

Применение методов вещественного и функционального анализа к исследованию ортодонтических аномалий через ортогональные проекции трёхмерных моделей

Ю.Ж. Пчелкина¹, А.В. Куприянов¹

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В статье представлен инновационный подход к автоматизированному выявлению зубочелюстных аномалий на основе анализа трёхмерных STL-моделей полости рта, полученных методом интраорального сканирования. Используя методы вещественного и функционального анализа, был разработан алгоритм ортогонального проецирования моделей на анатомические плоскости (фронтальную, сагиттальную, трансверзальную) с учётом их геометрических характеристик. Ключевым элементом метода является расчёт центра масс и тензора инерции, позволяющий автоматически выравнять модели и оценивать симметрию структуры. Показано, что применение матричных преобразований и компенсация проекционных искажений обеспечивают точность визуализации до 0,1 мм. Практическая значимость работы заключается в снижении субъективности диагностики, сокращении времени анализа и минимизации рентгеновского облучения пациентов.

Ключевые слова: трёхмерные STL-модели, интраоральное сканирование, триангуляционная поверхность, ортогональное проецирование на плоскость, тензор инерции.

Цитирование: Пчелкина, Ю.Ж. Применение методов вещественного и функционального анализа к исследованию ортодонтических аномалий через ортогональные проекции трёхмерных моделей / Ю.Ж. Пчелкина, А.В. Куприянов // Компьютерная оптика. – 2026. – Т. 50, № 3. – 2004. – doi: 10.18287/COJ2004.

Citation: Pchelkina YZ, Kupriyanov AV. Application of Real and Functional Analysis Methods to the Study of Orthodontic Anomalies via Orthogonal Projections of Three-Dimensional Models. Computer Optics 2026; 50(3): 2004. doi: 10.18287/COJ2004.

Введение

Цифровая медицина является новым этапом в развитии медицинской науки. При этом анализ данных о распространенности зубочелюстных аномалий среди детей и подростков показывает, что с возрастом увеличивается доля патологических состояний зубочелюстной системы. Возможность раннего обнаружения зубочелюстных аномалий позволит своевременно начать лечение и предотвратить развитие серьезных заболеваний. Для раннего выявления и диагностики аномалий необходимы передовые методы и технологии, позволяющие проводить точный и всесторонний анализ данных.

С каждым годом цифровые технологии все активнее внедряются в практику врачей-стоматологов. Все недостатки предыдущих систем, которые ограничивали их широкое использование, постепенно исправляются компаниями-производителями. Однако большинство фирм производителей поставляют на стоматологический рынок системы закрытого типа, требующие покупки всей линейки продукции для работы. Отсутствует открытая архитектура, позволяющая использовать данные на системах других производителей. Создание унифицированного способа обработки медицинских данных трёхмерных моделей объектов полости рта обеспечит практическую применимость рекомендательной системы независимо от моделей сканеров, установленных в клиниках.

Кроме того, внедрение автоматизированных рекомендательных систем первичной диагностики в ортодонтических и стоматологических клиниках может уменьшить нагрузку на врача и медицинский персонал, сократить время осмотра, облегчить заполнение медицинской документации, снизить степень субъективности в интерпретации результатов, увеличить надежность диагностики, установить наиболее эффективный способ лечения и коррекции зубочелюстной системы, получить предварительное заключение о наличии отклонений и необходимости коррекции зубочелюстной системы без рентгенограмм и лишнего облучения пациента.

1. Постановка задачи

Пусть задана трёхмерная модель объекта полости рта в формате STL, представляющая собой триангуляционную поверхность – замкнутое множество треугольных граней $\{F_i\}_{i=1}^N$, где каждая грань F_i определяется тремя вершинами $A_i(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$, $B_i(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})$, $C_i(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3})$ и единичной нормалью $\vec{n}_i$.

Требуется построить алгоритм, выполняющий следующие операции:

1. Выравнивание модели относительно анатомических плоскостей (фронтальной, сагиттальной, трансверзальной) без участия пользователя – на основе геометрических характеристик самой модели.
2. Ортогональное проецирование выровненной модели на каждую из трёх плоскостей с сохранением метрических свойств (длин и площадей) с точностью до заданного порога.
3. Вычисление индекса симметрии ΔS как количественного критерия для первичного скрининга асимметрий зубочелюстной системы.

Формально задача сводится к нахождению ортогонального преобразования $R \in SO(3)$ такого, что главные оси инерции модели совпадают со стандартными осями координат, и к последующему построению проекций

$$P_{\pi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{x} \mapsto Q\vec{x},$$

где Q – матрица проекции на выбранную плоскость, $\pi \in \{front, horiz, sagit\}$, а метрические искажения компенсируются масштабным коэффициентом $k = 1/\cos\theta$.

2. Обзор существующих методов

Анализ геометрии трёхмерных медицинских моделей традиционно основывается на одном из трёх подходов.

Ручная разметка предполагает ручное определение врачом анатомических ориентиров (краниометрических точек) и их проецирование на стандартные плоскости. Метод применяется в клинической практике повсеместно, однако характеризуется высокой субъективностью (погрешность идентификации ориентиров достигает 1–3 мм), значительными временными затратами и невозможностью повторного анализа [1].

Методы на основе СВСТ (конусно-лучевой компьютерной томографии) обеспечивают высокоточную трёхмерную реконструкцию твёрдых тканей и позволяют количественно оценивать асимметрии. Однако они сопряжены с лучевой нагрузкой на пациента, высокой стоимостью оборудования и необходимостью специализированного программного обеспечения, привязанного к конкретному производителю [2, 3].

Нейросетевые подходы обеспечивают высокую точность сегментации отдельных зубов на 3D-сетках, однако требуют значительных обучающих выборок с размеченными данными, вычислительных ресурсов и не решают задачу стандартизированного выравнивания модели и метрически корректного проецирования на анатомические плоскости [4, 5].

Отдельный класс методов основан на анализе формы через инварианты тензора инерции. Тензор инерции и его собственные значения использовались в качестве компактных дескрипторов формы в задачах распознавания и регистрации трёхмерных объектов. Применение собственных векторов тензора инерции для автоматического выравнивания медицинских моделей – менее изученная область, хотя аналогичные подходы реализованы для задач 3D-поиска и классификации форм. Таким образом, предлагаемый метод заполняет нишу между «тяжёлыми» нейросетевыми решениями и ручными процедурами, предоставляя лёгкий, аналитически обоснованный инструмент первичного скрининга.

3. Восстановление изображений по 3D-моделям

В данной работе под восстановленными изображениями понимаются наиболее информативные с точки зрения ортодонтического анализа проекции трёхмерных моделей объектов полости рта, полученных с применением интраорального сканера.

В ортодонтии пользуются тремя ориентировочными плоскостями, расположенными взаимно перпендикулярно друг к другу и условно пересекающимися голову через определённые ориентиры (рис. 1):

1. Срединная сагиттальная плоскость – это вертикальная (продольная) плоскость, проходящая через середину головы в переднезаднем направлении. Вертикальные плоскости, проходящие не через середину головы, например в области височно-нижнечелюстного сустава, называют парасагиттальными.
2. Фронтальная плоскость – это вертикальная плоскость, проходящая перпендикулярно к сагиттальной.
3. Трансверзальная плоскость – это горизонтальная плоскость, проходящая спереди назад перпендикулярно к сагиттальной и фронтальной плоскостям.

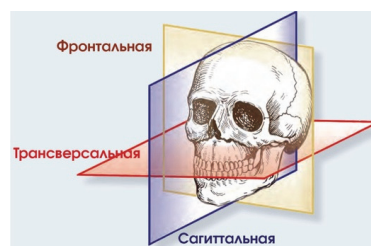


Рис. 1. Ориентировочные плоскости

Относительно той или иной плоскости изучаются и описываются аномалии челюстно-лицевой области в трансверзальном (горизонтальном), сагиттальном и фронтальном (вертикальном) направлениях.

Одним из наиболее популярных форматов хранения трёхмерных моделей объектов при использовании интраоральных сканеров является STL-формат. Этот формат широко используется в стоматологии для создания цифровых моделей зубов и десен, что позволяет изготавливать индивидуальные зубные протезы и ортодонтические конструкции. Преимущества STL-формата включают простоту в обработке, обмене и хранении данных, что делает его очень популярным в области 3D-моделирования. Однако следует учитывать, что STL представляет только геометрическую информацию о поверхностях объектов, не содержащую цвета, текстуры или другие атрибуты, что ограничивает его применение в определенных областях, где требуется больше деталей и свойств материалов.

В математическом смысле STL-формат представляет собой триангуляционную сетку, заданную набором треугольных граней и их нормалей [6, 7, 8]. Каждый треугольник имеет свои координаты вершин и нормали, которые указывают направление его поверхности. Таким образом, модели STL представляют собой нерегулярную триангуляционную сеть, задаваемую набором треугольных граней и их нормалей. Существующие методы анализа трехмерных изображений основаны прежде всего на алгоритмах сегментации трехмерной модели [5, 9, 10]. Однако немаловажным в ортодонтии является анализ проекций модели на интересующие плоскости. Для анализа геометрических особенностей трёхмерной модели и построения её проекций на различные плоскости необходимо рассчитать центр масс и моменты инерции объемного тела [6, 11, 12].

Для непрерывного тела с плотностью $\rho(x, y, z)$ координаты центра масс определяются формулами:

$$x_c = \frac{1}{M} \int_V x \rho dV, y_c = \frac{1}{M} \int_V y \rho dV, z_c = \frac{1}{M} \int_V z \rho dV,$$

где M – это полная масса тела:

$$M = \int_V \rho dV$$

Поскольку STL-формат задаёт только поверхность объекта без информации об объёме, стоит перейти от объёмного интеграла к поверхностному. Триангуляционная поверхность в этом случае рассматривается как совокупность N плоских треугольных фасет. Для каждой фасеты имеются координаты вершин $A_i(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})$, $B_i(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})$, $C_i(x_{i3}, y_{i3}, z_{i3})$ и нормали $\vec{n}_i$, по которым рассчитываются площади фасет S_i и центры масс. Рассматривая каждую фасету как плоскую однородную пластину с единичной плотностью и считая массу фасеты m_i равной её площади S_i , локальный центр масс каждой фасеты $\vec{r}_{ci}$ можно вычислить по координатам вершин треугольника и пересечению его медиан. Тогда центр масс вычисляется как взвешенное среднее центроидов фасет:

$$\vec{R}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{3} \cdot \vec{r}_{ci} \right),$$

где

$$S_i = \frac{1}{2} \|(B_i - A_i) \times (C_i - A_i)\|, \quad \vec{r}_{ci} = \frac{A_i + B_i + C_i}{3}, \quad M = \sum_{i=1}^N S_i$$

Такой подход корректен для однородных тонкостенных объектов, каковыми являются оцифрованные модели полости рта: их стенки имеют пренебрежимо малую толщину по сравнению с характерными размерами, а геометрический центр совпадает с центром масс.

Совмещая координаты центра масс с началом координат и регулируя направление осей, можно получить проекции на нужные плоскости.

При геометрическом анализе и стандартизации проекций трехмерных моделей, что особенно важно для медицинских приложений, ключевую роль играет тензор инерции и анализ его собственных значений как компактных признаков [12, 13, 14].

После переноса центра масс в начало координат необходимо определить ориентацию проекции на плоскость. Для определения главных осей ориентации для триангуляционной поверхности вычисляется тензор инерции относительно центра масс:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},$$

где компоненты вычисляются через суммирование вкладов треугольных граней.

Диагональные компоненты вычисляются как моменты инерции относительно соответствующих осей:

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{3} (y_{i1}^2 + z_{i1}^2 + y_{i2}^2 + z_{i2}^2 + y_{i3}^2 + z_{i3}^2), \\
I_{yy} &= \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{3} (x_{i1}^2 + z_{i1}^2 + x_{i2}^2 + z_{i2}^2 + x_{i3}^2 + z_{i3}^2), \\
I_{zz} &= \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{3} (x_{i1}^2 + y_{i1}^2 + x_{i2}^2 + y_{i2}^2 + x_{i3}^2 + y_{i3}^2).
\end{aligned}$$

Недиагональные компоненты представляют собой произведения инерции:

$$\begin{aligned}
I_{xy} = I_{yx} &= - \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{3} (x_{i1}y_{i1} + x_{i2}y_{i2} + x_{i3}y_{i3}), \\
I_{xz} = I_{zx} &= - \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{3} (x_{i1}z_{i1} + x_{i2}z_{i2} + x_{i3}z_{i3}), \\
I_{yz} = I_{zy} &= - \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{3} (y_{i1}z_{i1} + y_{i2}z_{i2} + y_{i3}z_{i3}).
\end{aligned}$$

Главные оси находятся решением характеристического уравнения:

$$\det(I - \lambda E) = 0.$$

Собственные векторы задают ориентацию осей, вдоль которых модель имеет экстремальные моменты инерции. Определение направления главных осей и дает возможность автоматического выравнивания моделей по анатомическим плоскостям (фронтальной, сагиттальной, трансверсальной).

Наиболее информативной при ортодонтическом анализе STL-моделей будет являться трансверсальная, т.е. горизонтальная проекция. Однако для более детального анализа зубочелюстных аномалий используют и другие проекции. Матрицы ортогонального проецирования на фронтальную, трансверсальную, сагиттальную плоскости соответственно:

$$P_{front} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; P_{horiz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; P_{sagit} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

По недиагональным компонентам тензора инерции также можно произвести расчет индекса симметрии:

$$\Delta S = 1 - \frac{\|I_{xy}\| + \|I_{xz}\| + \|I_{yz}\|}{\|I_{xx}\| + \|I_{yy}\| + \|I_{zz}\|}.$$

Значение индекса симметрии ΔS следует учитывать для выявления односторонних зубочелюстных аномалий и при планировании ортодонтической коррекции [15, 16]. Так, близкие к единице значения индекса симметрии ΔS указывают на симметричность, а ненулевые недиагональные компоненты указывают на асимметрию модели. Нормой считается значение $\Delta S > 0,95$.

При проецировании на наклонные плоскости возникает масштабное искажение. Для того чтобы длины и площади в проекции соответствовали реальным величинам, производится коррекция проекционных искажений, которая сводится к обратному масштабированию в тех направлениях, где произошло сокращение. Координаты вдоль оси наклона корректируются коэффициентом k :

$$k = \frac{1}{\cos \theta},$$

где θ – это угол между нормалью объекта и плоскостью проекции.

Тогда масштабирование проекции происходит по формуле:

$$x_{corr} = x \cdot k, \quad y_{corr} = y \cdot k.$$

Таким образом, может быть реализован следующий алгоритм построения ортогональных проекций STL-модели:

1. Импорт и обработка данных. Нормализация координат.
2. Расчет геометрических характеристик, таких как центр масс, тензор инерции, главные оси.
3. Выравнивание модели:
 - перенос центра масс в начало координат;
 - поворот модели таким образом, чтобы оси совпали с осями, соответствующими необходимой поверхности (фронтальной, сагиттальной или трансверсальной).
4. Построение матриц ортогонального проецирования для соответствующих поверхностей (фронтальной, сагиттальной или трансверсальной).
5. Построение проекций:
 - для каждой вершины применяется матрица проекции;
 - для треугольников сохраняется топология;
 - для наклонных проекций вводится масштабный коэффициент.
6. Визуализация.

4. Результаты

Для верификации предложенного алгоритма была сформирована тестовая выборка из 60 STL-моделей полости рта, полученных в период 2023–2024 гг. в стоматологических клиниках г. Самары с использованием интраоральных сканеров различных производителей (3Shape TRIOS, Medit i700, Planmeca Emerald). Включение моделей в выборку осуществлялось при соблюдении следующих критериев:

- возраст пациентов от 8 до 35 лет;
- наличие полного зубного ряда верхней челюсти (не менее 14 зубов) без значительных протетических конструкций, искажающих геометрию сетки;
- качество STL-файла: замкнутая поверхность без артефактов сканирования (проверка выполнялась автоматически при импорте).

Критерии исключения: наличие несъёмных ортодонтических аппаратов на момент сканирования, выраженные дефекты зубного ряда (потеря более двух зубов), а также модели с числом треугольных граней менее 5×10^4 (недостаточное разрешение сетки).

Модели были разделены на две группы по 30 моделей в каждой: контрольная группа – пациенты без диагностированных ортодонтических аномалий (норма прикуса подтверждена клинически) и клиническая группа – пациенты с подтверждёнными односторонними зубочелюстными аномалиями (одностороннее сужение зубного ряда, перекрёстный прикус). Диагнозы установлены врачом-ортодонтом высшей квалификационной категории на основании клинического осмотра и данных ортопантограммы. Разметка контрольных точек на STL-моделях также выполнена совместно с врачом-ортодонтом. Для оценки метрической точности алгоритма на каждой из 60 моделей были выбраны контрольные точки – анатомические ориентиры (вершины клыков, моляров и срединная точка нёбного шва), идентифицированные врачом-ортодонтом в исходной 3D-модели. Погрешность вычислялась как среднее евклидово расстояние между координатами каждой контрольной точки в исходной модели и соответствующей точкой на восстановленной проекции после применения масштабного коэффициента $k = 1/\cos\theta$:

$$\varepsilon = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \|\mathbf{p}_j - \hat{\mathbf{p}}_j\|,$$

где K – число контрольных точек на модели, $\mathbf{p}_j$ – координаты точки в исходной модели, $\hat{\mathbf{p}}_j$ – координаты соответствующей точки в проекции. Среднее отклонение по всем 60 моделям составило $\varepsilon = 0,08 \pm 0,02$ мм при углах наклона $\theta \leq 30^\circ$, что не превышает заявленного порога 0,1 мм. При углах наклона $\theta > 45^\circ$ погрешность возрастает до $0,18 \pm 0,05$, что ограничивает область применения метода стандартными анатомическими плоскостями, для которых θ не превышает 20° .

Результаты вычисления ΔS по недиагональным компонентам тензора инерции в обеих группах представлены ниже (табл. 1).

Табл. 1. Значения индекса симметрии

Группа	Количество моделей	ΔS , среднее	ΔS , минимум	ΔS , максимум
Контрольная (норма)	30	$0,97 \pm 0,01$	0,95	1,00
Клиническая (аномалии)	30	$0,89 \pm 0,04$	0,78	0,94

Для всех моделей из контрольной группы были получены значения $\Delta S \geq 0,95$, тогда как в клинической группе значения $\Delta S < 0,95$ наблюдались у подавляющего большинства случаев. Это подтверждает состоятельность выбранного порога нормы.

Статистический анализ показал значимые различия между контрольной и клинической группами по значению ΔS (критерий Манна–Уитни, $U = 900$, $p < 0,001$), что подтверждает состоятельность порога нормы $\Delta S > 0,95$.

Повторный запуск алгоритма на тех же STL-файлах давал идентичные результаты (детерминированность обеспечена аналитическим характером метода). Для сравнения: при ручной разметке двумя независимыми специалистами расхождение в идентификации ориентиров составило 1–2 мм, что соответствует типичным данным литературы.

Заключение

Разработан алгоритм расчёта центра масс и тензора инерции триангуляционных поверхностей, позволяющий автоматически выравнивать модели относительно анатомических плоскостей (фронтальной, сагиттальной, трансверсальной).

Введён индекс симметрии (ΔS), количественно характеризующий отклонение от нормы. Значения $\Delta S < 0,95$ служат маркером асимметрии, требующей коррекции.

Реализация предложенных подходов в клинической практике позволит избежать ручного фотопрокола, сократить время диагностики, обеспечить воспроизводимость результатов, повысить точность диагностики, сократить сроки лечения, избежать рентгеновского облучения при первичном скрининге и минимизировать

риски ятрогенных осложнений. Кроме того, предложенный алгоритм дает возможность интеграции с CAD-системами, открывает возможности для 3D-печати индивидуальных ортодонтических конструкций.

Дальнейшие исследования целесообразно направить на создание унифицированных баз данных аномалий с привязкой к геометрическим дескрипторам, что откроет новые возможности для превентивной ортодонтии. Рассматривая перспективы внедрения, можно выделить интеграцию с нейросетевыми алгоритмами для прогнозирования динамики аномалий и разработку открытых стандартов обработки данных, независимых от производителей сканеров.

Благодарности

Исследование выполнено за счет средств государственного задания Самарскому университету (проект FSSS-2024-0014).

References

- [1] Liu B, Liu C, Xiong Y, Zhu H, Zeng W, Chen J, Guo J, Tang W. Accuracy and reliability of 3D cephalometric landmark detection with deep learning. *Eur J Med Res* 2025; 30(1): 1000. doi:10.1186/s40001-025-03198-8.
- [2] Hung KF, Yeung AWK, Wong MCM, Bornstein MM, Leung YY. Comparing standard- and low-dose CBCT in diagnosis and treatment decisions for impacted mandibular third molars: a non-inferiority randomised clinical study. *Clin Oral Investig* 2024; 28(12): 647-658. doi:10.1007/s00784-024-06022-5.
- [3] Savoldi F, Dagassan-Berndt D, Patcas R, Mak WS, Kanavakis G, Verna C, Gu M, Bornstein MM. The use of CBCT in orthodontics with special focus on upper airway analysis in patients with sleep-disordered breathing. *Dentomaxillofac Radiol* 2024; 53(3): twae001. doi:10.1093/dmfr/twae001.
- [4] Alahmari M, Alahmari M, Almuaddi A, Abdelmagyd H, Rao K, Hamdoon Z, Alsaegh M, Chaitanya NCSK, Shetty S. Accuracy of artificial intelligence-based segmentation in maxillofacial structures: a systematic review. *BMC Oral Health* 2025; 25(1): 350. doi:10.1186/s12903-025-05730-y.
- [5] Xi S, Liu Z, Chang J, Wu H, Wang X, Hao A. 3D dental model segmentation with geometrical boundary preserving. In: *Proc IEEE/CVF Conf Comput Vis Pattern Recognit (CVPR)*; 2025. pp. 10476-10485.
- [6] Rakotosaona MJ, Aigerman N, Mitra NJ, Ovsjanikov M, Guerrero P. Differentiable surface triangulation. *ACM Trans Graph* 2021; 40(6): 267. doi:10.1145/3478513.3480554.
- [7] Cabello S, Chan TM, Giannopoulos P. Delaunay triangulations with predictions. *arXiv preprint* 2026; arXiv:2601.08106.
- [8] Chen Y, Yang H, Ye Y, Li J. Generation of 3D finite element mesh of layered geological bodies in intersecting fault zones. *PLoS One* 2024; 19(1): e0293193. doi:10.1371/journal.pone.0293193.
- [9] Liu Y, Yang C, Yu W, Liu X, Chen H, Meng MQH, Yuan Y. STEAM: self-supervised teeth analysis and modeling for point cloud segmentation. In: *Proc Int Conf Med Image Comput Comput Assist Interv (MICCAI)*; 2025. pp. 542-551. doi:10.1007/978-3-032-05114-1_52.
- [10] Jana A, Subhash HM, Metaxas D. 3D tooth mesh segmentation with simplified mesh cell representation. In: *Proc 2023 IEEE 20th Int Symp Biomed Imaging (ISBI)*; 2023. pp. 1-5. doi:10.1109/ISBI53787.2023.10230650.
- [11] Turlapov VE, Gavrilov NI. Tekhnologii trekhmernoi nauchnoi vizualizatsii i geometricheskogo modelirovaniya v tsifrovoy biomeditsine [Technologies of three-dimensional scientific visualization and geometric modeling in digital biomedicine, in Russian]. *Nauchnaya Vizualizatsiya* 2015; 7(4): 27-38. [in Russian].
- [12] Katina S, Vittert L, Bowman AW. Functional data analysis and visualisation of three-dimensional surface shape. *J R Stat Soc Ser C Appl Stat* 2021; 70(3): 691-713. doi:10.1111/rssc.12482.
- [13] Duan C, Liu M. 3D shape descriptor by principal component analysis embedding for non-rigid 3D shape retrieval in a learning framework. In: *Proc 2021 IEEE 10th Data Driven Control and Learning Systems Conf (DDCLS)*; 2021. pp. 49-54. doi:10.1109/DDCLS52934.2021.9455676.
- [14] Tripathi PC, Suvon MN, Schobs L, Zhou S, Alabed S, Swift AJ, Lu H. Tensor-based multimodal learning for prediction of pulmonary arterial wedge pressure from cardiac MRI. In: *Proc Int Conf Med Image Comput Comput Assist Interv (MICCAI)*; 2023. pp. 206-215. doi:10.1007/978-3-031-43990-2_20.
- [15] Cevidanes LH, Alhadidi A, Paniagua B, Styner M, Ludlow J, Mol A, Rossouw PE. Three-dimensional quantification of mandibular asymmetry through cone-beam computerized tomography. *Oral Surg Oral Med Oral Pathol Oral Radiol Endod* 2011; 111(6): 757-770. doi:10.1016/j.tripleo.2011.02.002.
- [16] Kwon SM, Hwang JJ, Jung YH, Cho BH, Lee KJ, Hwang CJ, Choi SH. Similarity index for intuitive assessment of three-dimensional facial asymmetry. *Sci Rep* 2019; 9(1): 10959. doi:10.1038/s41598-019-47477-x.

Сведения об авторах

Пчелкина Юлия Жиганшевна, доцент кафедры прикладной математики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева (Самарский университет). Сфера научных интересов: цифровая обработка медицинских изображений и распознавание образов, машинное обучение, численные методы, вещественный и функциональный анализ. E-mail: pchelkina.yuj@ssau.ru

Куприянов Александр Викторович, 1978 года рождения, в 2004 году защитил диссертацию на соискание степени кандидата технических наук, в 2013 году - доктора технических наук. В настоящее время работает старшим научным сотрудником Института систем обработки изображений РАН, заведующим кафедрой технической кибернетики Самарского университета, а также директором института информатики, математики и электроники Самарского университета. Сфера научных интересов: цифровая обработка сигналов и изображений, распознавание образов и искусственный интеллект, анализ и интерпретация наноизображений, биомедицинская визуализация и анализ. E-mail: akupr@ssau.ru

Поступила в редакцию 25 марта 2026 г. Окончательный вариант – 30 апреля 2026 г.

Application of Real and Functional Analysis Methods to the Study of Orthodontic Anomalies via Orthogonal Projections of Three-Dimensional Models

Yu.Zh. Pchelkina¹, A.V. Kupriyanov¹

¹ Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086, Russia

Abstract

This paper presents an innovative approach to the automated detection of dentoalveolar anomalies based on the analysis of three-dimensional STL models of the oral cavity obtained by intraoral scanning. Using methods of real and functional analysis, an algorithm for orthogonal projection of models onto anatomical planes (frontal, sagittal, transversal) was developed, taking into account their geometric characteristics. The key element of the method is the computation of the center of mass and the inertia tensor, enabling automatic alignment of models and assessment of structural symmetry. It is shown that the application of matrix transformations and compensation of projection distortions ensures visualization accuracy of up to 0.1 mm. The practical significance of the work lies in reducing the subjectivity of diagnosis, decreasing analysis time, and minimizing X-ray exposure of patients.

Keywords: three-dimensional STL models, intraoral scanning, triangulation surface, orthogonal projection onto a plane, inertia tensor.

Citation: Pchelkina YZ, Kupriyanov AV. Application of Real and Functional Analysis Methods to the Study of Orthodontic Anomalies via Orthogonal Projections of Three-Dimensional Models. *Computer Optics* 2026; 50(3): 2004. doi: 10.18287/COJ2004.

Acknowledgements: This work was performed within the State assignment for scientific research to Samara University (project FSSS-2024-0014).

About authors

Yulia Zhigansheva Pchelkina, Associate Professor at the Department of Applied Mathematics, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev (Samara University). Research interests: digital medical image processing and pattern recognition, machine learning, numerical methods, real and functional analysis. E-mail: pchelkina.yuj@ssau.ru

Alexandr Victorovich Kupriyanov, received his Candidate's degree in Technical Sciences in 2004 and Doctor of Engineering Science degree in 2013. Currently, he is a Senior Researcher at the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Head of the Department of Technical Cybernetics at Samara University, and Director of the Institute of Information Technology, Mathematics and Electronics at Samara University. His research interests include digital signal and image processing, pattern recognition and artificial intelligence, nanoscale image analysis and understanding, and biomedical imaging and analysis. E-mail: akupr@ssau.ru

Received March 25, 2026. The final version – April 30, 2026.
