_m = \lambda_0 M/m, m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

направляет всю энергию падающего пучка в один и тот же фокус заданного положения. По сравнению с обычными дифракционными линзами, имеющими максимальную высоту микрорельефа $\lambda_0/(n-1)$, максимальная высота микрорельефа ГДЛ в M раз больше, что позволяет «сохранять» неизменными углы дифракции на зонах микрорельефа при гармонических длинах волн (11) в различных дифракционных порядках [17–19].

Рассмотренный выше градиентный метод расчета ДОЭ позволяет получить фазовую функцию, которая обеспечивает формирование заданного распределения интенсивности только на расчетной длине волны λ_0 . При $\lambda \neq \lambda_0$ формируемый ДОЭ набег фаз имеет вид

$$\varphi_\lambda(\mathbf{u}) = \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) h(\mathbf{u}) = \frac{\lambda_0}{\lambda} \text{mod}_{2\pi M} [\varphi(\mathbf{u})] = \frac{\lambda_0}{\lambda} M \text{mod}_{2\pi} \left[\frac{\varphi(\mathbf{u})}{M} \right]. \quad (12)$$

Для описания функционирования ДОО при $\lambda \neq \lambda_0$ представим функцию комплексного пропускания ДОО $T_\lambda(\mathbf{u}) = \exp(i\varphi_\lambda(\mathbf{u})) = \exp\left(i\frac{\lambda_0}{\lambda} M \bmod_{2\pi} \left[\frac{\varphi(\mathbf{u})}{M}\right]\right)$ в виде разложения в ряд Фурье по переменной $\xi = \bmod_{2\pi}[\varphi(\mathbf{u})/M] \in [0, 2\pi]$ [8, 22]:

$$T_\lambda(\mathbf{u}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l(\lambda) \exp\left(il \frac{\varphi(\mathbf{u})}{M}\right), \quad (13)$$

где

$$c_l(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{i\frac{\lambda_0}{\lambda} M\xi - il\xi\right\} d\xi - \quad (14)$$

коэффициенты Фурье функции $\exp\left(i\frac{\lambda_0}{\lambda} M\xi\right)$, $\xi \in [0, 2\pi]$. Таким образом, в общем случае при $\lambda \neq \lambda_0$ гармонический ДОО формирует бесконечный набор пучков (дифракционных порядков) с фазовыми функциями $\varphi_{\lambda,l}(\mathbf{u}) = l \frac{\varphi(\mathbf{u})}{M}$. В то же время при гармонической длине волны $\lambda = \lambda_m = \lambda_0 M/m$ $c_m(\lambda_m) = 1$ и в разложении (0,13) остается единственный ненулевой член с фазовой функцией $\varphi_{\lambda_m,m}(\mathbf{u}) = m \frac{\varphi(\mathbf{u})}{M}$. Для понимания вида формируемого распределения интенсивности при фазовой функции $\varphi_{\lambda_m,m}(\mathbf{u})$ представим исходную фазовую функцию $\varphi(\mathbf{u})$, рассчитанную для $\lambda = \lambda_0$, в виде $\varphi(\mathbf{u}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Psi(\mathbf{u})$, где функция $\Psi(\mathbf{u})$ в приближении геометрической оптики соответствует эйконалу и описывает изменение оптической длины пути светового пучка при прохождении через ДОО. В этом случае фаза пучка $\varphi_{\lambda_m,m}(\mathbf{u})$, формируемого ДОО при гармонической длине волны, может быть записана в виде $\varphi_{\lambda_m,m}(\mathbf{u}) = \frac{2\pi}{\lambda_m} \Psi(\mathbf{u})$. Таким образом, по крайней мере в приближении геометрической оптики, гармонический ДОО при гармонических длинах волн $\lambda = \lambda_m = \lambda_0 M/m$ обеспечит формирование такого же распределения интенсивности, как и при расчетной длине волны λ_0 . При гладкой фазовой функции (1), определенной, например, в виде суперпозиции *B*-сплайнов, дифракционные эффекты будут относительно небольшими и поэтому можно ожидать, что гармонический ДОО, рассчитанный при длине волны $\lambda_0 = \lambda_m$, будет сохранять свои рабочие характеристики и при $\lambda = \lambda_m$, $m \neq M$.

В заключение настоящего параграфа напомним, что использованное выражение для гармонических длин волн (11) не учитывает дисперсию показателя преломления материала элемента. Несложно показать, что её учёт приведёт к следующему нелинейному уравнению для гармонических длин волн:

$$\lambda_m = \lambda_0 \frac{M \frac{n(\lambda_m)-1}{m}}{\frac{n(\lambda_0)-1}{m}}, \quad (15)$$

где $n(\lambda)$ – значение показателя преломления материала ДОО при длине волны λ . Используя для показателя преломления модель Коши $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$, можно получить для гармонических длин волн кубическое уравнение, решение которого может быть записано в аналитическом виде с использованием формул Кардано. Тем не менее далее для простоты в примерах расчета мы будем считать показатель преломления материала ДОО постоянным и использовать для гармонических длин волн «обычное» выражение (11).

3. Примеры расчета

В данном параграфе мы рассмотрим примеры расчета гармонических ДОО для формирования при длине волны $\lambda_0 = 532$ нм в плоскости $z = f = 140$ мм светового поля с распределением интенсивности в виде эмблемы Самарского университета (рис. 1б). Фазовая функция ДОО была задана в квадратной области с размером стороны $a = 12$ мм в виде следующей двумерной суперпозиции *B*-сплайнов:

$$\varphi(\mathbf{u}; \mathbf{p}) = \sum_{m,n=0}^{N+q-2} p_{m,n} B_{m,q}(u) B_{n,q}(v), \quad (16)$$

где $B_{m,q}(t)$ – *B*-сплайны порядка q [23], заданные на эквидистантной сетке $t_i = -a/2 + ia/(N-1)$, $i = 0, \dots, N-1$ из N узлов. При расчете использовались сплайны 3-го порядка. Расчет ДОО осуществлялся рассмотренным в параграфе 1 градиентным методом при освещающем пучке с постоянной интенсивностью. Расчет осуществлялся в несколько этапов с последовательным увеличением числа узлов от $N=10$ на первом шаге (в этом случае число оптимизируемых коэффициентов $p_{m,n}$ равно 144) до $N=320$ на последнем 5-м шаге (число оптимизируемых коэффициентов – $322^2 = 103684$). Такой подход (с постепенным увеличением числа параметров) улучшает сходимость метода и позволяет понять размер сплайновых сеток, требуемый для формирования заданного распределения интенсивности с заданным качеством. Для расчета формируемых распределений интенсивности и световых полей, входящих в выражение для градиента (8), (9), использовался т.н. sinc-метод численного расчета интеграла Френеля–Кирхгофа [24] при расчетных сетках 2400×2400 с шагом 5 мкм. На рис. 2 в качестве примера показана «эволюция» фазовой функции, рассчитанной градиентным методом, и формируемого распределения интенсивности в зависимости от числа узлов N в сплайновых сетках. В верхней части рис. 2б, г, е, з, представляющих распределения интенсивности, формируемые ДОО, рассчитанными при

различном числе узлов N , указаны значения энергетической эффективности E и нормированного среднеквадратичного отклонения (НСКО) δ формируемого распределения интенсивности от требуемого распределения на рис. 1б. Под энергетической эффективностью E мы понимаем долю энергии освещающего пучка (в процентах), попавшую в область требуемого распределения. Можно видеть, что при $N=320$ формируется распределение интенсивности высокого качества ($\delta = 11,22\%$, $E = 89,78\%$). Хорошо выглядит и распределение интенсивности, формируемое при $N = 160$. В этом случае энергетическая эффективность близка к 88 %, а НСКО составляет 14 %. Таким образом, представленные примеры демонстрируют работоспособность градиентного метода и возможность расчета ДОЭ с гладкой фазовой функцией в виде сплайнов для формирования сложных распределений интенсивности.

Отметим, что фазовые функции ДОЭ на рис. 2 показаны по модулю 10π и таким образом соответствуют гармоническим ДОЭ при $M=5$. Исследуем работу гармонических ДОЭ при гармонических длинах волн $\lambda_m \neq \lambda_0$ на примере ДОЭ, рассчитанного при $N = 160$ (рис. 2д, е). Оценку рабочих характеристик ДОЭ выполним для длин волн $\lambda_6 = 5\lambda_0/6 \approx 443$ нм и $\lambda_4 = 5\lambda_0/4 = 665$ нм (данные длины волн являются наиболее близкими к расчетной длине волны $\lambda_0 = \lambda_5 = 532$ нм и представляют наибольший интерес).

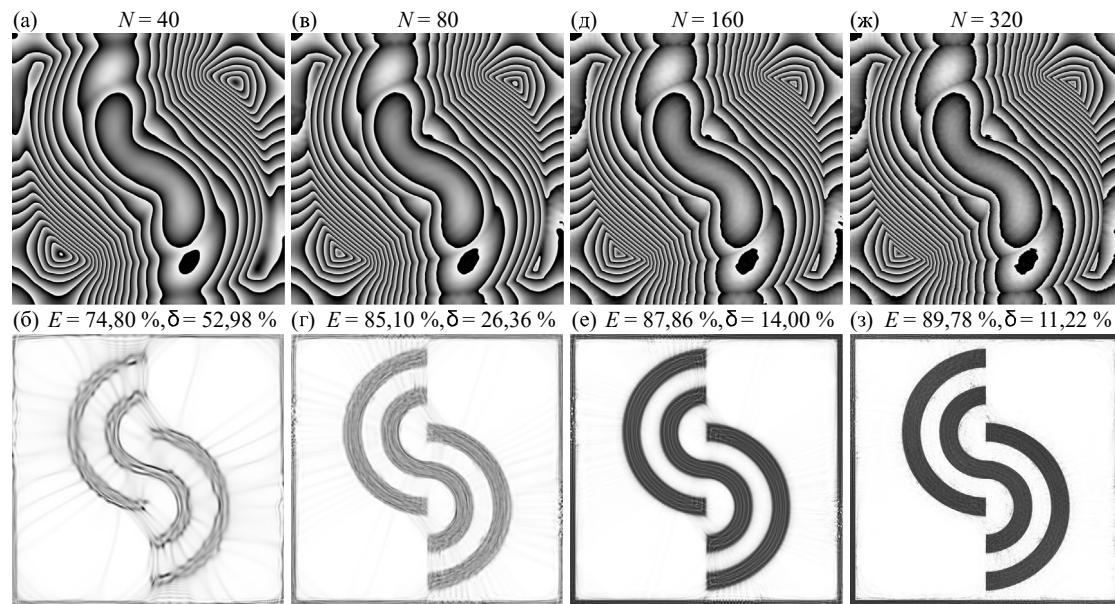


Рис. 2. Рассчитанные фазовые функции по модулю $2\pi M$, $M = 5$ и формируемые распределения интенсивности при числе узлов в сплайновых сетках $N = 40$ а), б), $N = 80$ в), г), $N = 160$ д), е) и $N = 320$ ж), з)

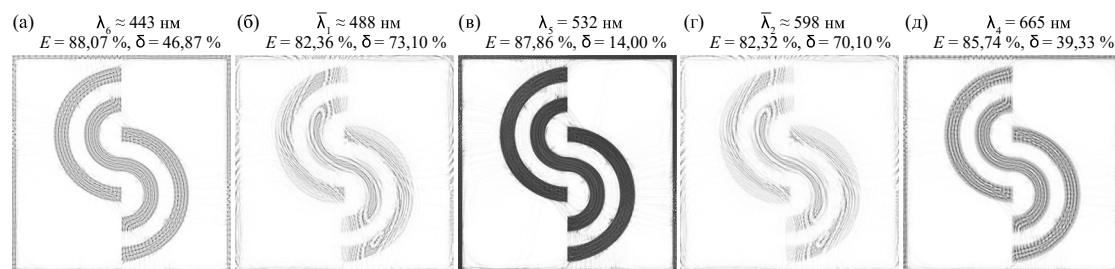


Рис. 3. Распределения интенсивности, формируемые ДОЭ на рис. 2д при гармонических длинах волн $\lambda_6 \approx 443$ нм (а), $\lambda_5 = \lambda_0 = 532$ нм (в) и $\lambda_4 = 5\lambda_0/4 = 665$ нм (д), а также при промежуточных длинах волн $\bar{\lambda}_1 \approx 488$ нм (б) и $\bar{\lambda}_2 \approx 598$ нм (г)

На рис. 3 показаны формируемые ДОЭ распределения интенсивности при указанных гармонических длинах волн, а также при длинах волн $\bar{\lambda}_1 = (\lambda_6 + \lambda_0)/2 \approx 488$ нм и $\bar{\lambda}_2 = (\lambda_0 + \lambda_4)/2 \approx 598$ нм, расположенных посередине между гармоническими и расчетной длинами волн. Для удобства сравнения распределений на рис. 3в также показано распределение, формируемое на расчетной длине волны $\lambda_0 = \lambda_5$ и совпадающее с распределением на рис. 2е. Можно видеть, что при гармонических длинах волн ДОЭ по-прежнему формирует заданное распределение интенсивности с высокой энергетической эффективностью (более 85 %), но при значительно более высоком НСКО, составляющем почти 47 % при $\lambda_6 \approx 443$ нм и около 39 % при $\lambda_4 = 665$ нм. Важно отметить, что данные распределения оказываются намного лучше, чем распределения, формируемые на промежуточных (не гармонических) длинах волн $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$. Несмотря на то, что эти длины волн расположены ближе к расчетной длине волны $\lambda_0 = 532$ нм, формируемые при них распределения интенсивности

характеризуются высокими значениями НСКО δ , превышающими 70 %. Такие высокие значения НСКО обусловлены тем, что на промежуточных длинах волн формируются дополнительные (т.н. паразитные) порядки дифракции (см. формулы (13), (14)), которые в выходной плоскости накладываются на полезное распределение и интерferируют с ним. Таким образом, можно сказать, что рассчитанный ДОЭ сохраняет свою работоспособность при гармонических длинах волн, хотя и при более высоких значениях НСКО. Увеличение НСКО обусловлено тем, что факт сохранения формируемого распределения интенсивности для гармонических длин волн имеет место только в приближении геометрической оптики. При этом фазовая функция исследуемого ДОЭ (рис. 2в), несмотря на гладкость, была рассчитана в приближении скалярной теории дифракции. В этой связи также интересно отметить, что ДОЭ, рассчитанный при $N=320$ (рис. 2ж, з), на гармонических длинах волн λ_6 и λ_4 имеет несколько худшие рабочие характеристики по сравнению с рассмотренным ДОЭ, рассчитанным при $N=160$ (рис. 2д, е). В частности, значения НСКО формируемых распределений интенсивности при $N=320$ составляют около 55 % при $\lambda_6 \approx 443$ нм и около 48 % при $\lambda_4 = 665$ нм (для краткости изложения данные распределения не показаны в статье). Это обусловлено тем, что фазовая функция ДОЭ при $N=320$ (рис. 2ж) является более сложной и лучше учитывает эффекты дифракции на расчетной длине волны (сравни распределения на рис. 2е и рис. 2з). Вследствие этого фазовая функция ДОЭ, рассчитанного при $N=320$, оказывается «более далекой» от геометрикооптического приближения по сравнению с фазовой функцией, рассчитанной при $N=160$.

Приведенные результаты работы гармонического ДОЭ (рис. 3) показывают необходимость улучшения формируемых распределений при гармонических длинах волн $\lambda_m \neq \lambda_0$. Это может быть достигнуто за счет изменения функции ошибки, которая должна в явном виде учитывать вид формируемых распределений интенсивности на требуемых гармонических длинах волн. Обозначим $I_{\text{rez},\lambda_j}(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ распределение интенсивности, формируемое ДОЭ при гармонической длине волны. Ошибку формирования заданного распределения интенсивности при $\lambda = \lambda_j$ представим, как и ранее, квадратичной функцией ошибки

$$\varepsilon_{\lambda_j}(\mathbf{p}) = \iint [I_{\text{rez},\lambda_j}(\mathbf{x}; \mathbf{p}) - I(\mathbf{x})]^2 d^2\mathbf{x}. \quad (17)$$

Для учета вида формируемых распределений интенсивности на нескольких заданных гармонических длинах волн будем использовать следующую функцию ошибки:

$$\varepsilon_{\text{harm}}(\mathbf{p}) = \sum_{j \in J} \varepsilon_{\lambda_j}(\mathbf{p}), \quad (18)$$

где J – заданное множество индексов рассматриваемых гармонических длин волн. Отметим, что производные функции ошибки $\varepsilon_{\text{harm}}(\mathbf{p})$ по параметрам $p_{m,n}$ (по коэффициентам сплайнов в (16)) соответствуют сумме производных слагаемых

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{harm}}(\mathbf{p})}{\partial p_{m,n}} = \sum_{j \in J} \frac{\partial \varepsilon_{\lambda_j}(\mathbf{p})}{\partial p_{m,n}}, \quad (19)$$

где производные слагаемых $\partial \varepsilon_{\lambda_m} / \partial p_{m,n}$ вычисляются по ранее полученным формулам (8), (9). На основе минимизации функции ошибки (18) при $J = \{4,5,6\}$ градиентным методом была рассчитана фазовая функция гармонического ДОЭ при $N=160$, обеспечивающая формирование заданного распределения интенсивности (рис. 1б) при трех гармонических длинах волн $\lambda_6 = 5\lambda_0/6 \approx 443$ нм, $\lambda_0 = \lambda_5 = 532$ нм и $\lambda_4 = 5\lambda_0/4 = 665$ нм. При этом расчет градиента осуществлялся по формулам (18), (8), (9), а в качестве начального приближения использовалась фазовая функция ранее рассчитанного гармонического ДОЭ (см. рис. 2д и рис. 3). На рис. 4 показана фазовая функция ДОЭ, рассчитанного при функции ошибки (18), а на рис. 5 – формируемые им распределения интенсивности на различных длинах волн. Можно видеть, что полученная фазовая функция (рис. 4) осталась похожей на начальное приближение (рис. 2д), но стала более сглаженной. При этом распределения интенсивности, формируемые на гармонических длинах волн λ_6 и λ_4 (рис. 5а, д), стали значительно лучше распределений на рис. 3а, д, формируемых «обычным» гармоническим ДОЭ, рассчитанным на основе минимизации функции ошибки (4). В частности, уменьшение значений НСКО δ для распределений интенсивности на рис. 5а, д, по сравнению с распределениями на рис. 3а, д, составляет около 2 раз. Для центральной длины волны $\lambda_0 = \lambda_5 = 532$ нм формируемое распределение интенсивности (рис. 5в) немного ухудшилось, но увеличение НСКО, по сравнению с распределением на рис. 3в, составляет менее 1,5 %. Для промежуточных (не гармонических) длин волн $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ рассчитанный ДОЭ (рис. 4) по-прежнему можно назвать неработоспособным, поскольку формируемые распределения интенсивности сильно отличаются от требуемого распределения (значения НСКО δ по сравнению с рис. 3 для данных длин волн даже несколько ухудшились и составляют около 80 %). Тем не менее представленный пример показывает, что использование в расчете функции ошибки функции (0,18), явно учитывающей вид формируемых распределений при длинах волн $\lambda_m \neq \lambda_0$, позволяет рассчитывать ДОЭ, формирующие на заданных гармонических длинах волн сложные распределения интенсивности с достаточно хорошим качеством (при энергетической эффективности около 85 % и среднеквадратичной ошибке в 15–20 %).

В заключение отметим, что авторы пробовали ввести в функцию ошибки (18) слагаемые вида (17), отвечающие за формирование заданного распределения интенсивности также при негармонических длинах волн $\bar{\lambda}_1 \approx 488$ нм и $\bar{\lambda}_2 \approx 598$ нм. В этом случае оптимизация функции ошибки не привела к заметному улучшению распределений интенсивности, формируемых при негармонических длинах волн (значения НСКО при $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ снизились на 7–8 %, но по-прежнему остались более 70 %). Таким образом, дизайн ДОО, работающих при негармонических длинах волн, требует разработки более сложных подходов, основанных, например, на использовании каскадных структур [12].

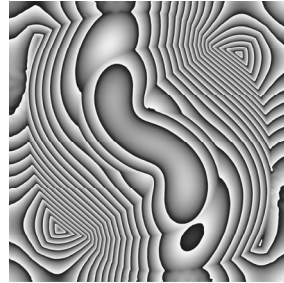


Рис. 4. Фазовая функция ДОО по модулю 10π ($M = 5$), рассчитанная при функции ошибки (18)

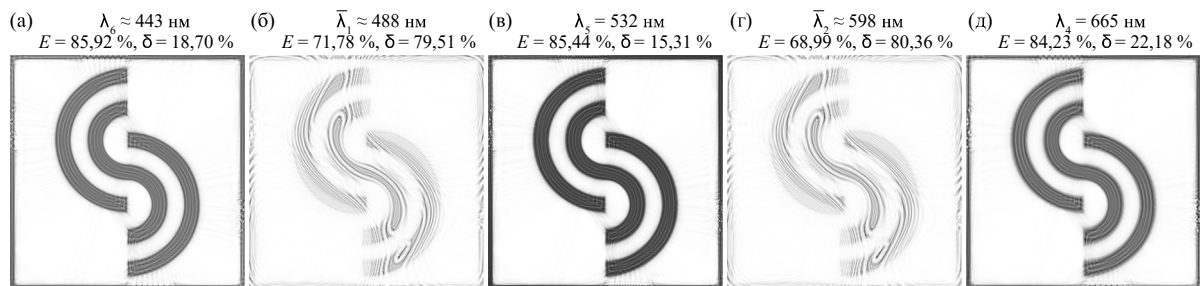


Рис. 5. Распределения интенсивности, формируемые ДОО на рис. 5 при гармонических длинах волн $\lambda_0 \approx 443$ нм (а), $\lambda_5 = \lambda_0 = 532$ нм (в) и $\lambda_4 = 5\lambda_0/4 = 665$ нм (д), а также при промежуточных длинах волн $\bar{\lambda}_1 \approx 488$ нм (б) и $\bar{\lambda}_2 \approx 598$ нм (г)

Заключение

Разработан метод расчета ДОО, предназначенных для формирования заданных распределений интенсивности и имеющих гладкую фазовую функцию, заданную в виде разложения по некоторой системе гладких и дифференцируемых функций (в виде отрезка функционального ряда). В рамках метода коэффициенты разложения рассматриваются как параметры оптимизации и рассчитываются градиентным методом из условия минимизации функции ошибки, представляющей отличие формируемого и заданного распределений интенсивности. При этом для производных функции ошибки получены явные аналитические выражения. Рассмотрено применение предложенного метода к задаче расчета гармонических ДОО, обобщающих гармонические дифракционные линзы и предназначенные для формирования заданного распределения интенсивности при нескольких гармонических длинах волн. Представлены примеры расчета гармонических ДОО с гладкой фазовой функцией в виде суммы B -сплайнов, формирующие распределение интенсивности в виде эмблемы Самарского университета. Показано, что такие ДОО, рассчитанные для «центральной» длины волны λ_0 , сохраняют свою работоспособность при ближайших гармонических длинах волн $\lambda_m \neq \lambda_0$. В то же время распределения интенсивности, формируемые при длинах волн $\lambda_m \neq \lambda_0$, имеют худшее качество (при $\lambda_m \neq \lambda_0$ среднеквадратичное отклонение формируемого распределения интенсивности от заданного распределения увеличивается в несколько раз по сравнению со случаем расчетной длины волны λ_0). Показано, что для расчета гармонических ДОО, имеющих хорошие рабочие характеристики не только на центральной длине волны λ_0 , но и при $\lambda_m \neq \lambda_0$, необходимо в оптимизируемую функцию ошибки включить дополнительные слагаемые, описывающие ошибку формируемых распределений интенсивности на заданных гармонических длинах волн.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-19-00080) в части разработки градиентного метода расчета гармонических ДОО, расчета ДОО и исследования их рабочих характеристик, государственного задания НИЦ «Курчатовский институт» в части разработки программных средств для моделирования работы ДОО в рамках скалярной теории дифракции и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание Самарскому университету FSSS-2024-0016) в части теоретического описания работы ДОО при отклонении длины волны падающего излучения от расчетного значения.

References

- [1] Zhang J, Pégard N, Zhong J, Adesnik H, Waller L. 3D computer-generated holography by non-convex optimization. *Optica* 2017; 4(10): 1306-1313. doi:10.1364/OPTICA.4.001306.
- [2] Wang H, Piestun R. Dynamic 2D implementation of 3D diffractive optics. *Optica* 2018; 5(10): 1220-1228. doi:10.1364/OPTICA.5.001220.
- [3] Schmidt S, Thiele S, Toulouse A, Bösel C, Tiess T, Herkommer A, Gross H, Giessen H. Tailored micro-optical freeform holograms for integrated complex beam shaping. *Optica* 2020; 7(10): 1279-1286. doi:10.1364/OPTICA.395177.
- [4] Zhang Q, He Z, Xie Z, Tan Q, Sheng Y, Jin G, Cao L, Yuan X. Diffractive optical elements 75 years on: from micro-optics to metasurfaces. *Photonics Insights* 2023; 2(4): R09. doi:10.3788/PI.2023.R09.
- [5] Gerchberg RW, Saxton WO. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik* 1972; 35: 237-246.
- [6] Fienup JR. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Appl Opt* 1982; 21(15): 2758-2769. doi:10.1364/AO.21.002758.
- [7] Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Iterative calculation of diffractive optical elements focusing into a three dimensional domain and the surface of the body of rotation. *J Mod Opt* 1996; 43(7): 1509-1524.
- [8] Soifer VA, Kotlyar VV, Daskolovich LL. Iterative methods for diffractive optical elements computation. Taylor & Francis; 1997. ISBN: 978-0-7484-0634-4.
- [9] Latychevskaya T. Iterative phase retrieval in coherent diffractive imaging: practical issues. *Appl Opt* 2018; 57(22): 7187-7197. doi:10.1364/AO.57.007187.
- [10] Ripoll O, Kettunen V, Herzig HP. Review of iterative Fourier transform algorithms for beam shaping applications. *Opt Eng* 2004; 43(11): 2549-2556. doi:10.1117/1.1804543.
- [11] Daskolovich LL, Mingazov AA, Byzov EV, Skidanov RV, Ganchevskaya SV, Bykov DA, Bezus EA, Podlipnov VV, Porfirev AP, Kazanskiy NL. Hybrid design of diffractive optical elements for optical beam shaping. *Opt Express* 2021; 29(20): 31875-31890. doi:10.1364/OE.439641.
- [12] Motz GA, Soshnikov DV, Daskolovich LL, Byzov EV, Bezus EA, Bykov DA. Design of cascaded diffractive optical elements generating different intensity distributions at several operating wavelengths. *Optik* 2025; 320: 172140. doi:10.1016/j.ijleo.2024.172140.
- [13] Sweeney DW, Sommargren GE. Harmonic diffractive lenses. *Appl Opt* 1995; 34(14): 2469-2475. doi:10.1364/AO.34.002469.
- [14] Rossi M, Kunz RE, Herzig HP. Refractive and diffractive properties of planar micro-optical elements. *Appl Opt* 1995; 34(26): 5996-6007. doi:10.1364/AO.34.005996.
- [15] Sales TRM, Morris GM. Diffractive-refractive behavior of kinoform lenses. *Appl Opt* 1997; 36(1): 253-257. doi:10.1364/AO.36.000253.
- [16] Faklis D, Morris GM. Spectral properties of multiorder diffractive lenses. *Appl Opt* 1995; 34(14): 2462-2468. doi:10.1364/AO.34.002462.
- [17] Daskolovich LL, Skidanov RV, Bezus EA, Ganchevskaya SV, Bykov DA, Kazanskiy NL. Design of diffractive lenses operating at several wavelengths. *Opt Express* 2020; 28(8): 11705-11720. doi:10.1364/OE.389458.
- [18] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Geometric-optical calculation of the focal spot of a harmonic diffractive lens. *Computer Optics* 2016; 40(3): 331-337. doi:10.18287/2412-6179-2016-40-3-331-337.
- [19] Khonina SN, Volotovskiy SG, Ustinov AV, Kharitonov SI. Analysis of focusing light by a harmonic diffractive lens with regard for the refractive index dispersion. *Computer Optics* 2017; 41(3): 338-347. doi:10.18287/2412-6179-2017-41-3-338-347.
- [20] Skinner GK. Design of achromatic diffractive lenses. *Opt Express* 2024; 32(1): 230-247. doi:10.1364/OE.509946.
- [21] Kingma DP, Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint* 2014; arXiv:1412.6980.
- [22] Golub MA, Daskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Computer generated diffractive multi-focal lens. *J Mod Opt* 1992; 39(6): 1245-1251. doi:10.1080/713823549.
- [23] Piegls L, Tiller W. The NURBS book. Berlin: Springer; 1996. ISBN: 3-540-61545-8.
- [24] Cubillos M, Jimenez E. Numerical simulation of optical propagation using sinc approximation. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(8): 1403-1413. doi:10.1364/JOSAA.461355.

Сведения об авторах

Досколович Леонид Леонидович, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне — Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва). Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, главный научный сотрудник Отделения института систем обработки изображений НИЦ «Курчатовский институт». Специалист в области нанофотоники, дифракционной оптики, неизображающей оптики. E-mail: leonid@ipsiras.ru

Бызов Егор Владимирович, в 2014 году с отличием окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (ныне — Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева). Кандидат физико-математических наук (2022 год), старший научный сотрудник НИЛ-35 Самарского университета. Область научных интересов: методы расчетов формирующей неизображающей оптики для светодиодов. E-mail: egor.byzov@gmail.com

Головастикова Никита Владимирович, в 2014 году с отличием окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (ныне — Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева). Кандидат физико-

математических наук (2018 год), заведующий лабораторией НИЛ-602 Самарского университета, доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: оптика резонансных дифракционных структур, нанофотоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: nikita.golovastikov@gmail.com

Безус Евгений Анатольевич, в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва. Кандидат физико-математических наук (2012 г.), старший научный сотрудник НИЛ-35 Самарского университета и Отделения института систем обработки изображений НИЦ «Курчатовский институт», доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: нанофотоника, плазмоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: evgeni.bezus@gmail.com

Быков Дмитрий Александрович, в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва. Доктор физико-математических наук (2017 г.), старший научный сотрудник Отделения института систем обработки изображений НИЦ «Курчатовский институт». Области научных интересов: оптика резонансных дифракционных структур, электромагнитная теория дифракции, неизображающая оптика. E-mail: bykovd@gmail.com

Скиданов Роман Васильевич, в 1990 году с отличием окончил Самарский государственный университет (СамГУ). Доктор физико-математических наук (2007 год), заместитель директора, главный научный сотрудник Института систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт», профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. Р.В. Скиданов – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. E-mail: romans@ipsiras.ru

Поступила в редакцию 23 июня 2025 г. Окончательный вариант – 05 ноября 2025 г.

Harmonic DOE design for generating required intensity distributions

L.L. Doskolovich^{1,2}, E.V. Byzov^{1,2}, N.V. Golovastikov^{1,2}, E.A. Bezus^{1,2}, D.A. Bykov^{1,2}, R.V. Skidanov^{1,2}

¹Image Processing Systems Institute, NRC “Kurchatov Institute”,

Molodogvardeyskaya Str. 151, Samara, 443001, Russia;

²Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

A method for designing diffractive optical elements with a smooth phase function is proposed. The method generalizes harmonic diffractive lenses and is intended for generating a specified intensity distribution at multiple harmonic wavelengths. Within this method, the phase function is defined as an expansion in a system of smooth and differentiable functions. The expansion coefficients are treated as optimization parameters and are computed using a gradient-based method to minimize an error function representing the discrepancy between the generated and target intensity distributions. Examples of element designs with a phase function represented as a sum of B-splines are presented. It is shown that for the effective performance of said elements, the error function must explicitly account for the generated intensity distributions not only at the central wavelength but also at other harmonic wavelengths.

Keywords: diffractive optical element, scalar diffraction theory, phase function, inverse problem, target intensity distribution, gradient method.

Citation: Doskolovich LL, Byzov EV, Golovastikov NV, Bezus EA, Bykov DA, Skidanov RV. Harmonic DOE design for generating required intensity distributions. *Computer Optics* 2026; 50(3): 1757. doi: 10.18287/COJ1757.

Acknowledgements: This work was funded by the Russian Science Foundation under project No. 24-19-00080 (Development of the gradient-based method for designing harmonic DOEs, design of DOEs, and performance characterization); the NRC “Kurchatov Institute” government project (Development of software for simulating DOE operation using the scalar diffraction theory); and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under Samara University's government project FSSS-2024-0016 (Analysis of the DOE performance under deviations of the incident radiation wavelength from the design value).

Author's information

Leonid Leonidovich Doskolovich graduated (1989) from Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University). Doctor in Physics & Maths (2001). Principal researcher at the Image Processing Systems Institute (IPSI), NRC “Kurchatov Institute”. Research interests: nanophotonics, diffractive optics, nonimaging optics. E-mail: leonid@ipsiras.ru

Egor Vladimirovich Byzov graduated (2014) from Samara State Aerospace University (SSAU). Candidate in Physics and Maths (2022). Senior researcher at Samara University. Research interests: design methods of nonimaging optics for LEDs. E-mail: egor.byzov@gmail.com

Nikita Vladimirovich Golovastikov graduated (2014) from SSAU. Candidate in Physics and Maths (2018). Head of research laboratory at Samara University. Research interests: diffractive optics, nanophotonics, electromagnetic diffraction theory. E-mail: nikita.golovastikov@gmail.com

Evgeni Anatolievich Bezus graduated (2009) from SSAU. Candidate in Physics and Maths (2012). Senior researcher at Samara University. Research interests: nanophotonics, plasmonics, electromagnetic diffraction theory. E-mail: evgeni.bezus@gmail.com

Dmitry Alexandrovich Bykov graduated (2009) from SSAU. Doctor in Physics and Maths (2017). Senior researcher at IPSI, NRC “Kurchatov Institute”. Research interests: optics of resonant diffractive structures, electromagnetic diffraction theory, nonimaging optics. E-mail: bykovd@gmail.com

Roman Vasilevich Skidanov graduated (1990) from Samara University. Doctor in Physics & Maths (2007). Vice director and the main researcher at IPSI, NRC “Kurchatov Institute”. Research interests: diffractive optics, mathematical modeling, image processing, nanophotonics. E-mail: romans@ipsiras.ru

Received June 23, 2025. The final version – November 05, 2025.
