
Котляр В.В., Панков И.А., Соيفер В.А.

МЕТОД РАСЧЕТА ФУНКЦИИ РЕЛЬЕФА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ РЭЛЕЯ.

Введение

Отражательные дифракционные решетки (ДР) используются во многих прикладных задачах оптики. В лазерной технике ДР используют-

ся для измерения мощности лазерных пучков как неискажающие структуру пучка ответители излучения [1]. Их также используют как дифракционные поляризаторы для поворота вектора поляризации лазерных [2] или СВЧ [3] пучков. В

задачах оптической обработки информации ДР используются в качестве многоканальных осветителей, которые мультиплицируют лазерный пучок на N пучков равной интенсивности [4]. К проблеме расчета светового поля, отраженного от дифракционной решетки (прямая задача дифракции) имеется несколько подходов разной степени сложности и точности: методы строгого решения электромагнитных уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями [5]; метод решения уравнений связанных волн [6]; метод Рэлея [7] и метод скалярной дифракции Кирхгофа [8].

В данной работе в рамках плосковолнового представления дифрагировавших волн (метод Рэлея) рассматривается обратная задача дифракции, в которой требуется найти функцию рельефа ДР по заданному распределению интенсивности света между дифракционными порядками. Приближение Рэлея дает наиболее точные результаты при условии, что максимальная высота h и период d рельефа решетки связаны с длиной волны света λ следующими неравенствами [9]: $d \leq 15\lambda, h \leq 1.5\lambda$.

1. Метод Рэлея.

В этом разделе, следуя [10], кратко рассмотрено получение амплитуды дифрагировавшего на решетке света в приближении Рэлея. На рис.1 показана оптическая схема описываемой ситуации. Плоская волна света с комплексной амплитудой $\psi_i(x,y)$ падает под углом Θ_0 на идеально отражающую ДР, профиль которой изменяется с периодом d вдоль оси x и не изменен вдоль оси z (эта ось направлена перпендикулярно рис.1):

$$\psi_i(x, y) = \exp\{ik(x \sin \Theta_0 - y \cos \Theta_0)\}, \quad (1)$$

где $\lambda = 2\pi/\lambda$ -волновое число света.

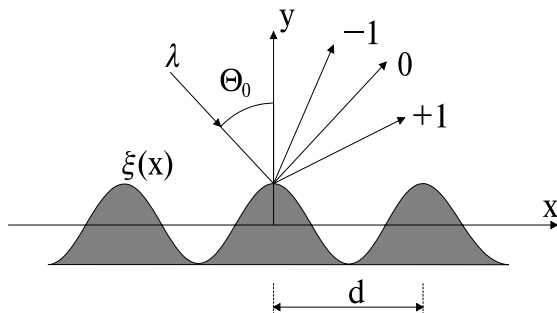


Рис.1. Схема отражения плоской волны от поверхности решетки

Ограничимся рассмотрением случая ТЕ-поляризации, для которого электрический вектор плоской волны направлен вдоль оси z , а магнитный лежит в плоскости падения (x, y) .

Полное световое поле $\psi(x,y)$ в полупространстве над решеткой (при $y > \max[\xi(x)]$, $\xi(x)$ -функция профиля решетки) удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \psi(x, y) + k^2 \psi(x, y) = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями для идеально отражающей поверхности

$$\psi(x, y)|_{y=\xi(x)} = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, что дифрагирующее на решетке световое поле удовлетворяет условию

$$\psi(x, y) = \psi_d(x, y) + \psi_i(x, y), \quad (4)$$

$$\psi_d(x, y)|_{y=\xi(x)} = -\exp\{ik(x \sin \Theta_0 - \xi(x) \cos \Theta_0)\}. \quad (5)$$

Так как функция решетки периодическая: $\xi(x+d) = \xi(x)$, а функция, стоящая справа в уравнении (5) является квазипериодической, то следующая функция должна быть также периодической по x :

$$V(x, y) = \psi_d(x, y) \exp\{-ikx \sin \Theta_0\}. \quad (6)$$

Функцию (6) можно разложить в ряд Фурье:

$$V(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(y) \exp\left\{2\pi i \frac{nx}{d}\right\}. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) следует плосковолновое представление для амплитуды дифрагировавшего поля:

$$\psi_d(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(y) \exp\{ik\alpha_n x\} \quad (8)$$

где $\alpha_n = \sin \Theta_0 + n \frac{\lambda}{d}$.

Подставив уравнение (8) в уравнение Гельмгольца, получим выражение:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^2 V_n(y)}{dy^2} + k^2 \beta_n^2 V_n(y) \right] \exp\left\{2\pi i \frac{nx}{d}\right\} = 0, \quad (9)$$

из которого следуют уравнения для функций $V_n(y)$:

$$\frac{d^2 V_n(y)}{dy^2} + k^2 \beta_n^2 V_n(y) = 0, \quad (10)$$

где $\beta_n^2 = 1 - \alpha_n^2$.

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$V_n(y) = B_n \exp\{ik\beta_n y\}. \quad (11)$$

Уравнение (8) с учетом (11) приводит к следующему виду разложения дифрагировавшего поля по плоским волнам при $y > \max[\xi(x)]$:

$$\psi_d(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \psi_n(x, y), \quad (12)$$

$$\psi_n(x, y) = \exp\{ik(\alpha_n x + \beta_n y)\}. \quad (13)$$

Заметим, что сумма (12) содержит как однородные плоские волны (при $\alpha_n^2 < 1$), так и неоднородные волны, экспоненциально затухающие вдоль оси y при условии $\alpha_n^2 > 1$.

Гипотеза Рэлея состоит в том, что разложение поля (12) верно не только при $y > \max[\xi(x)]$,

но и при $y \geq \xi(x)$. При этом из уравнений (5) и (12) получим выражение для поиска коэффициентов B_n :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \psi_n(x, \xi(x)) = -\psi_i(x, \xi(x)). \quad (14)$$

При ограничении числа дифрагировавших порядков $-N < n < N$ и при выборе последовательности точек x_m уравнение (14) приводит к линейной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных B_n :

$$\sum_{n=-N}^N B_n \psi_{nm} = -\psi_{im}, \quad (15)$$

где $\psi_{nm} = \psi_n(x_m, \xi(x_m))$, $\psi_{im} = \psi_i(x_m, \xi(x_m))$.

2. Алгоритм расчета рельефа решетки.

В этом разделе рассматривается обратная задача и приводится итеративный алгоритм расчета функции $\xi(x)$ по заданным модулям коэффициентов B_n . Квадраты модулей коэффициентов $|B_n| = I_{n0}$ представляют собой интенсивности дифрагировавших порядков, которые требуется сформировать. Эту задачу предлагается решать следующим образом. Из уравнения (14) видно, что функция $\psi_d(x, y)$ должна быть только фазовой при $y = \xi(x)$: $|\psi_d(x, \xi(x))| = |\psi_i(x, \xi(x))| = 1$. Пользуясь неопределенностью аргументов комплексных коэффициентов B_n суммы (12), можно итеративным способом рассчитать дифрагировавшее поле, которое бы имело единичный модуль в прямоугольной области: $-d/2 < x < d/2$, $-\lambda/2 < y < \lambda/2$. Алгоритм расчета сходен с известным алгоритмом Герчберга-Секстона [11] и имеет следующие шаги.

1. Пусть на p -ом шаге итераций оценка функции дифрагировавшего поля имеет вид

$$\psi_d^{(p)}(x, y) = \exp\{iQ_p(x, y)\}. \quad (16)$$

2. Функция (16) разлагается в ряд по ортогональным функциям (13), коэффициенты которого находятся по формулам:

$$B_n^{(p)} = \frac{1}{\lambda d} \int_0^d \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \exp\{iQ_p(x, y) - ik(\alpha_n x + \beta_n y)\} dx dy \quad (17)$$

3. Рассчитанные коэффициенты B_n видоизменяются с учетом заданных значений интенсивности порядков:

$$\bar{B}_n^{(p)} = \sqrt{I_{n0}} \exp\{i \arg(B_n^{(p)})\}. \quad (18)$$

4. Следующая оценка фазы функции дифрагировавшего поля находится по формуле

$$Q_{p+1}(x, y) = \arg \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{B}_n^{(p)} \exp[ik(\alpha_n x + \beta_n y)] \right\} \quad (19)$$

5. Далее следует переход к первому пункту и т. д.

Можно показать, что этот алгоритм будет сходиться в среднем, то есть для любого номера p выполняется неравенство

$$\int_0^d \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left[\left(\psi_d^{(p+1)}(x, y) (-1) \right)^2 dx dy \leq \int_0^d \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left[\left(\psi_d^{(p)}(x, y) (-1) \right)^2 dx dy \quad (20)$$

Пусть при достаточном числе шагов среднее квадратичное отклонение δ достигло заданного значения δ_0 :

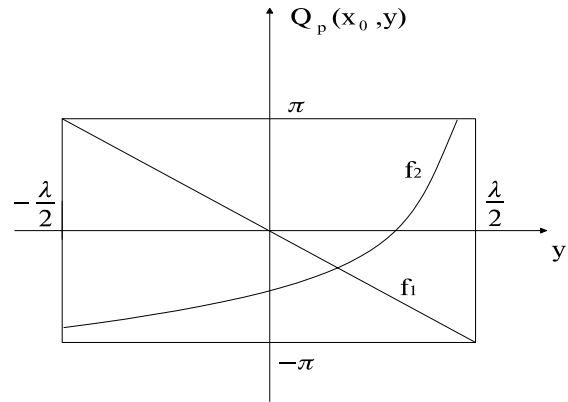


Рис. 2. Графическое решение уравнения(22)

$$\delta_p = \frac{1}{\lambda d} \sqrt{\int_0^d \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \left[\left(\psi_d^{(p)}(x, y) (-1) \right)^2 dx dy \leq \delta_0, \quad (21)$$

тогда, исходя из уравнения (14) можно записать уравнение для поиска функции рельефа $\xi(x)$:

$$Q_p(x, \xi(x)) = \pi + k\alpha_0 x - k\beta_0 \xi(x) \quad (22)$$

где $Q_p(x, \xi(x))$ - рассчитанная на p -ой итерации фаза дифрагировавшего поля $\psi_d(x, y)$. На рис.2 показано, что решение уравнения (22) при $\Theta_0 = 0$ ($\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$) и для любой точки x_0 находится из пересечения прямой $f_1(y) = -2\pi/\lambda$ и кривой $f_2(y) = Q_p(x_0, y) - \pi$.

3. Численные результаты.

На рис.3-6 приведены рассчитанные описанным выше методом рельефы одного периода дифракционных решеток $h = \xi(x)$ рассеивающих падающую плоскую волну в заданных направлениях а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного на этих решетках поля полученное в результате расчета с помощью интеграла Кирхгофа б). Расчеты были проведены для нормально падающей плоской волны (длина волны λ) период рассчитываемой решетки $T = 20\lambda$. При расчете задавались несколько порядков одинаковой интенсивности: 0, 1 (рис.3б); -1, 1 (рис.4б); 0, 1 (рис.5б) и 0, 1, 2 (рис.6б).

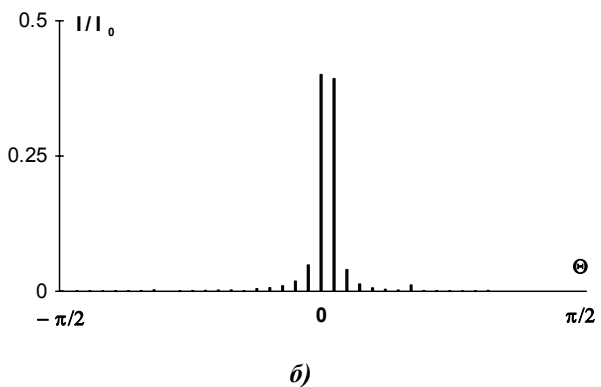
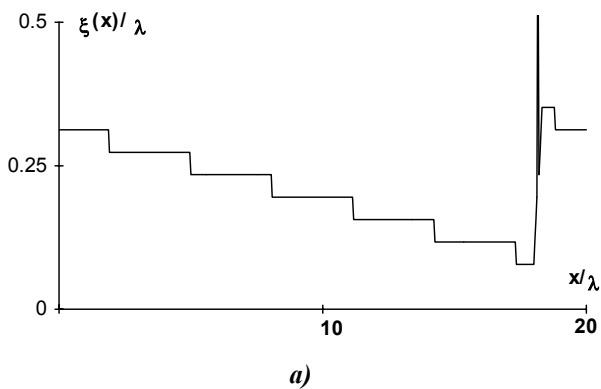


Рис.3. Функция периода двухпорядковой (несимметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б)

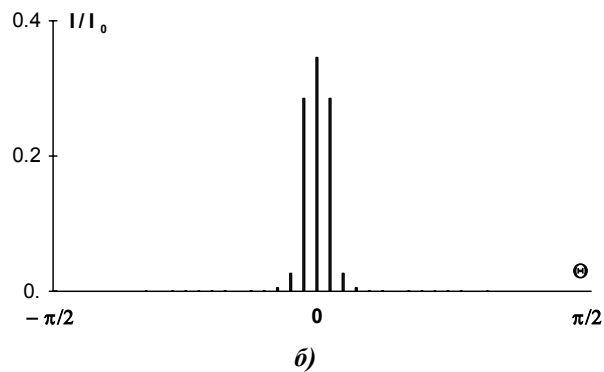
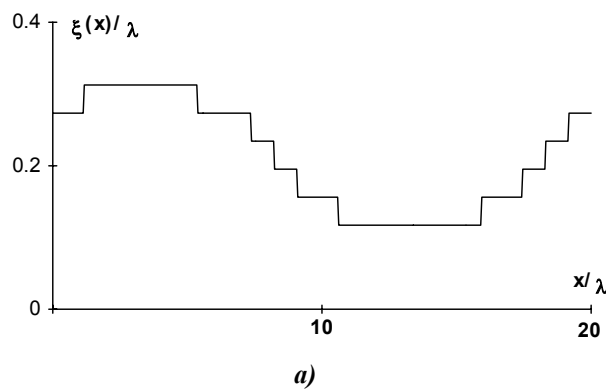


Рис.5. Функция периода трехпорядковой (симметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б).

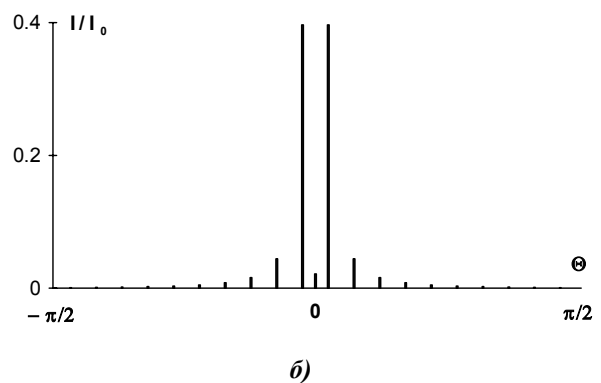
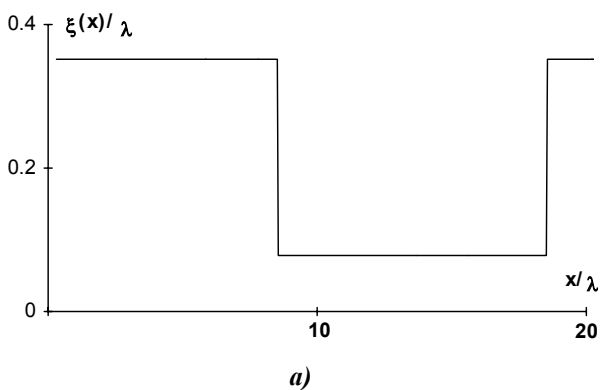


Рис.4. Функция периода двухпорядковой (симметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б)

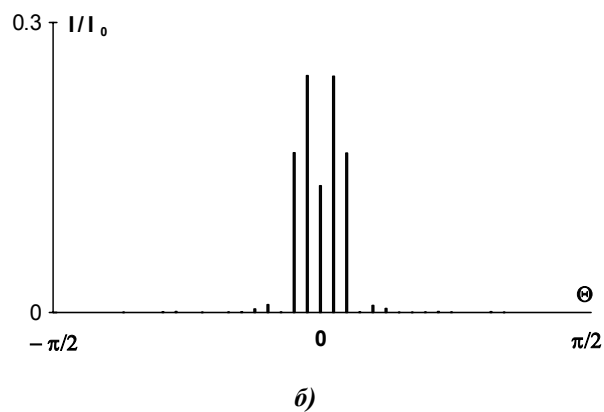
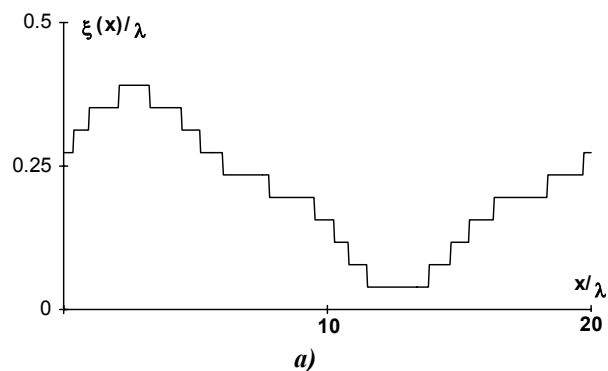


Рис.6. Функция периода пятипорядковой (симметричной) решетки а) и угловое распределение нормированной интенсивности рассеянного света б).

Из рисунков видно что предложенный метод позволяет рассчитывать решетки, создающие заданное количество распространяющихся в заданных направлениях дифракционных порядков, но распределение энергии между ними не всегда точно соответствует заданному.

Литература.

- 1 Апполонов В.В., Бочкарев Е.Л., Заславский В.Я. и др. Ответвитель лазерного пучка на дифракционной решетке. //pp Квантовая электроника, 1979, т. 6, N 3, с. 615-618
- 2 Haidner H., Kipfer P., Sheridan J.T. et al. Polarizing reflection grating beamsplitter for 10.6 μm wavelength. // Opt. Eng., 1993, v. 32, N 8, p. 1860-1865
- 3 Sweeney D.W., Gallagher N.C. Multi-element microwave computer generated holograms. // Proc. SPIE, 1988, v. 884, p. 114-119
- 4 Vassara A., Taghizadeh M.R., Turunen J. et al. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics. // Appl. Opt., 1992, v. 31, N 7, p. 3320-3336
- 5 Electromagnetic theory of gratings: Topics in current physics, v. 22, Ed. by R. Petit, N.Y.: Springer-Verlag, 1980
- 6 Moharam M.G., Gaylord T.K. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings. // J. Opt. Soc. Am. A, 1986, v. 3, N 11, p. 1780-1787
- 7 Hugonin J.P., Petit R., Cadilhac M. Plane wave expansions used to describe the field diffracted by a grating. // J. Opt. Soc. Am. A, 1981, v. 71, N 5, p. 593-597
- 8 Бреховских Л.М. Дифракция волн на шероховатой поверхности. // ЖЭТФ, 1952, т. 23, N 3, с. 275-304
- 9 Vanden Berg P.M., Fokkema J.T. The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating. // J. Opt. Soc. Am., 1979, v. 69, N 1, p. 27-31
- 10 Смокий О.И., Фабриков В.А. Методы теории систем и преобразований в оптике, Ленинград, Наука, 1989
- 11 Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. // Optik, 1972, v. 35, N 2, p. 237-246.

A method for calculating the function of the reflective diffraction grating relief in the Rayleigh approximation

V.V. Kotlyar, I.A. Pankov, V.A. Soifer

Abstract

Reflective diffraction gratings (DRs) are used in many applied problems of optics. In the laser technique, DRs are used to measure the power of laser beams as the radiation couplers that do not distort the beam structure [1]. They are also used as diffraction polarizers to rotate the polarization vector of laser [2] or microwave [3] beams. In 28 problems of optical information processing, DRs are used as multichannel illuminators that multiply a laser beam into N beams of equal intensity [4]. There are several approaches to the problem of calculating the light field reflected from the diffraction grating (the direct diffraction problem), these approaches vary in complexity and accuracy and include: the methods for the rigorous solution of Maxwell's electromagnetic equations with the corresponding boundary conditions [5]; a method for solving the equations of coupled waves [6]; Rayleigh method [7] and Kirchhoff scalar diffraction method [8]. In this paper, in the framework of the plane-wave representation of diffraction waves (the Rayleigh method), we consider the inverse diffraction problem, requiring to find the DR relief function by the given distribution of light intensity between diffraction orders.

Citation: Kotlyar VV, Pankov IA, Soifer VA. A method for calculating the function of the reflective diffraction grating relief in the Rayleigh approximation. *Computer Optics* 1996; 16: 27-31.

References

- [1] Appolonov VV, Bochkarev EL, Zaslavsky VY. et al. Laser beam coupler on a diffraction grating. *Quantum Electronics*; 1979; 6(3): 615-618.
- [2] Haidner H, Kipfer P, Sheridan JT et al. Polarizing reflection grating beamsplitter for 10.6 μm wavelength. *Opt. Eng.*; 1993; 32(8): 1860-1865.
- [3] Sweeney DW, Gallagher NC. Multi-element microwave computer generated holograms. *SPIE Proceedings*; 1988; 884: 114-119.
- [4] Vassara A, Taghizadeh MR, Turunen J et al. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics. *Appl. Opt.*; 1992; 31(7): 3320-3336.
- [5] *Electromagnetic theory of gratings: Topics in current physics*; Ed. by Petit R, New York: SpringerVerlag; 1980; 22.
- [6] Moharam MG, Gaylord TK. Rigorous coupled-wave analysis of metallic surface-relief gratings. *J.Opt.Soc.Am.A.*; 1986; 3(11): 1780-1787.
- [7] Hugonin JP, Petit R, Cadilhac M. Plane wave expansions used to describe the field diffracted by a grating. *J.Opt.Soc.Am.A.*; 1981; 71(5): 593-597.
- [8] Brekhovskikh LM. Wave diffraction by a rough surface. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*; 1952; 23(3): 275-304.
- [9] Vanden Berg PM, Fokkema JT. The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating. *J.Opt.Soc.Am.*; 1979; 69(1): 27-31.
- [10] Smoky OI, Fabrikov VA. *Methods of the theory of systems and transformations in optics*; Leningrad: Nauka Publisher; 1989.
- [11] Gerchberg RW, Saxton WO. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*; 1972; 35(2): 237-246.