

Топологический заряд геометрической прогрессии оптических вихрей в турбулентной среде

Д.О. Шилов¹, Е.С. Козлова^{1,2}

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34;

² Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт»,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151

Аннотация

В работе рассматриваются пучки в виде геометрической прогрессии оптических вихрей. С помощью интеграла Френеля проведено численное моделирование распространения таких оптических полей в турбулентных средах. Рассчитаны топологические заряды исходных и результирующих полей. Анализ полученных результатов показал, что суперпозиции с меньшим количеством пучков более устойчивы к искажениям сильно турбулентными средами. Показано, что на устойчивость распространения суперпозиции оптических вихрей в виде геометрической прогрессии в турбулентности влияют не только параметры среды, но и параметры геометрической прогрессии.

Ключевые слова: оптические вихри, топологический заряд, суперпозиция, геометрическая прогрессия, турбулентность, преобразование Френеля, формула Берри.

Цитирование: Шилов, Д.О. Топологический заряд геометрической прогрессии оптических вихрей в турбулентной среде / Д.О. Шилов, Е.С. Козлова // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 3. – 1737. – doi: 10.18287/COJ1737.

Citation: Shilov DO, Kozlova ES. Topological charge of a geometric progression of optical vortices in a turbulent medium. Computer Optics 2026; 50(3): 1737. doi: 10.18287/COJ1737.

Введение

Оптические вихри являются предметом активного изучения последние несколько десятилетий [1–5]. Одной из основных характеристик любого оптического вихря является его топологический заряд [6, 7]. Множество научных работ посвящено способам измерения топологического заряда [8–13], а также исследованию зависимости величины топологического заряда от вида оптического вихря [6, 14–17], в том числе и для суперпозиций оптических вихрей [18–21]. Изучение методов измерения топологического заряда, а также исследование его зависимости от вида оптического вихря позволяет создавать новые световые пучки, обладающие уникальными характеристиками, которые могут применяться в различных прикладных задачах, например, в манипулировании микрообъектами [22], оптической связи [23] и шифровании [24].

Атмосферная оптическая связь дает возможность передавать данные различного рода между объектами непосредственно в атмосфере без использования оптического волокна и не занимая частоты в радиозфере. Распространение оптического сигнала в свободном пространстве может быть подвержено искажениям, связанным с турбулентностью среды [25–29]. Из-за свойств турбулентности случайные изменения атмосферного показателя преломления могут стать причиной искажения интенсивности лазерного излучения, что влечет за собой уменьшение скорости передачи и предельного расстояния [30]. По этой причине поиск возможности преодоления негативного влияния турбулентной среды является актуальной проблемой [31, 32].

Существует множество работ, посвященных моделированию распространения световых пучков в свободном пространстве [33–38] и в турбулентных средах [39–43]. Метод плавных возмущений, или метод Рытова, является одним из классических методов описания распространения волны через турбулентную атмосферу [44]. Однако существуют и другие методы, например, метод статистического моделирования [44–46]. Моделирование среды в данном методе осуществляется в виде набора статистически независимых плоских экранов со случайными двумерными полями коэффициентов пропускания и набега фазы, между которыми волна испытывает только дифракцию. Многократное повторение численных экспериментов по рассеянию волны на последовательности этих экранов дает выборку случайных реализаций световых полей, по которой могут быть определены искомые статистические характеристики излучения. В данной работе использовался метод, описанный в статье [45] и соответствующий методу Рытова.

Особый интерес представляет величина топологического заряда при распространении оптических пучков в турбулентных средах, так как он является носителем передаваемой информации [23]. В данной работе был рассмотрен процесс распространения суперпозиции гауссовых оптических вихрей в виде геометрической прогрессии с параметром [18] в турбулентных средах. Основное внимание было уделено исследованию зависимости значения топологического заряда суперпозиции от параметров пучка и турбулентности.

1. Методология моделирования распространения пучков

При моделировании процесса распространения света решается прямая задача оптики. Прямая задача оптики состоит в том, чтобы по известному полю в фиксированной плоскости построить поле на заданном расстоянии от него. В данной работе рассматривается входное поле в начальной плоскости и поле на расстоянии Рэлея. В качестве оператора распространения используется преобразование Френеля, представляющее собой разложение по параболическим волнам [45] и широко применяемое для решения аналогичных задач [46]:

$$F(u, v, z, t) = -\frac{ik_0}{2\pi z} e^{ik_0 z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{\frac{ik_0}{2z}([x-u]^2 + [y-v]^2)} e^{\Psi(x, y, u, v, z) - i\omega t} dx dy, \quad (1)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число, λ_0 – длина волны излучения, (x, y) и (u, v) – декартовы координаты в начальной плоскости и в области наблюдения, z – расстояние от начальной плоскости до области наблюдения, $f(x, y)$ – поле в источнике, $\Psi(x, y, u, v, z)$ – случайная комплексная функция, описывающая неравномерность среды, ω – частота света. Данное уравнение соответствует методу Рытова [44].

Расчет поля по формуле (1) выполнялся нижеописанным образом. В начальной плоскости исходное поле умножается на поле со случайной фазой, которая определялась с использованием следующей корреляционной матрицы для описания турбулентных искажений [47]:

$$U_{corr}(x, y, z) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\rho_0^2(z)}\right), \quad (2)$$

где $\rho_0(z)$ – функция длины когерентности (радиуса) распространения сферической волны в рассматриваемой среде. Используя теорему о свертке, преобразование Френеля вычислялось через двумерные прямое и обратное преобразования Фурье, согласно методике, описанной в [48].

В работе предполагалось, что световые пучки будут распространяться на расстояние Рэлея $z_0 = \pi w_0^2/\lambda_0$, где w_0 – ширина пучка. При распространении в реальной атмосфере на такие незначительные расстояния световой пучок не успевает исказиться [49]. Кроме того, в этом случае можно считать $\rho_0 = \text{const}$. Ввиду вышесказанного и исходя из законов подобия [50] и экспериментальных работ [51] нами были подобраны коэффициенты ρ_0 , которые будут соответствовать слабой ($C_n^2 \sim 10^{-17} \text{ м}^{-2/3}$: $\rho_0 = 1,3785$), нормальной ($C_n^2 \sim 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$: $\rho_0 = 0,2682$) и сильной ($C_n^2 \sim 10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$: $\rho_0 = 0,0870$) турбулентностям атмосферы. Некоторые реализации таковых полей, полученных с использованием корреляционной матрицы (2) и выбранных значений радиуса когерентности согласно методике, описанной в [45–47], представлены на рис. 1.

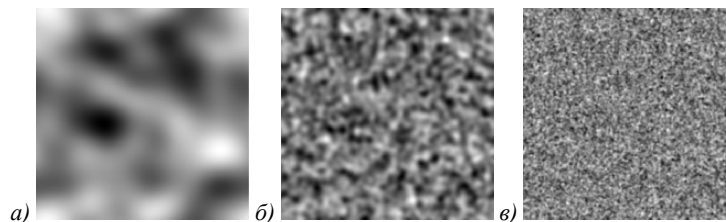


Рис. 1. Реализация фазового экрана для моделирования слабой (а), нормальной (б) и сильной (в) турбулентности

Из рисунков можно видеть, что параметр ρ_0 фактически влияет на зернистость фазового экрана. Однако интенсивность влияния среды можно также характеризовать диапазоном изменения фазовых скачков (т.е. диапазоном изменения фазы при переходе от черного к белому цветам на рис. 1). Определим данный параметр как интенсивность турбулентности и обозначим σ , при этом сами значения для фазовой добавки, отвечающей за турбулентность, будут находиться в диапазоне $[-\sigma/2, \sigma/2]$. В наших исследованиях мы рассматривали случаи с σ , равными $\pi/2$, π , 2π .

2. Методология расчета топологического заряда

Топологический заряд произвольного светового пучка может быть вычислен с помощью определенной в работе М.В. Берри [52] формулы:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}, \quad (3)$$

где $E(r, \varphi)$ – комплексная амплитуда оптического вихря, (r, φ) – полярные координаты в сечении пучка.

У пучков со всего одним вихрем топологическим зарядом является фазовый набег вокруг точки фазовой сингулярности. В общем же случае топологический заряд выводится как фазовый набег по бесконечному контуру.

В данной работе в качестве начального поля рассматривается суперпозиция оптических вихрей, которая может быть описана формулой геометрической прогрессии. Данные типы пучков были предложены в статье [18]. Комплексная амплитуда подобных вихрей в начальной плоскости может быть описана следующим выражением:

$$E(r, \varphi) = e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} (a^k e^{ikm\varphi} + a^{k+1} e^{i(k+1)m\varphi} + \dots + a^n e^{inm\varphi}), \quad (4)$$

где a – действительный параметр, w_0 – ширина перетяжки гауссова пучка, k, n, m – целые параметры. Такие пучки могут быть полезными в задачах оптических коммуникаций [23] и защите информации [24], в связи с чем интересно изучить поведение таких пучков в турбулентной среде, а также оценить влияние параметров турбулентности на итоговый топологический заряд пучков.

В результате подстановки выражения (4) в формулу Берри (3) авторами статьи [18] были получены следующие значения топологических зарядов пучка в начальной плоскости:

$$TC = \begin{cases} km, |a| < 1, \\ \frac{k+n}{2}m, |a| = 1, \\ nm, |a| > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Однако в процессе распространения итоговый топологический заряд геометрической прогрессии может измениться. При $a = 1$ прогрессия стационарная, ее ОУМ-спектр симметричный и топологический заряд суперпозиции равен номеру средней угловой гармоники ($TC = (k+n)m/2$). В итоге он может оказаться полусуммой, но при распространении в свободном пространстве он станет целым и равным nm [18].

Для численного расчета топологического заряда авторами был реализован собственный скрипт на языке Python, в основу которого положена формула М. Берри (3). Однако прямая программная реализация данной формулы в случае, если фаза исследуемого пучка является негладкой функцией, может привести к некорректным результатам.

Действительно, любая комплексная амплитуда поля может быть представлена следующим образом:

$$E(r, \varphi) = A(r, \varphi) e^{i\Phi(r, \varphi)}. \quad (6)$$

Вычислим частную производную данной функции по углу φ :

$$\frac{\partial E(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial A(r, \varphi)/\partial \varphi}{A(r, \varphi)} + i \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

Подставим полученное выражение в формулу М.В. Берри и получим следующее выражение для топологического заряда:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \arg E(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (8)$$

Из полученного выражения видно, что фактически расчет топологического заряда приводит к задаче дифференцирования функции фазы исходного поля. При дифференцировании функции $\arg[E(r, \varphi)]$ могут возникнуть сложности, так как она может быть негладкой. Для предотвращения этой ситуации выполним следующую замену:

$$E_{smooth}(r, \varphi) = e^{i \arg[E(r, \varphi)]}. \quad (9)$$

Функция (9) является гладкой. При этом с физической точки зрения топологический заряд у подобного поля будет совпадать с топологическим зарядом поля $E(r, \varphi)$. Продифференцируем функцию (9):

$$\frac{\partial E_{smooth}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = e^{i \arg[E(r, \varphi)]} \frac{\partial \arg[E(r, \varphi)]}{\partial \varphi} i. \quad (10)$$

Если умножить эту производную на комплексно сопряженное поле $E_{smooth}^*(r, \varphi)$ и взять мнимую часть, то получится искомое подынтегральное выражение для формулы подсчета топологического заряда:

$$\text{Im} \left(E_{smooth}^*(r, \varphi) \frac{\partial E_{smooth}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right) = \text{Im} \left(e^{-i \arg[E(r, \varphi)]} e^{i \arg[E(r, \varphi)]} i \frac{\partial \arg[E(r, \varphi)]}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial \arg[E(r, \varphi)]}{\partial \varphi}. \quad (11)$$

В программной реализации метода расчета топологического заряда была использована представленная замена (11). Для расчета частной производной по углу φ воспользуемся связью декартовых и полярных координат. В частности, производная по углу может быть программно вычислена с использованием функции `np.gradient`. В качестве аргументов данная функция принимает сгенерированное поле со случайной фазой и (dx, dy) . При вычислении самого интеграла (1) проводилась его замена на конечную сумму. Интегрирование проводилось по окружности, радиус которой выбирался максимальным в расчетной области, но без наложения на периферию, где точность описания поля ввиду высокой частоты осцилляций комплексной экспоненты (собственные функции преобразования Фурье, используемого в методе расчета поля на расстоянии Рэлея в ходе распространения) является недостаточной. Корректность работы выбранного метода расчета топологического заряда для суперпозиции гауссовых оптических вихрей как геометрической прогрессии с параметром была выполнена на параметрах $n = 1, m = 1, k = 1, a = 1$ (т.е. суперпозиции, состоящей из одного пучка). В результате использования

данного метода значение топологического заряда в начальной плоскости и на расстоянии Рэлея равно 1,0000 и 0,9999 соответственно, что соответствует теоретически рассчитанным значениям по формуле (3). Это подтверждает корректность работы разработанной программы.

3. Численное моделирование

В ходе моделирования мы зафиксировали начальную длину волны $\lambda_0 = 532$ нм и ширину перетяжки гауссова пучка $w_0 = 0,5$ мм, а параметры геометрической прогрессии варьировали, получая, таким образом, суперпозиции с различным значением топологического заряда в начальной плоскости. С помощью преобразования Френеля (1) проводилось моделирование распространения суперпозиций в турбулентной среде на расстояние длины Рэлея z_0 с целью определить степень устойчивости топологического заряда результирующего поля к турбулентности среды от параметров суперпозиции и среды. Для среды варьировались радиус когерентности ρ_0 и интенсивность турбулентности σ .

Для формирования фазового экрана требуется генерация случайного распределения, на базе которого с использованием корреляционной матрицы (2) формируется конкретная реализация фазового экрана. Учитывая, что для каждой конкретной реализации случайного фазового экрана значение топологического заряда может меняться различным образом, нами было проведено 20 моделирований при одинаковых параметрах пучка и среды, но различных наборах исходной случайной последовательности. В каждом моделировании для результирующего (на расстоянии Рэлея z_0) поля нами было численно рассчитано значение топологического заряда, а далее проведено его усреднение и оценка диапазона изменения. Таким образом, значение TC_{aver} представляет собой среднее значение топологического заряда в 20 моделированиях, при этом значения, получаемые в каждом конкретном расчете, лежат в интервале $[TC_{min}, TC_{max}]$. Также были рассчитаны отклонения (в процентах) ξ_{aver} , ξ_{min} , и ξ_{max} полученных численных значений TC_{aver} , TC_{min} , и TC_{max} от ожидаемого теоретического значения топологического заряда TC_{theor} в отсутствие турбулентности [18].

3.1. Влияние параметров суперпозиции

Первоначально нами была проведена оценка влияния параметра m . Рассмотрим две суперпозиции с одинаковыми $k=0$ и $a=1$, а m и n пусть у них меняются значениями, т.е. для первой суперпозиции $m=5$, $n=3$, для второй – $m=3$, $n=5$. Обе суперпозиции имеют одинаковый теоретический топологический заряд в начальной плоскости ($TC_{theor}=7,5$) и на расстоянии Рэлея ($TC_{theor}=15$). Если внимательно посмотреть на формулу (4), то станет ясно, что параметр m фактически отвечает за шаг прогрессии. Чем он выше, тем больше топологические заряды каждого из пучков, входящих в итоговую суперпозицию. При этом параметр n отвечает за количество пучков в суперпозиции. Результаты моделирования для таких полей представлены в табл. 1 и 2, а также на рис. 2–3.

Табл. 1. Среднеквадратическое отклонение топологического заряда для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=5$, $n=3$, $a=1$ на расстоянии Рэлея z_0 от теоретического $TC_{theor}=15$

σ	$\pi/2$			π			2π		
ρ_0	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$
1,3785	0,0798	0,1160	0,0547	0,5086	7,0960	0,0313	2,2964	13,9953	0,0287
0,2682	2,8199	13,2973	0,0160	9,1470	20,0900	0,0727	19,9407	35,2887	9,9073
0,0870	11,5470	26,7327	0,0233	25,2285	40,0693	7,9327	37,4261	53,3947	20,7947

Табл. 2. Среднеквадратическое отклонение топологического заряда для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=3$, $n=5$, $a=1$ на расстоянии Рэлея z_0 от теоретического $TC_{theor}=15$

σ	$\pi/2$			π			2π		
ρ_0	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$
1,3785	0,0351	0,0353	0,0349	0,0352	0,0357	0,0344	0,6985	13,2980	0,0338
0,2682	1,7617	6,6997	0,0351	5,3655	13,3640	0,0360	15,4145	26,6906	6,6954
0,0870	13,7095	33,3520	0,0355	36,3582	46,6914	20,0534	49,8204	73,3337	39,6494

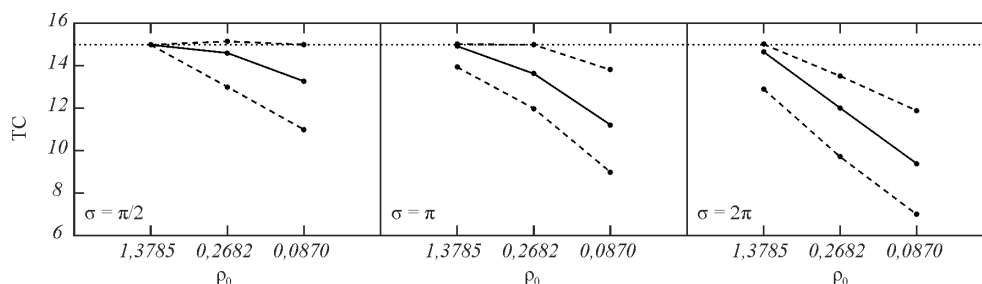


Рис. 2. Среднее значение топологического заряда TC_{aver} (сплошная линия) и интервал его изменения топологического заряда $[TC_{min}, TC_{max}]$ (пунктирные линии) для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=5$, $n=3$, $a=1$, $TC_{theor}=15$ (точечная горизонтальная линия) на расстоянии z_0

При сравнении рис. 2 и 3 и табл. 1 и 2 можно заметить, что суперпозиция с $m=5$, $n=3$ (а значит, меньшим количеством пучков в своем составе) является более устойчивой к сильной ($\rho_0=0,0870$) турбулентности, что выражается меньшими значениями среднего отклонения ξ_{aver} , при этом для двух других значений показателя ρ_0 топологический заряд суперпозиции с $m=3$, $n=5$ (а значит, большим количеством пучков в своем составе) изменяется меньше.

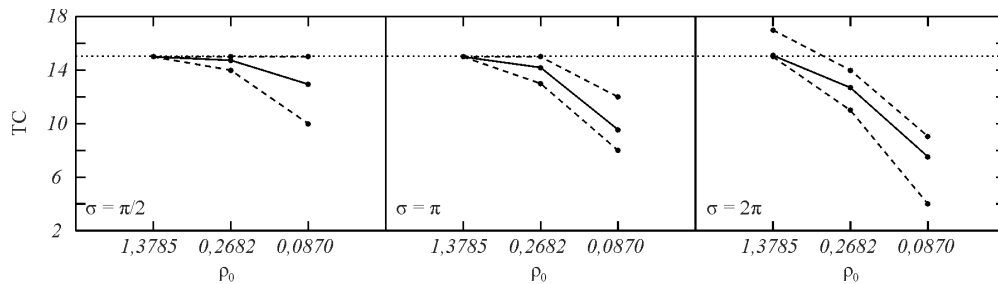


Рис. 3. Среднее значение топологического заряда TC_{aver} (сплошная линия) и интервал его изменения топологического заряда $[TC_{min}, TC_{max}]$ (пунктирные линии) для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=3$, $n=5$, $a=1$, $TC_{theor}=15$ (точечная горизонтальная линия) на расстоянии Рэлея z_0

Теперь рассмотрим суперпозицию с $k=0$, $m=1$, $n=3$, $a=1$. Ее топологический заряд в начальной плоскости ($TC_{theor}=1,5$) и на расстоянии Рэлея ($TC_{theor}=3$) будет отличаться от топологического заряда суперпозиции $k=0$, $m=5$, $n=3$, $a=1$, но параметры этих суперпозиций отличаются только значением m . Результаты моделирования для третьей суперпозиции приведены в табл. 3 и на рис. 4.

Табл. 3. Среднеквадратическое отклонение топологического заряда для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=1$, $n=3$, $a=1$ на расстоянии z_0 от теоретического $TC_{theor}=3$

σ	$\pi/2$			π			2π		
ρ_0	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$	$\xi_{aver}, \%$	$\xi_{max}, \%$	$\xi_{min}, \%$
1,3785	0,0042	0,0045	0,0040	0,0040	0,0047	0,0025	0,0038	0,0054	0,0014
0,2682	0,0041	0,0115	0,0010	6,6276	33,3670	0,0002	38,3538	100,0692	0,0158
0,0870	3,3329	33,3292	0,0004	53,1127	100,0525	0,0086	103,4074	166,6981	33,3041

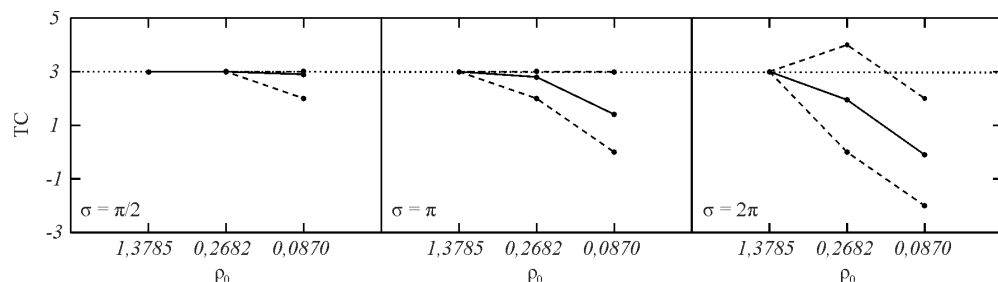


Рис. 4. Среднее значение топологического заряда TC_{aver} (сплошная линия) и интервал его изменения топологического заряда $[TC_{min}, TC_{max}]$ (пунктирные линии) для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=1$, $n=3$, $a=1$, $TC_{theor}=3$ (точечная горизонтальная линия) на расстоянии Рэлея z_0

Из сравнения рис. 2 и 4 и табл. 1 и 3 можно видеть, что, как и в предыдущем случае, суперпозиция с меньшим топологическим зарядом является более стабильной к искажениям слабой ($\rho_0=1,3785$) и нормальной ($\rho_0=0,2682$) турбулентной средой. При этом, как правило, чем выше топологический заряд пучка, тем сильнее на него действует турбулентность [50]. Однако из сравнения рис. 2 и 4 и табл. 1 и 3 можно сделать обратное заключение. Так, в сильно турбулентных средах ($\rho_0=0,087$, $\sigma=\pi$ и $\sigma=2\pi$) значение среднего отклонения ξ_{aver} для суперпозиции с более низким топологическим зарядом практически в 2 раза больше, чем для суперпозиции с более высоким топологическим зарядом.

Далее нами было проведено исследование влияния параметра k . Рассмотрим суперпозицию с $k=3$, $m=3$, $n=5$, $a=1$. Ее топологический заряд в начальной плоскости ($TC_{theor}=12$) и на расстоянии Рэлея ($TC_{theor}=12$) будет отличаться от топологического заряда суперпозиции $k=0$, $m=3$, $n=5$, $a=1$, но параметры этих суперпозиций отличаются только значением k . Результаты моделирования для четвертой суперпозиции приведены в табл. 4 и на рис. 5.

При сравнении результатов на рис. 3 и 5 и в табл. 2 и 4 можно видеть, что для пучков с $m=3$, $n=5$, $a=1$ при увеличении параметра k с 0 до 3 наблюдается аномальное поведение пучка. В частности, с ростом k снизилась устойчивость суперпозиции к влиянию сред с высоким значением корреляционного радиуса (т.е. в среде со слабой турбулентностью) и, наоборот, увеличилась устойчивость к влиянию сред с низким значением корреляционного радиуса (т.е. в среде с сильной турбулентностью). Так, в предельном случае для максимальной интенсивности $\sigma=2\pi$ значение среднего отклонения ξ_{aver} уменьшается в 4,26 раза, а максимального отклонения

$\xi_{\max}$ в 2,93 раза. Если наблюдение касательно высокой турбулентности можно объяснить также усечением последовательности с помощью параметра $k=3$, то влияние слабой турбулентности требует дополнительного исследования.

Табл. 4. Среднеквадратическое отклонение топологического заряда для пучка (4) с параметрами $k=3$, $m=3$, $n=5$, $a=1$ на расстоянии Рэлея z_0 от теоретического $TC_{\text{theor}}=12$

σ	$\pi/2$			π			2π		
ρ_0	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$
1,3785	22,1775	25,0110	16,4856	16,8935	25,0219	8,3799	14,2110	25,0268	8,3618
0,2682	12,1067	25,0263	0,0277	9,6038	25,0241	0,0307	8,3528	25,0230	0,0282
0,0870	7,2127	25,0214	0,0002	5,4626	16,6847	0,0327	11,6918	25,0263	0,0266

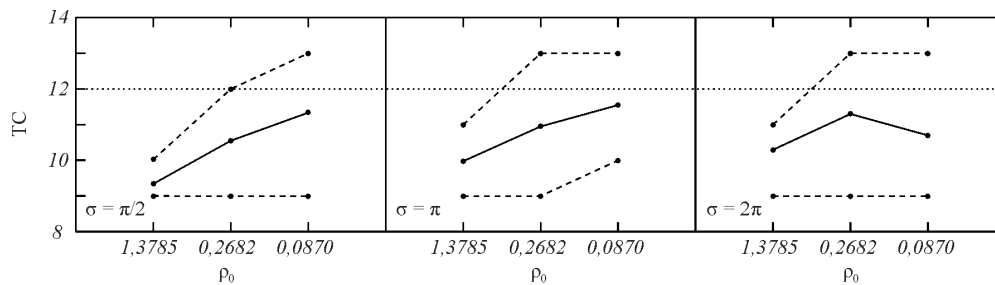


Рис. 5. Среднее значение топологического заряда TC_{aver} (сплошная линия) и интервал его изменения топологического заряда $[TC_{\min}, TC_{\max}]$ (пунктирные линии) для пучка (4) с параметрами $k=3$, $m=3$, $n=5$, $a=1$, $TC_{\text{theor}}=12$ (точечная горизонтальная линия) на расстоянии Рэлея z_0

На последнем этапе нами было рассмотрено влияние параметра a . Рассмотрим суперпозиции с одинаковыми $k=0$, $m=1$, $n=3$, а параметр a рассмотрим равным 0,7 и 3 для убывающей и возрастающей геометрических прогрессий соответственно. Теоретический топологический заряд таких полей на расстоянии Рэлея будет одинаковым и равным 3. Результаты моделирования для этих суперпозиции приведены в табл. 5 и 6, а также на рис. 7 и 8.

Из сравнения рис. 4, 6 и 7 и табл. 3, 5 и 6 можно видеть, что увеличение параметра a резко повышает устойчивость суперпозиции к турбулентным искажениям (в 3–5 раз снижает значение среднего отклонения ξ_{aver}).

Табл. 5. Среднеквадратическое отклонение топологического заряда для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=1$, $n=3$, $a=0,7$ на расстоянии Рэлея z_0 от теоретического $TC_{\text{theor}}=3$

σ	$\pi/2$			π			2π		
ρ_0	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$
1,3785	0,0180	0,0181	0,0179	0,0180	0,0182	0,0178	0,0179	0,0183	0,0175
0,2682	0,0198	0,0278	0,0118	16,6890	66,6855	0,0043	23,2150	66,6651	0,0026
0,0870	106,6182	166,7273	32,8493	93,2092	199,9698	33,3559	103,3857	199,9594	33,3749

Табл. 6. Среднеквадратическое отклонение топологического заряда для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=1$, $n=3$, $a=3$ на расстоянии Рэлея z_0 от теоретического $TC_{\text{theor}}=3$

σ	$\pi/2$			π			2π		
ρ_0	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$	$\xi_{\text{aver}}, \%$	$\xi_{\text{max}}, \%$	$\xi_{\text{min}}, \%$
1,3785	0,0350	0,0375	0,0315	0,0347	0,0393	0,0276	0,0341	0,0421	0,0213
0,2682	0,0350	0,0387	0,0331	0,0344	0,0397	0,0307	0,0323	0,0407	0,0262
0,0870	0,0349	0,0465	0,0239	14,0207	34,3267	0,0168	36,6959	133,2399	0,0442

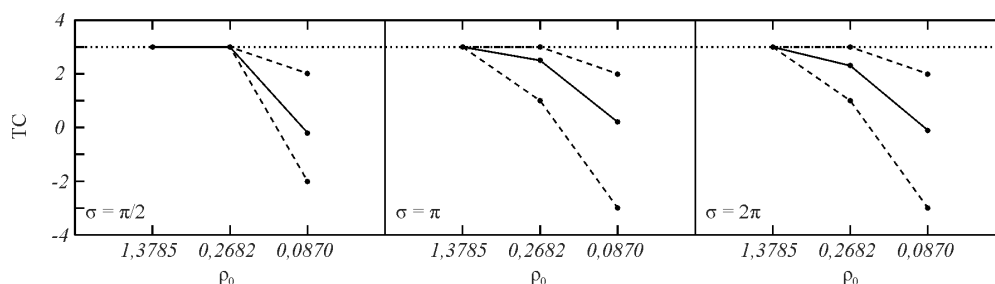


Рис. 6. Среднее значение топологического заряда TC_{aver} (сплошная линия) и интервал его изменения топологического заряда $[TC_{\min}, TC_{\max}]$ (пунктирные линии) для пучка (4) с параметрами $k=0$, $m=1$, $n=3$, $a=0,7$, $TC_{\text{theor}}=3$ (точечная горизонтальная линия) на расстоянии Рэлея z_0

Если провести подробный анализ таблиц, то можно заметить, что для слабых турбулентных сред ($\rho_0=1,3785$) вне зависимости от параметра σ среднее отклонение вычисления топологического заряда ξ_{aver} , как правило, не

превышает несколько процентов: $\sim 2,2964\%$ для пучка $k=0, m=5, n=3, a=1, TC_{theor}=15$. А зачастую отклонение ξ_{aver} находится на уровне десятых или даже сотых долей процента, например, $\sim 0,0038\%$ для пучка $k=0, m=1, n=3, a=1, TC_{theor}=3$ или $\sim 0,6985\%$ для пучка $k=0, m=1, n=3, a=1, TC_{theor}=3$. Исключение составляет только случай для параметров пучка $k=3, m=3, n=5, a=1$. Для нормальной турбулентности ($\rho_0=0,2682$) параметр σ начинает иметь свое влияние, увеличивая разброс среднего отклонения ξ_{aver} от долей процента до нескольких десятков: $0,0041-38,3538\%$ для $k=0, m=1, n=3, a=1$. В сильной турбулентности для среднего отклонения топологического заряда ξ_{aver} характерны значения в несколько десятков процентов: $13,7095-49,8204\%$ для $k=0, m=3, n=5, a=1$. А при высокой интенсивности $\sigma=2\pi$ пучок может даже «рассыпаться»: $\sim 103,4074\%$ для $k=0, m=1, n=3, a=1$.

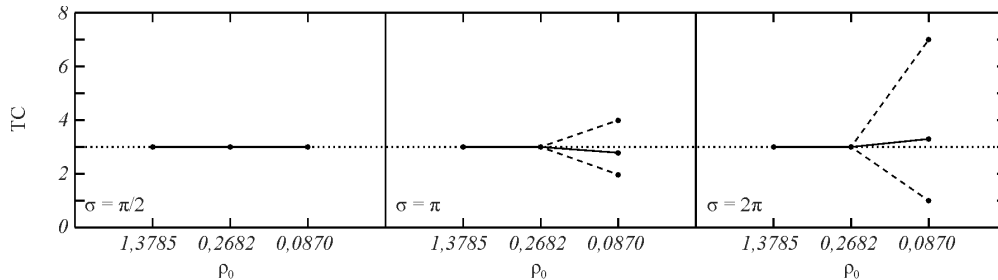


Рис. 7. Среднее значение топологического заряда TC_{aver} (сплошная линия) и интервал его изменения топологического заряда $[TC_{min}, TC_{max}]$ (пунктирные линии) для пучка (4) с параметрами $k=3, m=3, n=5, a=1, TC_{theor}=12$ (точечная горизонтальная линия) на расстоянии Рэлея z_0

Для визуализации результатов моделирования приведем распределения интенсивности и фазы пучка (4) с параметрами $k=0, m=3, n=5, a=1$ в начальной плоскости (рис. 8а, б) и на расстоянии Рэлея в нетурбулентной среде (рис. 8в, г) при прохождении через турбулентные среды с различными параметрами (рис. 9).

3.2. Влияние параметров среды

Рис. 2–8 и табл. 1–6 наглядно демонстрируют влияние турбулентности на оптический пучок. Чем менее коррелированы между собой отсчеты фазового экрана, т.е. чем меньше радиус когерентности ρ_0 , а следовательно, больше C_n^2 и сильнее турбулентность, тем сильнее искажается световое поле. Ввиду этих искажений топологический заряд меняет свое значение и в большинстве случаев уменьшается. При изменении интенсивности турбулентности σ также наблюдается закономерная картина: большему значению турбулентности соответствует большее изменение в значении топологического заряда.

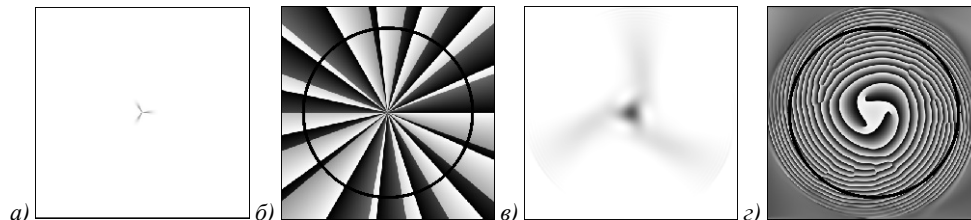


Рис. 8. Интенсивность (а,в) и фаза (б,г) пучка (4) при $k=0, m=3, n=5, a=1$ в начальной плоскости и на расстоянии Рэлея при распространении в нетурбулентной среде. Кольцом отмечен контур для расчета топологического заряда

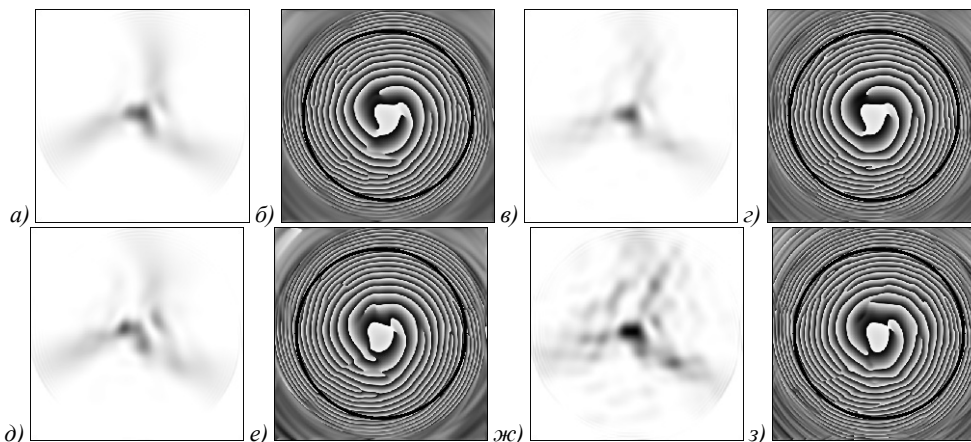


Рис. 9. Интенсивность (а, в, е, з) и фаза (б, г, ж, и) пучка (4) при $k=0, m=3, n=5, a=1$ на расстоянии Рэлея в турбулентной среде с параметрами: $\rho_0=0,2682$ и $\sigma=\pi$; $\rho_0=0,0870$ и $\sigma=\pi$; $\rho_0=0,2682$ и $\sigma=2\pi$; $\rho_0=0,0870$ и $\sigma=2\pi$. Кольцом отмечен контур для расчета топологического заряда

Заключение

Работа была посвящена вопросу влияния турбулентности на топологический заряд суперпозиции оптических вихрей. Были рассмотрены суперпозиции гауссовых оптических вихрей в виде геометрической прогрессии с параметром [18]. В ходе моделирования варьировались параметры суперпозиции и параметры среды. Были численно рассчитаны значения топологического заряда и их отклонения от теоретического значения заряда при распространении суперпозиции в турбулентной среде. Также были проведены усреднения полученных результатов по 20 экспериментам для каждого сочетания параметров пучка и параметров среды.

Было показано, что топологический заряд незначительно меняется при распространении в слабых турбулентных средах ($\rho_0 = 1,3785$). Вне зависимости от параметра σ среднее отклонение вычисления топологического заряда суперпозиции ξ_{aver} , как правило, не превышает 0,05–3 %. Для нормальной турбулентности ($\rho_0 = 0,2682$) параметр σ начинает иметь свое влияние, увеличивая разброс среднего отклонения ξ_{aver} от долей процента до нескольких десятков: 0,05–40 %. В сильной турбулентности для среднего отклонения топологического заряда ξ_{aver} характерны значения в несколько десятков процентов.

Было показано, что значение отклонения топологического заряда зависит не только от параметров турбулентной среды, но и от характеристик пучка. В частности, увеличение параметров k (отвечает за усечение последовательности) и уменьшение параметра n (отвечает за максимальное количество оптических вихрей в прогрессии) приводит к увеличению устойчивости топологического заряда суперпозиции к турбулентным искажениям, так как оба параметра позволяют контролировать (а при увеличении и снижении соответственно снижать) количество оптических вихрей в суперпозиции. Показано, что суперпозиция в виде возрастающей геометрической прогрессии более устойчива к турбулентным искажениям (увеличение параметра a в 3–5 раз снижает значение среднего отклонения ξ_{aver}).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 25-29-01187) (моделирование) и в рамках выполнения работ по Государственному заданию НИЦ «Курчатовский институт» (теория).

References

- [1] Das BK, Granados C, Ciappina MF. Generation of elliptical perfect optical vortex beams and their propagation in free-space. *Appl Opt* 2024; 63(10): 2737-2745. doi:10.1364/AO.521826.
- [2] Hyde MW IV, Porras MA. Propagation of spatiotemporal optical vortex beams in linear, second-order dispersive media. *Phys Rev A* 2023; 108(1): 013519. doi:10.1103/PhysRevA.108.013519.
- [3] Kotlyar VV, Kovalev AA, Kozlova ES, Savelyeva AA, Stafeev SS. A new type of vortex laser beams: Squared Laguerre-Gaussian beam. *Optik* 2022; 270: 169916. doi:10.1016/j.ijleo.2022.169916.
- [4] Acevedo CH, Eshaghi M, Dogariu A. Propagation of asymmetric optical vortex beams through turbulence and evolution of their OAM spectra. *J Opt Soc Am A* 2023; 40(12): 2135-2145. doi:10.1364/JOSAA.500239.
- [5] Weng X, Yu M, Wang G, Zhan Q, Dong X, Qu J, Gao X, Zhuang S. Propagable optical vortices with natural noninteger orbital angular momentum in free space. *Adv Photonics Res* 2023; 4(1): 2200094. doi:10.1002/adpr.202200094.
- [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Topological charge of optical vortices. Boca Raton, FL: CRC Press; 2022. 320 p. doi:10.1201/9781003326304.
- [7] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 2019; 8: 90. doi:10.1038/s41377-019-0194-2.
- [8] Moradi H, Mahmoudi M. Direct determination of topological charge of structured light via phase-shift interference. *Optik* 2024; 311: 171943. doi:10.1016/j.ijleo.2024.171943.
- [9] Dev V, Pal V. Probing topological charge of discrete vortices. *Phys Rev Appl* 2023; 20(3): 034071. doi:10.1103/PhysRevApplied.20.034071.
- [10] Anufriyev EG. Determination of the orbital angular momentum state of a radio wave beam based on quantitative characteristics of a radio communication system. *Computer Optics* 2022; 46(1): 22-29. doi:10.18287/2412-6179-CO-907.
- [11] Shang Y, Wang W, Mi Z, Wang B, Zhang L, Han K, Lei C, Man Z, Ge X. Determining the topological charge of optical vortex by intensity distribution of a quasi-Airy vortex beam. *Opt Commun* 2023; 529: 129075. doi:10.1016/j.optcom.2022.129075.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Determination of an optical vortex topological charge using an astigmatic transform. *Computer Optics* 2016; 40(6): 781-792. doi:10.18287/2412-6179-2016-40-6-781-792.
- [13] Han Y, Zhao G. Measuring the topological charge of optical vortices with an axicon. *Opt Lett* 2011; 36(11): 2017-2019. doi:10.1364/OL.36.002017.
- [14] Zhang B, Hu ZJ, Wu D, Wang J, Nie Y, Zhang F, Li M, Khakhomov S. Metasurface-based perfect vortex beams with trigonometric-function topological charge for OAM manipulation. *Opt Lett* 2023; 48(9): 2409-2412. doi:10.1364/OL.488701.
- [15] Guo M, Le W, Wang C, Rui G, Zhu Z, He J, Gu B. Generation, topological charge, and orbital angular momentum of off-axis double vortex beams. *Photonics* 2023; 10(4): 368. doi:10.3390/photonics10040368.
- [16] Kovalev AA, Kotlyar VV. Optical vortex beams with the infinite topological charge. *J Opt* 2021; 23(5): 055601. doi:10.1088/2040-8986/abf172.
- [17] Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of asymmetric optical vortices. *Opt Express* 2020; 28(14): 20449-20460. doi:10.1364/OE.394273.

- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of a superposition of optical vortices described by a geometric sequence. *Computer Optics* 2022; 46(6): 864-871. doi:10.18287/2412-6179-CO-1152.
- [19] Kotlyar VV, Kovalev AA, Savelyeva AA. Coherent superposition of the Laguerre-Gaussian beams with different wavelengths: colored optical vortices. *Computer Optics* 2022; 46(5): 692-700. doi:10.18287/2412-6179-CO-1106.
- [20] Kotlyar VV, Kovalev AA, Savelyeva AA. Topological charge of a superposition of identical parallel single-ringed Laguerre-Gaussian beams. *Computer Optics* 2022; 46(2): 184-188. doi:10.18287/2412-6179-CO-1086.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of a superposition of two Bessel-Gaussian beams. *Computer Optics* 2021; 45(1): 19-28. doi:10.18287/2412-6179-CO-816.
- [22] Prentice PA, MacDonald MP, Frank TG, Cuschieri A, Spalding GC, Sibbett W, Campbell PA, Dholakia K. Manipulation and filtration of low index particles with holographic Laguerre-Gaussian optical trap arrays. *Opt Express* 2004; 12(4): 593-600. doi:10.1364/OPEX.12.000593.
- [23] Willner AE, Song H, Zou K, Zhou H, Su X. Orbital angular momentum beams for high-capacity communications. *J Lightwave Technol* 2023; 41(7): 1918-1933. doi:10.1109/JLT.2022.3224413.
- [24] Goncharov RK, Kiselev AD, Samsonov EO, Egorov VI. Subcarrier wave continuous-variable quantum key distribution with Gaussian modulation: composable security analysis. *Computer Optics* 2023; 47(3): 374-380. doi:10.18287/2412-6179-CO-1225.
- [25] Lu W, Liu L, Sun J. Influence of temperature and salinity fluctuations on propagation behaviour of partially coherent beams in oceanic turbulence. *J Opt A Pure Appl Opt* 2006; 8(12): 1052-1058. doi:10.1088/1464-4258/8/12/004.
- [26] Fu S, Gao C. Influences of atmospheric turbulence effects on the orbital angular momentum spectra of vortex beams. *Photon Res* 2016; 4(5): B1-B4. doi:10.1364/PRJ.4.000B1.
- [27] Falits AV, Kuskov VV, Banakh VA. Propagation of vortex optical beams through artificial convective turbulence. *J Quant Spectrosc Radiat Transf* 2023; 302: 108568. doi:10.1016/j.jqsrt.2023.108568.
- [28] Wang S, Cheng M, Yang X, Xu J, Yang Y. Self-focusing effect analysis of a perfect optical vortex beam in atmospheric turbulence. *Opt Express* 2023; 31(13): 20861-20871. doi:10.1364/OE.492275.
- [29] Zhu D, Li C, Sun X, Liu Y, Zhang Y, Gao H. The effect of air turbulence on vortex beams in nonlinear propagation. *Sensors* 2023; 23(4): 1772. doi:10.3390/s23041772.
- [30] Lukin VP. Outer scale of turbulence and its influence on fluctuations of optical waves. *Phys Usp* 2021; 64(3): 292-317. doi:10.3367/UFNe.2020.10.038849.
- [31] Lukin VP, Lukin IP. Overview of modern technologies for measuring, predicting and correcting turbulent distortions in optical waves. *Computer Optics* 2024; 48(1): 68-80. doi:10.18287/2412-6179-CO-1355.
- [32] Lukin VP. Prediction of optical wave phase fluctuations in a turbulent atmosphere based on current database. *Russ Phys J* 2024; 67(3): 217-228. doi:10.1007/s11182-024-03112-5.
- [33] Tripathi S, Paxman R, Bifano T, Toussaint KC. Vector transmission matrix for the polarization behavior of light propagation in highly scattering media. *Opt Express* 2012; 20(14): 16067-16076. doi:10.1364/OE.20.016067.
- [34] Schmidt S, Thiele S, Herkommer A, Tünnermann A, Gross H. Rotationally symmetric formulation of the wave propagation method: application to the straylight analysis of diffractive lenses. *Opt Lett* 2017; 42(8): 1612-1615. doi:10.1364/OL.42.001612.
- [35] Poggiolini P, Bosco G, Carena A, Curri V, Jiang Y, Forghieri F. The GN-model of fiber nonlinear propagation and its applications. *J Lightwave Technol* 2014; 32(4): 694-721. doi:10.1109/JLT.2013.2295208.
- [36] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Birth of optical vortices in propagating fields with an original fractional topological charge. *Computer Optics* 2020; 44(4): 493-500. doi:10.18287/2412-6179-CO-715.
- [37] Kotlyar VV, Stafeyev SS. Modeling sharp focus radially-polarized laser mode with conical and binary microaxicons. *Computer Optics* 2009; 33(1): 52-60.
- [38] Lukin VP, Konyaev PA, Sennikov VA. Beam spreading of vortex beams propagating in turbulent atmosphere. *Appl Opt* 2012; 51(1): C84-C87. doi:10.1364/AO.51.000C84.
- [39] Tinin MV. Integral representation of the field of the wave propagating in a medium with large-scale irregularities. *Radiophys Quantum El* 2012; 55(6): 391-398. doi:10.1007/s11141-012-9376-y.
- [40] Banakh VA, Falits AV. Numerical simulation of propagation of laser beams formed by multielement apertures in a turbulent atmosphere under thermal blooming. *Atmos Ocean Opt* 2013; 26(6): 455-465. doi:10.1134/S102485601306002X.
- [41] Konyaev PA, Lukin VP. Computational algorithms for simulations in atmospheric optics. *Appl Opt* 2016; 55(12): B107-B112. doi:10.1364/AO.55.00B107.
- [42] Vasilyev VS, Kapustin AI, Skidanov RV, Podlipnov VV, Ivliev NA, Ganchevskaya SV. Experimental investigation of the stability of Bessel beams in the atmosphere. *Computer Optics* 2019; 43(3): 376-384. doi:10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384.
- [43] Soifer VA, Korotkova O, Khonina SN, Shchepakina EA. Vortex beams in turbulent media: review. *Computer Optics* 2016; 40(5): 605-624. doi:10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [44] Zuev VE, Zemlyanov AA, Kopytin YD, Kuzikovskii AV. High-power laser radiation in atmospheric aerosols. In: *Nonlinear optics of aerodispersed media. Atmospheric and Oceanographic Sciences Library. Vol. 4.* Dordrecht: Springer; 1985. 292 p. doi:10.1007/978-94-009-5219-5.
- [45] Porfirev AP, Kirilenko MS, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium. *Appl Opt* 2017; 56(11): E8-E15. doi:10.1364/AO.56.000E8.
- [46] Khonina SN, Volotovskiy SG, Kirilenko MS. A method of generating a random optical field using the Karhunen-Loeve expansion to simulate atmospheric turbulence. *Computer Optics* 2020; 44(1): 53-59. doi:10.18287/2412-6179-CO-680.
- [47] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Orbital angular momentum and topological charge of a multi-vortex Gaussian beam. *J Opt Soc Am A* 2020; 37(11): 1740-1747. doi:10.1364/JOSAA.401561.
- [48] Goodman JW. *Introduction to Fourier Optics*. 4th ed. Englewood, CO: Roberts and Company Publishers; 2017.
- [49] Iroshnikov NG, Larichev AV, Koryabin AV, Shmalgauzen VI. Express analysis of turbulence parameters. *Moscow Univ Phys Bull* 2009; 64(5): 550-554. doi:10.3103/S0027134909050178.
- [50] Fried DL. Scaling laws for propagation through turbulence. *Atmos Ocean Opt* 1998; 11(11): 982-990.

- [51] Feizulin ZI, Kravtsov YA. Broadening of a laser beam in a turbulent medium. Radiophys Quantum El 1967; 10(1): 33-35. doi:10.1007/BF01038157.
- [52] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A Pure Appl Opt 2004; 6(2): 259-268. doi:10.1088/1464-4258/6/2/018.
-

Сведения об авторах

Шилов Дмитрий Олегович, 2002 года рождения. В 2026 году окончил магистратуру Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва по специальности «Прикладная математика и информатика». E-mail: do.shilov@yandex.ru

Козлова Елена Сергеевна, 1989 года рождения. В 2011 году окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и информатика». Кандидат физико-математических наук с 2014 года. Старший научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Институт систем обработки изображений, НИЦ «Курчатовский институт» и по совместительству доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, численные методы. E-mail: kozlova.elena.s@gmail.com

Поступила в редакцию 26 мая 2025 г. Окончательный вариант – 30 августа 2025 г.

Topological charge of a geometric progression of optical vortices in a turbulent medium

D.O. Shilov^{1,2}, E.S. Kozlova^{1,2}

¹ *Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34;*

² *Image Processing Systems Institute, NRC “Kurchatov Institute”,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151*

Abstract

The paper considers beams in the form of a geometric progression of optical vortices. Numerical modelling of the propagation of such optical fields in turbulent media is conducted using a Fresnel integral. Topological charges of the initial and resulting fields are calculated. As one would expect, an analysis of the obtained results shows that superpositions with a smaller number of beams are more resistant to distortions by strongly turbulent media. It is shown that the stability of the propagation of a superposition of optical vortices in the form of a geometric progression through turbulence is affected not only by the parameters of the medium, but also by the parameters of the geometric progression.

Keywords: optical vortices, topological charge, superposition, geometric progression, turbulence, Fresnel transform, Berry formula.

Citation: Shilov DO, Kozlova ES. Topological charge of a geometric progression of optical vortices in a turbulent medium. *Computer Optics* 2026; 50(3): 1737. DOI: 10.18287/COJ1737.

Acknowledgements: This work was financially supported by the RF Ministry of Science and Higher Education under a government project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (Numerical Simulation) and the Russian Science Foundation under project No. 22-12-00137 (Theoretical analysis).

Author's information

Dmitry Olegovich Shilov ((b. 2002) received Bachelor's degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara National Research University (2024). E-mail: do.shilov@yandex.ru

Elena Sergeevna Kozlova (b. 1989) received Master's degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara State Aerospace University (2011). She received her PhD in 2014. She is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute, NRC “Kurchatov Institute” and Associated Professor of Computer Science department at Samara National Research University. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: kozlova.elena.s@gmail.com

Received May 26, 2025. The final version – August 30, 2025.
