

## ИТЕРАТИВНЫЙ РАСЧЕТ ДООЕ, ФОКУСИРУЮЩИХ В ОБЪЕМ И НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

### Введение

Известны итеративные методы для расчета фазовых дифракционных оптических элементов (ДООЕ), которые фокусируют лазерное излучение в пространственные плоские фигуры (изображения) [1,2]. Для расчета ДООЕ в объемные фигуры, используют разбиение на  $N$  плоскостей и сведение задачи к расчету ДООЕ, формирующего плоские изображения. В [3,4] предложены различные подходы. В [3] независимо рассчитываются комплексные амплитуды  $f_n(x,y)$ , преобразование Френеля которых связано с заданным распределением интенсивности  $I_n(\xi,\eta)$  на плоскостях  $z=z_n$  (см. рис.1) уравнением

$$I_n(\xi, \eta) = |\mathfrak{F}_n\{f_n(x, y)\}|^2 \quad (1)$$

где  $\mathfrak{F}_n\{\cdot\}$  – преобразование Френеля на плоскость  $z=z_n$ .

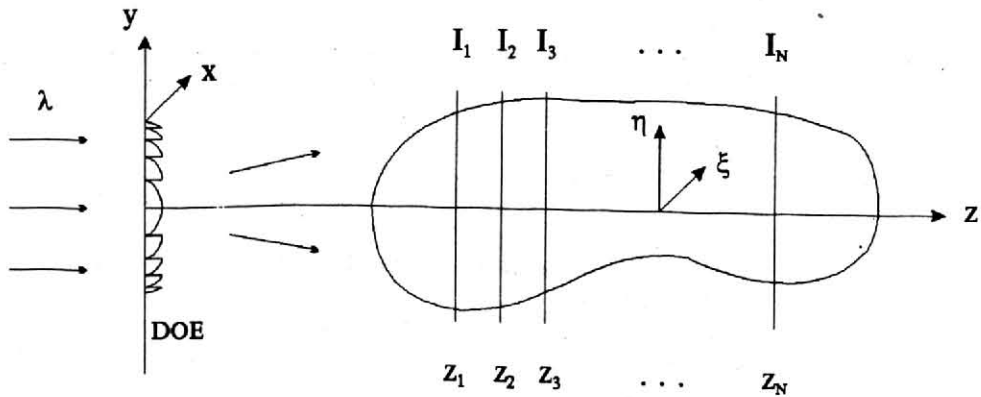


Рис.1 Оптическая схема для фокусировки с помощью ДООЕ в 3-х мерную область.

Результирующая функция пропускания ДООЕ равна арифметическому среднему:

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f_n(x, y) \quad (2)$$

Далее для замены амплитудно-фазовой функции  $f(x,y)$  на только фазовую функцию используют обычные процедуры кодирования в цифровой голографии [5].

В работе [4] функции  $f_n(x,y)$  рассчитываются взаимосвязанно, а не независимо, что позволяет в ходе итеративного процесса получить только фазовую функцию без дополнительных (малоэффективных) процедур кодирования.

В [6] рассматривалась в приближении геометрической оптики задача расчета ДООЕ, фокусирующего на поверхность вращения с осью  $z$ .

В данной работе используя иной подход, рассматриваются итеративные методы расчета фазовых ДООЕ, фокусирующих лазерное излучение в объем и на поверхность тел вращения.

# 1. Общее рассмотрение.

Оптическая схема на рис.1 показывает, что ДОЕ, который рассматривается как тонкий фазовый транспарант, освещается плоской волной света с длиной волны  $\lambda=2\pi/k$ ,  $k$  – волновое число, и формирует на расстояниях вдоль оптической оси  $z_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , заданные распределения интенсивности  $I_n(\xi, \eta)$ .

Рассмотрение проводится в рамках скалярной волновой теории дифракции Кирхгофа в приближении Френеля.

В [4] описан алгоритм расчета функции пропускания ДОЕ с помощью итеративной процедуры минимизирующей функционал

$$M = \sum_{n=1}^N \iint_{-\infty}^{\infty} [F(\xi, \eta, z_n) - A_n(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta \quad (3)$$

где

$$A_n(\xi, \eta) = \sqrt{I_n(\xi, \eta)}, \quad n = \overline{1, N}$$

$$F(\xi, \eta, z_n) = \mathfrak{F}_n \{ e^{iT(x,y)} \} = \frac{k}{z_n} \iint_{\Omega} \exp \left[ iT(x,y) + \frac{ik}{2z_n} [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] \right] dx dy \quad (4)$$

где  $T(x,y)$  искомая фаза ДОЕ, который формирует световое поле с комплексной амплитудой  $F(\xi, \eta, z)$ , модуль которой совпадает на заданных расстояниях  $z_n$  с требуемой амплитудой  $A_n(\xi, \eta, z_n)$ ,  $\Omega$  – форма апертуры ДОЕ.

Итеративный алгоритм, минимизирующий средне квадратичное отклонение (3), имеет вид:

$$T_p(x,y) = \arg \left[ \sum_{n=1}^N U_n^{(p)}(x,y) \right] \quad (5)$$

$$U_n^{(p)}(x,y) = \mathfrak{F}_n^{-1} \left\{ A_n(\xi, \eta) \exp[iQ_{n,p}(\xi, \eta)] \right\} \quad (6)$$

$$Q_{n,p}(\xi, \eta) = \arg \left\{ \mathfrak{F}_n \left\{ \exp[iT_{p-1}(x,y)] \right\} \right\} \quad (7)$$

где  $p$  – номер итерации,  $Q_{n,p}(\xi, \eta)$  – фаза светового поля на плоскости, отстоящей от ДОЕ на расстоянии  $z_n$  и рассчитанная на  $p$ -ой итерации.

Ниже рассматриваются различные варианты итеративного алгоритма минимизирующего функционал средне квадратичного отклонения вида

$$M_1 = \iint_{\Omega} \left| e^{iT(x,y)} - \sum_{n=1}^N C_n U_n(x,y) \right|^2 dx dy \quad (8)$$

где  $C_n$  – комплекснозначные весовые множители.

Функционал (3), записанный в плоскостях, отстоящих от ДОЕ на расстояниях  $z_n$ , можно с помощью равенства Парсеваля записать в плоскости ДОЕ:

$$M = \sum_{n=1}^N \iint_{\Omega} |e^{iT(x,y)} - U_n(x,y)|^2 dx dy \quad (9)$$

Функции  $U_n(x,y)$  в уравнениях (8) и (9) являются результатом вычисления обратного преобразования Френеля:

$$U_n(x, y) = \mathfrak{T}_n^{-1}\{A_n(\xi, \eta)\} \quad (10)$$

$$F_n(\xi, \eta) = A_n(\xi, \eta) \exp[iQ_n(\xi, \eta)] \quad (11)$$

Если переписать функционал (9) в обобщенной форме с весовыми коэффициентами

$$\hat{M} = \sum_{n=1}^N \iint_{\Omega} |e^{iT(x,y)} - C_n U_n(x, y)|^2 dx dy \quad (12)$$

то нетрудно получить уравнение, связывающее значения обоих функционалов

$$M_1 = \hat{M} + \sum_{m \neq n}^N \sum_{n=1}^N C_m C_n^* \iint_{\Omega} U_n(x, y) U_m^*(x, y) dx dy - (N-1) \cdot W_0 \quad (13)$$

где

$$W_0 = \iint_{\Omega} |e^{iT(x,y)}|^2 dx dy \quad (14)$$

— полная световая энергия в плоскости ДОЕ.

Из уравнения (13) видно, что функционалы  $M_1$  и  $\hat{M}$  равны с точностью до несущественной постоянной  $(N-1) \cdot W_0$  при ортогональности функций  $U_n(x, y)$ , то есть при выполнении условия:

$$\iint_{\Omega} U_n(x, y) U_m^*(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\xi, \eta) F_m^*(\xi, \eta) d\xi d\eta = W_0 \delta_{mn} \quad (15)$$

где  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера. Функционал общего вида (8) имеет произвол в выборе функций  $Q_n(\xi, \eta)$ .

Условие ортогональности (14) можно удовлетворить, задавая амплитудные функции на плоскостях фокусировки в зоне дифракции Френеля  $A_n(\xi, \eta)$  с пространственно разделенными носителями, то есть области  $G_n$ , в которых амплитуды  $A_n(\xi, \eta)$  отличны от нуля, не пересекаются между собой:

$$G_n \cap G_m = \emptyset, \quad m, n = \overline{1, N} \quad (16)$$

Такое условие реализуется при расчете разовых ДОЕ, формирующих моды Гаусса–Эрмита или Гаусса–Лагерра в различных порядках дифракции [7,8].

Условию (15) можно также удовлетворить, разделив апертуру ДОЕ  $\Omega$  на  $N$  непересекающихся субапертур  $\Omega_n$ , в каждой из которых задается функция  $U_n(x, y)$ :

$$\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset, \quad m, n = \overline{1, N} \quad (17)$$

Разбиение апертуры ДОЕ, например, на кольцевые субапертуры применяется при расчетах аксиконов и формирователей бесселевых мод [9], а также при использовании метода конечных элементов для расчета ДОЕ [10].

Минимизация функционала (8) эквивалентна поиску коэффициентов  $C_n$ , обеспечивающих выполнение следующего равенства

$$e^{iT(x,y)} = \sum_{n=1}^N C_n U_n(x, y) \quad (18)$$

где функции  $U_n(x, y)$  определяются уравнениями (10), (11) и в общем случае неортогональные. Уравнение (18) можно рассматривать как двумерную проекцию трехмерной задачи:

$$e^{iT(x, y, z)} = \sum_{n=1}^N C_n U_n(x, y) \psi_n(z) \quad (19)$$

где функции  $\psi_n(z)$  ортогональны:

$$\int_0^1 \psi_n(z) \psi_m^*(z) dz = \delta_{mn} \quad (20)$$

Если, например, функции (20) выбрать в виде

$$\psi_n(z) = \exp[i2\pi n z] \quad (21)$$

то коэффициенты суммы (19) вычисляются с помощью соотношений:

$$C_n = W_0^{-1} \iint_{\Omega} L_n(x, y) U_n^*(x, y) dx dy \quad (22)$$

$$L_n(x, y) = \int_0^1 \exp[iT(x, y, z) - i2\pi n z] dz \quad (23)$$

С учетом уравнений (18)–(23) получим итеративный алгоритм минимизации функционала (8):

$$T_p(x, y, z) = \arg \left[ \sum_{n=1}^N B_n e^{iD_{n,p}} U_n(x, y) e^{i2\pi n z} \right] \quad (24)$$

$$D_{n,p} = \arg \left[ \iint_{\Omega} L_{n,p}(x, y) U_n^*(x, y) dx dy \right] \quad (25)$$

$$L_{n,p}(x, y) = \int_0^1 \exp[iT_{p-1}(x, y, z) - i2\pi n z] dz \quad (26)$$

где  $B_n \geq 0$  – произвольные положительные числа,  $p$  – номер итерации. Искомая фазовая функция ДОЕ получается как проекция на ось  $z=0$ :

$$T_p(x, y) = T_p(x, y, z=0) \quad (27)$$

Сходимость в среднем алгоритма (24)–(26) показана в Приложении.

## 2. Фокусировка в радиально-симметричную область.

На рис.2 показана оптическая схема для расчета ДОЕ, фокусирующего излучение на ряд плоскостей, являющихся круглыми сечениями тела вращения. При этом амплитуда  $A_n(\xi, \eta)$  на каждой из плоскостей зависит в полярных координатах  $\xi = \rho \cdot \cos\theta$ ,  $\eta = \rho \cdot \sin\theta$  только от радиальной переменной  $\rho$ :  $A_n(\rho)$ .

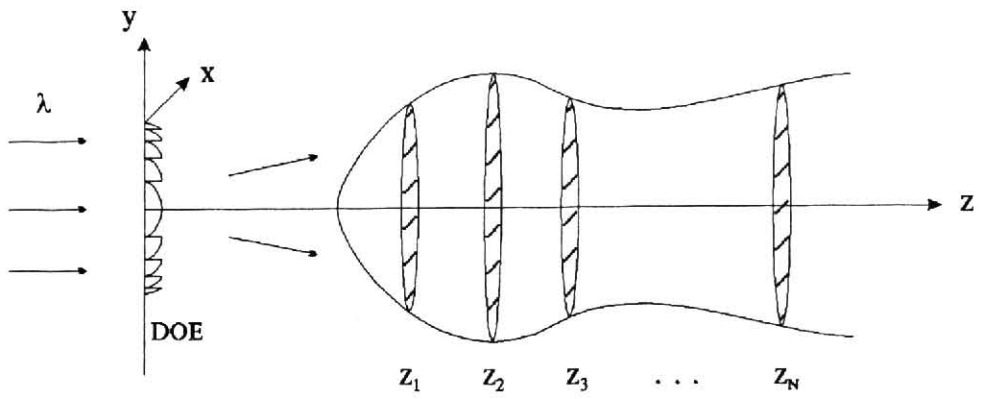


Рис.2 Оптическая схема для фокусировки с помощью ДОО в тело вращения.

Тогда вместо уравнений (19) и (22) в данном случае можно записать:

$$e^{iT(r,\varphi)} = \sum_{n=1}^N C_n U_n(r) e^{i\varphi} \quad (28)$$

$$C_n = (2\pi W_0)^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{iT(r,\varphi)} U_n^*(r) e^{i\varphi} r dr d\varphi \quad (29)$$

$$U_n(r) = \mathfrak{F}_n^{-1} \left\{ A_n(\rho) e^{iQ_n(\rho)} \right\} = \frac{k}{z_n} \exp \left[ -i \frac{kr^2}{z_n} \right] \int_0^\infty A_n(\rho) \exp \left[ iQ_n(\rho) - i \frac{k\rho^2}{2z_n} \right] J_0 \left( \frac{k\rho r}{z_n} \right) \rho d\rho \quad (30)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты в плоскости ДОО,  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка. Уравнение (30) является обратным преобразованием Фурье в полярных координатах.

Если интенсивность внутри сечений тела вращения постоянная, то амплитуду  $A_n(\rho)$  можно выбрать в виде

$$A_n(\rho) = \sqrt{I_n} \text{circ} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (31)$$

где

$$\text{circ} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \begin{cases} 1, & \rho \leq \rho_0 \\ 0, & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (32)$$

и  $I_n$  – постоянные значения интенсивности в круге на каждой плоскости.

Произвольные фазы  $Q_n(\rho)$  в уравнении (30) можно выбрать квадратичными:

$$Q_n(\rho) = \frac{k\rho^2}{2z_n} \quad (33)$$

а постоянные интенсивности  $I_n$  выбираются из условия сохранения энергии

$$\pi \rho_0^2 I_n = W_0, \quad n = \overline{1, N} \quad (34)$$

Подставив выражения (31)–(33) в уравнение (30), получим конкретный вид функций разложения:

$$U_n(r) = 2\pi\rho_n\sqrt{I_n}r^{-1}J_1\left(\frac{kr\rho_n}{z_n}\right)\exp\left[-i\frac{kr^2}{2z_n}\right], \quad (35)$$

где  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого порядка.

Искомую функцию фазы ДОЕ  $T(r,\varphi)$ , фокусирующего в набор кругов с постоянными интенсивностями, с заданными радиусами и расположенных вдоль оптической оси на требуемых расстояниях  $z_n$ , можно искать в виде суммы с неполностью определенными коэффициентами:

$$e^{iT(r,\varphi)} = r^{-1} \sum_{n=1}^N C_n J_1(\alpha_n r) \exp[-i\beta_n r^2 + in\varphi], \quad (36)$$

где  $C_n$  – постоянные, модуль которых задается с учетом выбора интенсивностей  $I_n$ , а фаза является свободным параметром,

$$\alpha_n = \frac{k\rho_n}{z_n}, \quad \beta_n = \frac{k}{2z_n}.$$

Из уравнения (36) следует выражение для расчета коэффициентов:

$$C_n = W^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{iT(r,\varphi)} J_1(\alpha_n r) \exp[-i\beta_n r^2 - in\varphi] \cdot r^2 dr d\varphi \quad (37)$$

$$W = 2\pi \int_0^R J_1^2(\alpha_n r) \cdot r dr. \quad (38)$$

Уравнения (36)–(38) позволяют получить итеративный алгоритм расчета функции фазы ДОЕ, аналогичный алгоритму (24)–(26).

### 3. Фокусировка в набор осевых точек.

Нетрудно получить разложение аналогичное (36) для расчета много фокусных дифракционных линз, которые формируют вдоль оптической оси  $z$  заданное число фокусов на требуемых расстояниях и с заданной интенсивностью. Другие подходы к расчету ДОЕ типа многофокусных линз рассмотрены в [11,12].

В данном случае вместо уравнения (31) для фокусировки в набор кругов следует использовать уравнение для фокусировки в набор дельта-импульсов:

$$A_n(\rho) = \sqrt{I_n} \delta(\rho) \quad (39)$$

Тогда вместо уравнений (35) и (36) получим, соответственно:

$$U_n(r) = \frac{k}{z_n} \sqrt{I_n} \exp\left[-i\frac{kr^2}{2z_n}\right] \quad (40)$$

$$e^{iT(r,\varphi)} = \sum_{n=1}^N C_n \exp[-i\beta_n r^2 + in\varphi], \quad \beta_n = \frac{k}{2z_n} \quad (41)$$

Вместо уравнения (37) коэффициенты суммы (41) вычисляются по формулам

$$C_n = (\pi R^2)^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{iT(r,\varphi)} \exp\left[-i \frac{kr^2}{2z_n} - in\varphi\right] \cdot r \, dr \, d\varphi \quad (42)$$

Из уравнения (42) видно, что коэффициенты  $C_n$  вычисляются с помощью двумерного преобразования Фурье.

Заметим, что вместо суммы (41) для итеративного расчета многофокусных линз можно использовать более простое только радиальное уравнение

$$e^{iT(r)} = \sum_{n=1}^N C_n \exp[-i\beta_n r^2] \quad (43)$$

Но гауссовы экспоненты в уравнении (43) будут ортогональны только при условии:

$$\int_0^R \exp[-i(\beta_m - \beta_n)r^2] \cdot r \, dr = \delta_{mn} \quad (44)$$

которое выполняется при

$$z_n = n^{-1} z_0, \quad z_0 = \frac{R^2}{2\lambda} \quad (45)$$

Из (45) следует, что разложением (43) удобно пользоваться для вычисления фазы ДОЕ, если требуемые фокусы расположены только на определенных расстояниях  $z_n$ .

#### 4. Фокусировка на поверхность вращения.

Расчет ДОЕ, фокусирующих лазерное излучение на поверхность тела вращения, ось которого совпадает с оптической осью, был осуществлен методом геометрической оптики в [6].

Ниже рассматривается дифракционный итеративный алгоритм. Если тело вращения с осью  $z$  представить как набор его поперечных сечений, то его поверхность аппроксимируется набором колец. Поэтому для расчета ДОЕ, формирующего набор световых колец с заданными радиусами  $\rho_n$  и расположенных на требуемых расстояниях  $z_n$ , можно получить уравнение, аналогичное уравнению (36). Для этого вместо выражения (31) для требуемой амплитуды на  $n$ -ой плоскости запишем:

$$A_n(\rho, \psi) = \sqrt{I_n} \cdot \delta(\rho - \rho_n) \cdot e^{in\psi} \quad (46)$$

Подставив выражение (46) в уравнение (30), получим вместо соотношения (35) следующее выражение для комплексной амплитуды в плоскости ДОЕ:

$$U_n(r, \varphi) = \frac{(-i)^n}{z_n} \sqrt{I_n} J_n\left(\frac{kr\rho_n}{z_n}\right) \exp\left[-i \frac{k}{2z_n} (r^2 + \rho_n^2) + in\varphi\right] \quad (47)$$

Объединяя под знаком постоянной  $C_n$  сомножители в уравнении (47), которые не зависят от переменных  $r$  и  $\varphi$ , получим вместо уравнения (36), следующее уравнение

$$e^{iT(r,\varphi)} = \sum_{n=1}^N C_n J_n(\alpha_n r) \exp[-i\beta_n r^2 + in\varphi] \quad (48)$$

коэффициенты которого находятся по формулам, аналогичным (38) и (39):

$$C_n = W_n^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{iT(r,\varphi)} J_n(\alpha_n r) \exp[i\beta_n r^2 - in\varphi] \cdot r \, dr \, d\varphi \quad (49)$$

$$W_n = 2\pi \int_0^R J_n^2(\alpha_n r) \cdot r \, dr$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка.

С целью ускорения расчетов вместо разложения (48) можно использовать на практике следующее уравнение

$$e^{iT(r)} = \sum_{n=1}^N C_n J_0(\alpha_n r) \exp[-i\beta_n r^2] \quad (50)$$

Однако при этом слагаемые в уравнении (50) в общем случае не ортогональны между собой. Чтобы найти условие, которое надо наложить на параметры  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  для достижения ортогональности слагаемых в уравнении (50), можно использовать следующий справочный интеграл [13]:

$$\int_0^{\infty} e^{iax^2} J_\nu(bx) J_\nu(cx) x \, dx = \frac{i}{2a} J_\nu\left(\frac{bc}{2a}\right) e^{ih}, \quad h = \frac{b^2 + c^2}{4a} - \frac{\nu\pi}{2} \quad (51)$$

Для функций, входящих в уравнение (50), вместо (51) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} J_1(\alpha_n r) J_1(\alpha_m r) \exp[-i(\beta_n - \beta_m)r^2] r \, dr = \\ & = (\beta_n - \beta_m)^{-1} J_1\left(\frac{\alpha_n \alpha_m}{2(\beta_n - \beta_m)}\right) \exp\left[-i \frac{\alpha_n^2 + \alpha_m^2}{4(\beta_n - \beta_m)}\right], \quad \beta_n > \beta_m \end{aligned} \quad (52)$$

Из уравнения (52) следует, что при удовлетворении параметров  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  условию

$$\frac{\alpha_n \alpha_m}{2(\beta_n - \beta_m)} = \gamma_p; \quad n, m = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, N^2} \quad (53)$$

где  $\gamma_p$  – корни функции Бесселя:  $J_1(\gamma_p) = 0$ , слагаемые в сумме (50) будут ортогональны и коэффициенты можно рассчитывать по формулам:

$$C_n = W_n^{-1} \int_0^R e^{iT(r)} J_0(\alpha_n r) \exp[i\beta_n r^2] \cdot r \, dr \quad (54)$$

$$W_n = 2\pi \int_0^R J_0^2(\alpha_n r) \cdot r \, dr \quad (55)$$



Условие (53) ограничивает выбор значений расстояний  $z_n$  и радиусов колец  $\rho_n$ . Однако, как показал численный эксперимент, можно получить хорошие результаты, считая слагаемые в уравнении (50) ортогональными и используя для расчета коэффициентов формулу (54).

#### 4.1. Численные результаты.

Численные результаты, приведенные ниже, относятся к случаю фокусировки на поверхность вращения. Фаза ДОЕ при этом рассчитывается с помощью итеративного алгоритма, основанного на уравнениях (50) и (54). Расчетные параметры:  $R=1$  мм – радиус ДОЕ,  $k=10^4$  мм<sup>-1</sup>,  $n=256$  – число отсчетов по радиальной переменной.

Коническая поверхность описывалась уравнением

$$\rho_n = \alpha(z_n - z_0) + \rho_0 \quad (56)$$

где  $\alpha = \pm 5 \times 10^{-3}$ ,  $z_0 = 100$  мм,  $\Delta z = 5$  мм – расстояние между плоскостями сечениями конуса,  $n = \overline{1, 10}$ . На рис.3 показана полутонкая по уровню  $2\pi$  фаза ДОЕ (а) и ее радиальное сечение (б), рассчитанные за 10 итераций алгоритмом на основе уравнений (50), (54).

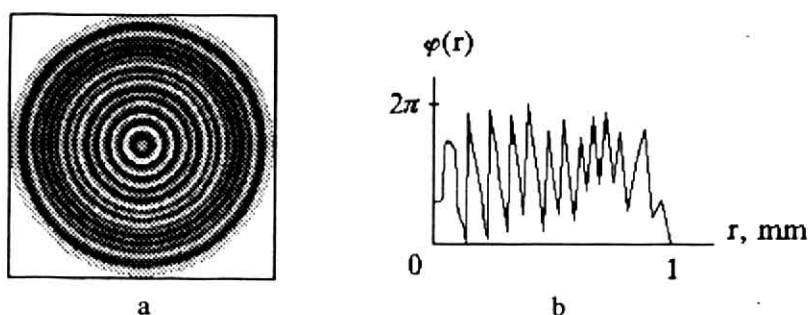


Рис.3 Фаза (а) и ее радиальное сечение (б) для ДОЕ, фокусирующего на поверхность расходящегося конуса.

На рис.4 показаны распределения интенсивности (верхняя строка) и их сечения (нижняя строка), сформированные ДОЕ с фазой, показанной на рис.3, и рассчитанные на разных плоскостях вдоль оси  $z$  в диапазоне [100 мм, 150 мм] с шагом 10 мм ( $z$  растет слева направо).

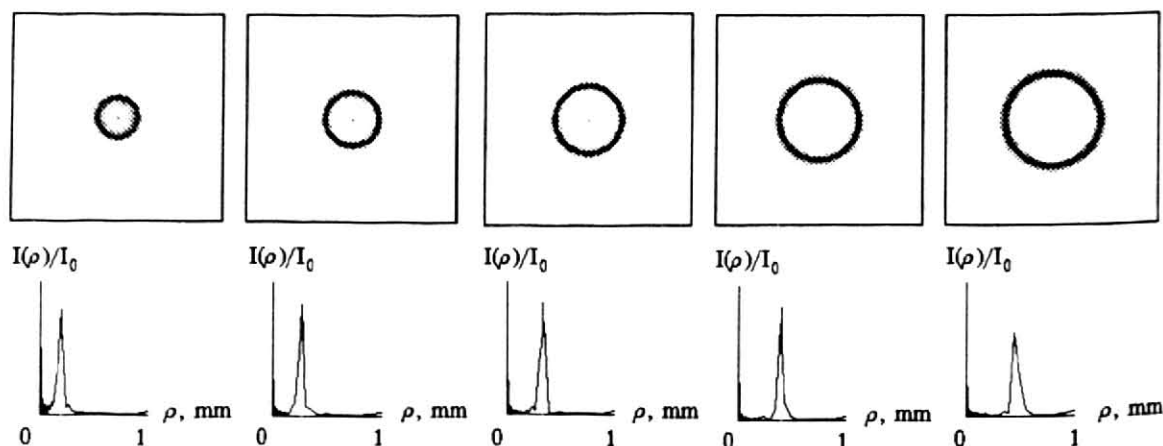


Рис.4 Распределения интенсивности (верхняя строка) и ее радиальное сечение (нижняя строка), сформированные ДОЕ с фазой, показанной на рис.3.

На рис.5 показана зависимость нормированной интенсивности на поверхности конуса (рис.4,  $\alpha > 0$ ) вдоль оси  $z$ : кривая 1 – заданное распределение интенсивности, кривая 2 – рассчитанная.

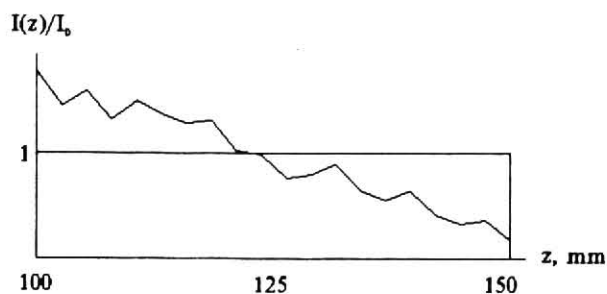


Рис.5 Распределение относительной интенсивности на поверхности расходящегося конуса.

На рисунках 6–8 представлены аналогичные расчетные результаты для фокусировки на поверхность конуса, но при  $\alpha < 0$ . На рис.6 показана фаза ДОЕ (а) и ее сечение (б), полученное за 7 итераций по методу (50), (54).

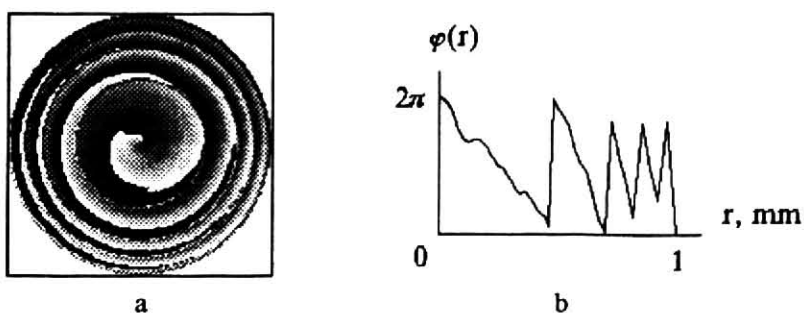


Рис.6 Фаза (а) и ее радиальное сечение (б) для ДОЕ, фокусирующего на поверхность сходящегося конуса.

На рис.7 показаны распределения интенсивности (верхняя строка) и их сечения (нижняя строка), рассчитанные при тех же значениях  $z_n$ , что и на рис.4.

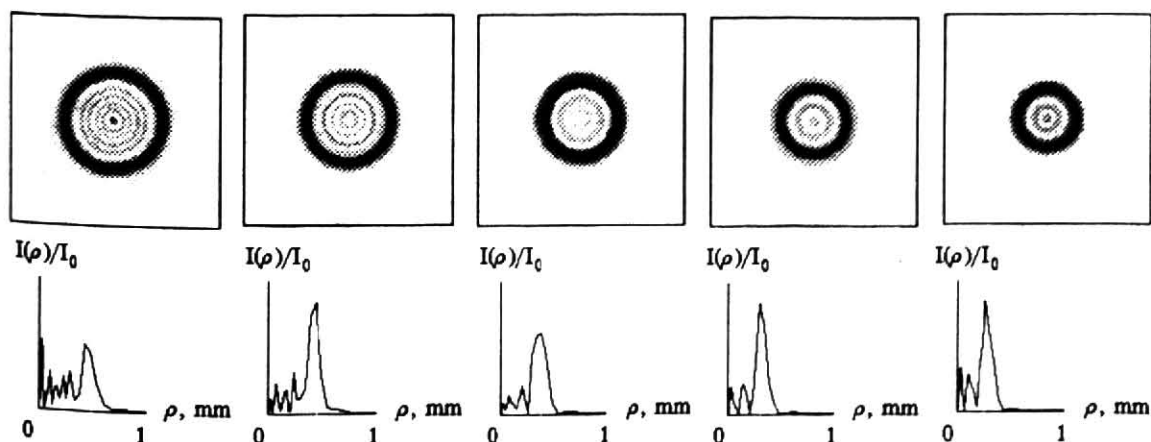


Рис.7 Распределения интенсивности (верхняя строка) и ее радиальное сечение (нижняя строка), сформированные ДОЕ с фазой, показанной на рис.6.

На рис.8 представлен график зависимости интенсивности на поверхности конуса (рис.7,  $\alpha < 0$ ) вдоль оси  $z$ : кривая 1 – заданное распределение, кривая 2 – рассчитанное.

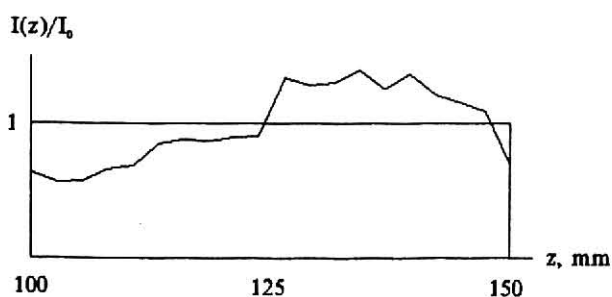


Рис.8 Распределение относительной интенсивности на поверхности сходящегося конуса.

На рисунках 9–11 приведены результаты численного эксперимента для фокусировки в цилиндр радиусом  $\rho_0 = 0.5$  мм. На рис.9 показана фаза ДОЕ (а) и ее сечение (б), рассчитанные за 10 итераций по формулам (50) и (54) при  $\alpha = 0$ .

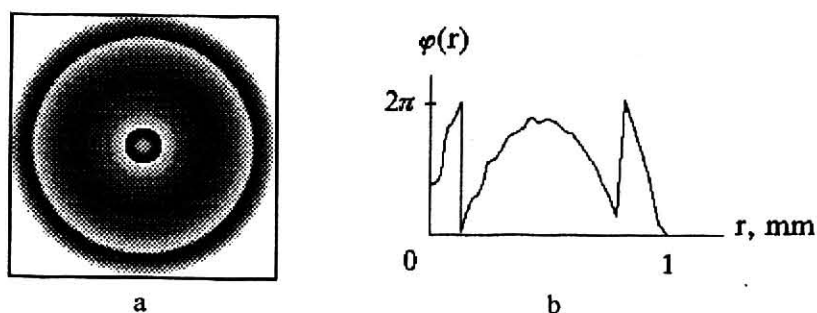


Рис.9 Фаза (а) и ее радиальное сечение (б) для ДОЕ, фокусирующего на поверхность цилиндра.

На рис.10 даны распределения интенсивности и их сечения, рассчитанные на тех же плоскостях, что и для рисунков 4 и 7. Расчет проводился с помощью интегрального преобразования Френеля, которое, в свою очередь, рассчитывалось с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

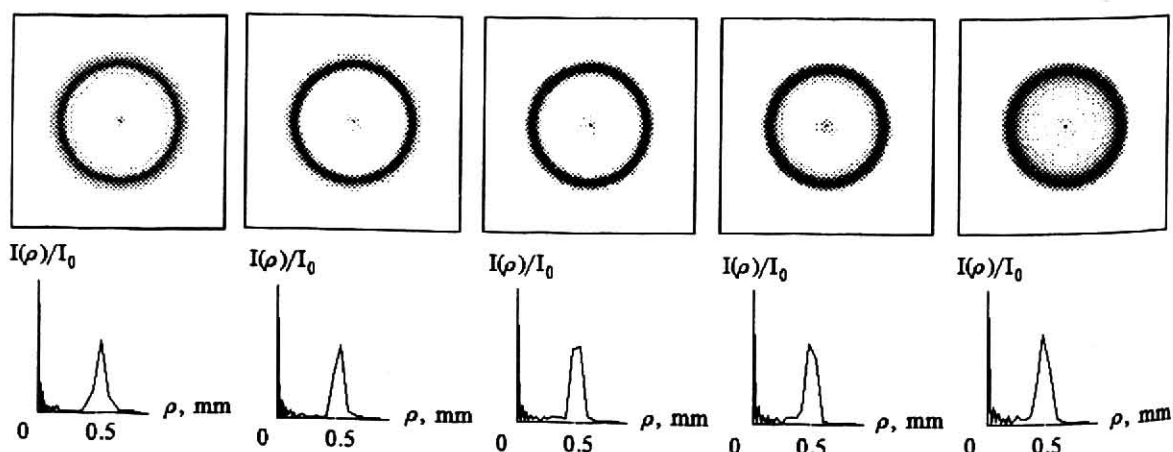


Рис.10 Распределения интенсивности (верхняя строка) и ее радиальное сечение (нижняя строка), сформированные ДОЕ с фазой, показанной на рис.9.

На рис.11 показан график зависимости относительной интенсивности света на поверхности цилиндра от расстояния  $z$  до оптического элемента.

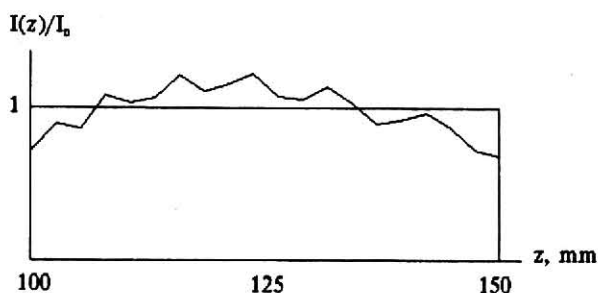


Рис.11 Распределение относительной интенсивности на поверхности цилиндра.

Приведенные результаты показывают возможность использования предложенных итеративных алгоритмов для расчета фазовых оптических элементов, фокусирующих лазерное излучение на поверхности тел вращения.

#### Л и т е р а т у р а .

- [1] P.M.Hirsch, J.A.Jordan, L.B.Lesem. Method of marking an object dependent diffuser. Patent U.S. 3619022 (1971)
- [2] R.W.Gerchberg, W.D.Saxton. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. Optik 35(2) 237–246 (1972)
- [3] D.Leseberg. Computer-generated three-dimensional image holograms. Appl. Opt. 31(2) 223–229 (1992)
- [4] М.А.Воронцов, А.В.Корябин, В.И.Шмальгаузен. Управляемые оптические системы, М., Наука, 1988.
- [5] O.Bryngdahl, F.Wyrowski. Digital holography— Computer generated holograms. Progress in Optics. Ed.by E.Wolf, v.28, pp.3–86 (1990)
- [6] Л.Д.Досколович, Н.Л.Казанский, И.Н.Сисакян, В.А.Сойфер, С.И.Харитонов. Фокусировка лазерного излучения на трехмерную поверхность вращения. Компьютерная оптика, М., МЦНТИ, вып.12, 8–14 (1992)
- [7] V.V.Kotlyar, I.V.Nikolsky, V.A.Soifer. An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes. Optik 98(1) 26–30 (1994)
- [8] N.L.Kazanskiy, V.V.Kotlyar, V.A.Soifer. Computer-aided design of diffractive optical elements. Opt. Eng. 33(10) 3156–3166 (1994)
- [9] В.В.Котляр, С.Н.Хонина. Формирователи бесселевых мод. Материалы 5 международного совещания по обработке изображений и компьютерной оптике, Самара, СГАУ, сс. 41–42 (1994)
- [10] М.А.Голуб, Л.Л.Досколович, Н.Л.Казанский, И.Н.Сисакян, В.А.Сойфер, С.И.Харитонов. Метод согласованных прямоугольников для расчета фокусаторов в плоскую область. Компьютерная оптика, М., МЦНТИ, вып.10–11, сс. 100–110 (1992)
- [11] М.А. Golub, L.L.Doskolovich, N.L.Kazansky, S.I.Kharitonov, V.A.Soifer. Computer generated diffractive multi-focal lens. J.Mod.Opt. 39(6) 1245–1251 (1992)
- [12] S.N.Khonina, V.V.Kotlyar, V.A.Soifer. Diffraction computation of focusator into a longitudinal segment and multifocal lens. Proceeding SPIE, v.1780, pp.263–272 (1993)
- [13] А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. Интегралы и ряды. Специальные функции, М., Наука, 1983.

Приведем доказательство сходимости в среднем итеративного алгоритма типа (24)–(26), но в одномерном случае для простоты. При этом пусть функции разложения  $U_n(x)$  являются ортонормированным базисом:

$$\int_{-a}^a U_n(x) \cdot U_m^*(x) dx = \delta_{mn} \quad (\text{П1})$$

Введем обозначения:

$$A_{p+1}(x) e^{iT_{p+1}(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{iD_{n,p}} U_n(x) \quad (\text{П2})$$

$$A_0(x) e^{iT_p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{n,p}| e^{iD_{n,p}} U_n(x) \quad (\text{П3})$$

где  $A_0(x)$  – амплитуда освещающего ДОО пучка света,  $A_p(x)$  и  $T_p(x)$  – амплитуда и фаза светового поля в плоскости ДОО, рассчитанные на  $p$ -ом шаге итераций,  $B_n$  – произвольно заданные неотрицательные числа,  $|C_{n,p}|$  и  $D_{n,p}$  – модуль и фаза  $n$ -го коэффициента в разложении (18), рассчитанные на  $p$ -ом шаге итераций по формулам:

$$C_{n,p} = \int_{-a}^a A_0(x) e^{iT_p(x)} U_n^*(x) dx \quad (\text{П4})$$

где  $[-a, a]$  – линейный размер ДОО.

Исходя из равенств Парсеваля

$$\int_{-a}^a A_0^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{n,p}|^2, \quad \int_{-a}^a A_p^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^2 \quad (\text{П5})$$

и из неравенства треугольника для любых комплексных чисел  $Z$  и  $W$ :

$$|Z| - |W| \leq |Z - W| \quad (\text{П6})$$

нетрудно убедиться в справедливости следующей цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left| |C_{n,p+1}| - B_n \right|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| |C_{n,p+1}| e^{iD_{n,p+1}} - B_n e^{iD_{n,p+1}} \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| |C_{n,p+1}| e^{iD_{n,p+1}} - B_n e^{iD_{n,p}} \right|^2 = \int_{-a}^a \left| A_0(x) e^{iT_{p+1}(x)} - A_{p+1}(x) e^{iT_{p+1}(x)} \right|^2 dx \leq \\ &\leq \int_{-a}^a \left| A_0(x) e^{iT_p(x)} - A_{p+1}(x) e^{iT_{p+1}(x)} \right|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left| |C_{n,p}| e^{iD_{n,p}} - B_n e^{iD_{n,p}} \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| |C_{n,p}| - B_n \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Из уравнения (П7) следует неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| |C_{n,p+1}| - B_n \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| |C_{n,p}| - B_n \right|^2 \quad (\text{П8})$$

которое показывает, что независимо от начальной оценки фаз коэффициентов разложения (18) их модули с ростом числа итераций будут приближаться к произвольным заданным числам  $B_n$ .

# Iterative calculation of diffractive optical elements focusing into a three-dimensional domain and onto the surface of the body of rotation

V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer

## Abstract

There exist iterative methods for calculating phase diffraction optical elements (DOEs) that focus laser radiation into plane figures (images) [1,2]. To calculate the DOE in three-dimensional figures, the figure is split into N planes, thus the task is reduced to the calculation of DOE forming flat images. In [3,4] various approaches were proposed.

Using a different approach, this paper considers iterative methods for calculating phase DOEs focusing laser radiation into a three-dimensional domain and onto the surface of the body of rotation.

*Citation:* Kotlyar VV, Khonina SN, Soifer VA. Iterative calculation of diffractive optical elements focusing into a three-dimensional domain and onto the surface of the body of rotation. *Computer Optics* 1995; 14-15(2): 72-84.

## References

- [1] Hirsch PM, Jordan JA, Lesem LB. Method of marking an object dependent diffuser. Patent U.S. 3619022; 1971.
- [2] Gerchberg RW, Saxton WD. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*; 1972; 35(2): 237-246.
- [3] Leseberg D. Computer-generated three-dimensional image holograms. *Appl. Opt.*; 1992; 31(2): 223-229.
- [4] Vorontsov MA, Koryabin AV, Shmalgauzen VI. Controlled optical systems; Moscow: Nauka Publisher; 1988.
- [5] Bryngdahl O, Wyrowski F. Digital holography. Computer generated holograms. *Progress in Optics*. Ed. Wolf E; 1990; 28: 3-86.
- [6] Doskolovich LL, Kazansky NL, Sisakyan IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Focusing laser radiation on a three-dimensional surface of revolution. *Computer Optics*; Moscow: ICSTI; 1992; 12: 8-14.
- [7] Kotlyar VV, Nikolsky IV, Soifer VA. An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes. *Optik*; 1994; 98(1): 26-30.
- [8] Kazansky NL, Kotlyar VV, Soifer VA. Computer-aided design of diffractive optical elements. *Opt. Eng.*; 1994; 33(10): 3156-3166.
- [9] Kotlyar VV, Honina SN. Shapers of Bessel mods. Materials of the 5th international meeting on image processing and computer optics, Samara: SSAU; 1994; 41-42.
- [10] Golub MA, Doskolovich LL, Kazansky NL, Sisakyan IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Method of matched rectangles for designing focusators to flat areas. *Computer optics*; Moscow: ICSTI; 1992; 10-11: 100-110.
- [11] Golub MA, Doskolovich LL, Kazansky NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Computer generated diffractive multi-focal lens. *J.Mod.Opt.*; 1992; 39(6): 1245-1251.
- [12] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA. Diffraction computation of focusator into a longitudinal segment and multifocal lens. *Proceeding SPIE*; 1993; 1780: 263-272.
- [13] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and series. Special functions; Moscow: Nauka Publisher; 1983.