Досколович Л.Л., Петрова О.И., Сойфер В.А., Харитонов С.И.

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОПОРЯДКОВЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК В ПРИБЛИЖЕНИИ РЭЛЕЯ

1.Введение.

Многопорядковые дифракционные решетки (ДР), преобразующие освещающий пучок в N пучков с заданной интенсивностью, широко используются как светоделительные и мультиплицирующие устройства [1-3].

Для расчета отраженного от ДР поля известно несколько подходов разной степени сложности и точности. Строгий подход к расчету отраженного поля состоит в решении краевой задачи для уравнений Максвелла [4]. Сложность решения указанной задачи не позволяет строить эффективные итерационные процедуры для решения обратной задачи, состоящей в расчете профиля рельефа ДР из условия формирования заданного набора дифракционных порядков с требуемой интенсивностью. Наиболее часто обратная задача решается в скалярном приближении Кирхгофа. В этом случае для расчета профиля многопорядковых ДР разработаны эффективные итерационные и градиентные алгоритмы [5-7]. Однако, приближение Кирхгофа справедливо только при $d >> \lambda$, где d-период решетки, λ-длина волны освещающего пучка. Промежуточное положение между приближением Кирхгофа и строгим решением краевой задачи для уравнений Максвелла занимает метод Рэлея [4]. Метод Рэлея, по сравнению с методом Кирхгофа, более точен. При гладком профиле рельефа с малой по сравнению с периодом d высотой, метод Рэлея остается справедливым даже при значениях d, сравнимых с длиной волны [4].

В данной работе предлагается градиентный метод расчета профиля рельефа многопорядковой идеально отражающей ДР в приближении Рэлея. Метод обобщает известные градиентные алгоритмы расчета ДР в приближении Кирхгофа. Расчет многопорядковых ДР в приближении Кирхгофа является частным случаем разработанного метода при $d >> \lambda$.

2. Метод Рэлея.

Рассмотрим идеально отражающую дифракционную решетку с периодом d, описываемую цилиндрической поверхностью $y=f(x)$ (Рис.1). Решетка освещается падающей под углом θ_0 плоская волной с комплексной амплитудой

$$u_i(x,y)=\exp\left(ik\left(x\sin(\theta_0)-y\cos(\theta_0)\right)\right) \qquad (1)$$

где $k=2\pi/\lambda$, λ -длина волны .

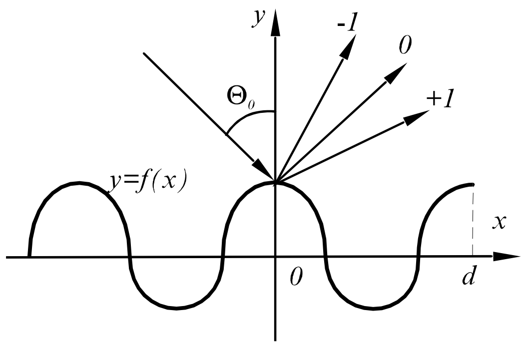

Рис. 1.

Скалярная функция $u_i(x,y)$ в (1), соответствует компоненте E_z электрического поля падающей плоской волны для случая ТЕ поляризации или компоненте H_z магнитного поля для случая ТМ поляризации. Полное поле $u(x,y)=u_i(x,y)+u_d(x,y)$, где $u_d(x,y)$ - дифрагировавшее на решетке поле, при $y>f(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u+k^2u=0 \qquad (2)$$

с граничным условием

$$u(x,y)\Big|_{y=f(x)}=0 \qquad (3)$$

для случая ТЕ поляризации и граничным условием

$$\left.\frac{du(x,y)}{d\mathbf{n}}\right|_{y=f(x)}=0 \qquad (4)$$

для случая ТМ поляризации, где $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к профилю решетки.

Дифрагировавшее поле $u_d(x,y)$ вне решетки (т.е. при $y>a$, $a=\max[f(x)]$) может быть представлено в виде разложения по плоским волнам [4]:

$$u_d(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\exp\left(ik\left(\alpha_n x+\beta_n y\right)\right) \qquad (5)$$

где

$$\alpha_n=\sin(\theta_0)+n\frac{\lambda}{d}, \qquad (6)$$

$$\beta_n=\sqrt{1-\alpha_n^2} \qquad (7)$$

Отметим, что сумма (5) содержит как однородные плоские волны $\left(\alpha_n^2<1\right)$, так и неоднородные$\left(\alpha_n^2>1\right)$, экспоненциально затухающие с ростом y плоские волны. В приближении Рэлея предполагается, что разложение (5) остаются верным и внутри штрихов, т.е. при $f(x)\le y\le a$. В этом случае коэффициенты Релея R_n в (5) определяются из граничных условий (3), (4). Рассмотрим для определенности случай ТЕ поляризации. Подставляя (1), (5) в (3), получим для коэффициентов R_n следующее уравнение:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n\exp\Big(ik\big((\alpha_n-\alpha_0)x+\\&+(\beta_n-\beta_0)f(x)\big)\Big)=\\&=-\exp\left(-2ik\beta_0 f(x)\right)\end{aligned} \qquad (8)$$

Правая и левая части уравнения (8) являются периодическими функциями с периодом d. Заменим уравнение (8) условием равенства коэффициентов Фурье в разложении правой и левой частей уравнения (8). В результате для определения R_n получим следующую бесконечную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{pn}R_n=B_p,\ p=-\infty,\infty \qquad (9)$$

где

$$A_{pn}=\int_0^{2\pi}\exp(i\xi(n-p)+i(\beta_n-\beta_0)H(\xi))d\xi \qquad (10)$$

$$B_p=-\int_0^{2\pi}\exp\left(-2i\beta_0H(\xi)-ip\xi\right)d\xi \qquad (11)$$

$$H(\xi)=kf\left(\frac{\xi d}{2\pi}\right)- \qquad (12)$$

-нормированная высота.

На практике для расчета R_n, $n=-N,N$ используется конечная система из $2N+1$ уравнений:

$$\mathbf{AR}=\mathbf{B} \qquad (13)$$

где $\mathbf{A}=\left(A_{pn}\right)_{-N}^{N}$, $\mathbf{R}=\left(R_n\right)_{-N}^{N}$, $\mathbf{B}=\left(B_n\right)_{-N}^{N}$

При $d>>\lambda$ приближение Релея переходит в приближении Фраунгофера. Действительно, при $d>>\lambda$ $(\beta_n-\beta_0)\approx 0$ и матрица $\mathbf{A}$ в (13) становится диагональной. При этом коэффициенты Релея R_n, $n=-N,N$ переходят в коэффициенты Фурье в разложении функции $\exp(i\varphi(x))$, где функция

$$\varphi(x)=-2\beta_0H(x)+\pi \qquad (14)$$

описывает изменение направления и набег фазы при отражении плоской волны от решетки с высотой $H(x)$.

3. Градиентный метод.

Рассмотрим обратную задачу расчета профиля решетки из условия формирования заданной интенсивности дифракционных порядков $\tilde{I}_n, n=-M,M\left(\sum_{n=-M}^{M}\tilde{I}_n=1\right)$. Для удобства выкладок для описания профиля решетки будем использовать функцию $H(x)$ (12). Под интенсивностями дифракционных порядков следует понимать следующие нормированные значения квадратов модулей коэффициентов Рэлея [4]:

$$I_n = |R_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_0}, \left(\sum_{n \in U} I_n = 1 \right) \qquad (15)$$

где U - множество индексов, соответствующих распространяющимся однородным волнам;

$$U = \{ n (\alpha_n^2 < 1 \} .$$

Для построения градиентной процедуры расчета профиля решетки *H(x)* введем некоторый функционал *ε(H)*, характеризующий отличие расчетных интенсивностей порядков I_n от требуемых значений $\tilde{I}_n$:

$$\varepsilon(H) = \varepsilon(\mathbf{I}(H), \tilde{\mathbf{I}}) \qquad (16)$$

где $\mathbf{I}$ и $\tilde{\mathbf{I}}$ - вектора расчетных и заданных дифракционных порядков. Отметим, что компоненты вектора $\mathbf{I}$ также являются функционалами от профиля решетки *H(x)*.

Градиентная минимизация функционала (16) состоит в итерационной коррекции функции $H(x)$ согласно правилу:

$$H_{n+1}(x) = H_n(x) - t \cdot \varepsilon'(x) \qquad (17)$$

где *n* - номер итерации, *t* - шаг градиентного метода, *ε'(x)*-градиент функционала. Для вычисления градиента *ε'(x)* рассмотрим приращение функционала *ε(H)*, вызванное малым приращением высоты $\Delta H(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon(H) &= \varepsilon(H + \Delta H) - \varepsilon(H) = \\ &= \sum_{j=-M}^{M} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \Delta I_j(H) \end{aligned} \qquad (18)$$

Согласно (15)

$$\Delta I_j(H) = 2 \frac{\beta_j}{\beta_0} \mathrm{Re}(\Delta R_j(H) R_j^*(H)) \qquad (19)$$

Вектор приращений $\Delta \mathbf{R}(H) = (\Delta R_j(H))_{-N}^{N}$ может быть получен из (13) в виде:

$$\Delta \mathbf{R}(H) = \mathbf{A}^{-1} \int_0^{2\pi} i \Delta H(\xi) \times (\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R}) d\xi \qquad (20)$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{A}}(\xi) = (\tilde{A}_{pn}(\xi))_{-N}^{N}, \tilde{A}_{pn}(\xi) = \\ &= \exp(i\xi(n-p) + i(\beta_n - \beta_0) H(\xi))(\beta_n - \beta_0) \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{B}}(\xi) = (\tilde{B}_p(\xi))_{-N}^{N}, \\ &\tilde{B}_p(\xi) = 2\beta_0 \exp(-2i\beta_0 H(\xi) - ip\xi) \end{aligned} \qquad (22)$$

Подставляя соотношения (19)-(22) в (18) получим приращение функционала $\varepsilon(H)$ в виде:

$$\begin{aligned} &\Delta\varepsilon(H) = -\int_0^{2\pi} \Delta H \cdot 2\,\mathrm{Im} \times \\ &\times \left(\mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}(\xi) - \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \cdot \mathbf{R}), \tilde{\mathbf{R}} \right) d\xi \end{aligned} \qquad (23)$$

где

$$\tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{R}_j)_{-N}^{N}, \tilde{R}_j = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\beta_j}{\beta_0} R_j \qquad (24)$$

Согласно (23) градиент функционала имеет вид:

$$\varepsilon'(x) = -2 \cdot \mathrm{Im} \times \left(\mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{B}}(x) - \tilde{\mathbf{A}}(x) \cdot \mathbf{R}), \tilde{\mathbf{R}} \right) \qquad (25)$$

Выше показано, что при $d >> \lambda$ приближение Релея переходит в приближении Фраунгофера для которого коэффициенты Релея соответствуют коэффициентам Фурье в разложении функции $\exp(i\varphi(x))$:

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\xi) - ip\xi) d\xi \qquad (26)$$

где $\varphi(x)$ - функция фазового набега (14).

Полагая при $d >> \lambda$ в (10), (21), (24), (25) $\beta_n = \beta_0$ получим следующее выражение для градиента функционала:

$$\varepsilon'_F(x) = -2 \cdot \mathrm{Im} \left(\frac{1}{2\pi} \tilde{\mathbf{B}}(x), \hat{\mathbf{R}} \right) \qquad (27)$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{R}} = (\hat{R}_j)_{-N}^{N}, \\ &\hat{R}_j = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \exp(i\varphi(\xi) - ij\xi) d\xi \end{aligned} \qquad (28)$$

Полученные выражения (27), (28) совпадает с выражением для градиента функционала (16) для расчета решеток в приближении Фраунгофера[8]. Отметим, что указанный результат имеет место и для случая ТМ поляризации.

Приведенная связь градиентных алгоритмов позволяет рассматривать широко используемые градиентные алгоритмы синтеза решеток в приближении Фраунгофера как частный случай более общего градиентного алгоритма (17), (25), основанного на приближении Рэлея.

4. Результаты расчетов.

Предложенный градиентный метод (17), (25) был применен к расчету решеток с разным числом 2M+1 порядков с равной интенсивностью. В качестве функционала невязки был использован следующий квадратичный функционал:

$$\varepsilon(H) = \sum_{j=-M}^{M} (I_j(H) - \tilde{I}_j)^2 \qquad (29)$$

Шаг градиентного метода t в (17) определялся из условия минимума функции, являющейся линейной аппроксимацией функционала $\varepsilon(H)$ вдоль направления антиградиента. В качестве начального приближения использовался косинусоидальный профиль $f(x) = A \cdot \cos(2\pi x / d)$.

На Рис. 2-4 приведены расчетные профили и интенсивности дифракционных порядков для трехпорядковой (рис.2), пятипорядковой (рис.3) и семипорядковой (рис.4) дифракционных решеток с периодами 3.2λ, 5.2λ и 5.2λ соответственно. Расчет проводился для случая нормального падения плоской волны ($\theta_0 = 0$).

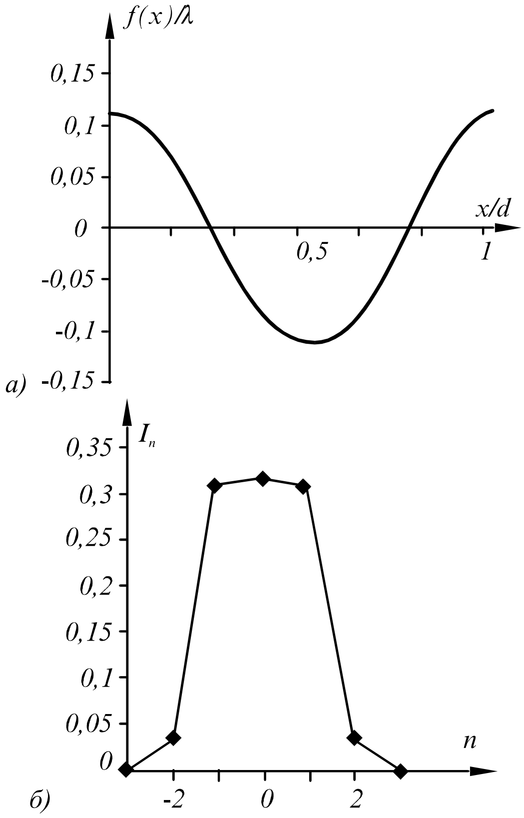

Рис. 2.

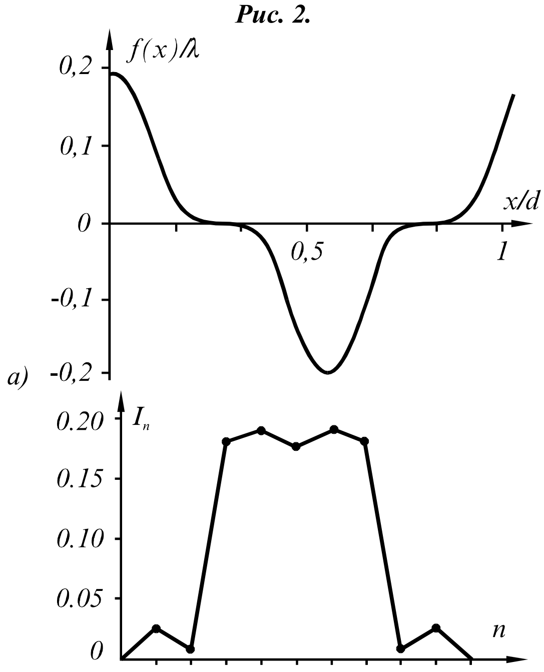

Рис. 3.

Для приведенных примеров значения энергетической эффективности $E = \sum_{j=-M}^{M} I_j$ и среднеквадратичной ошибки δ распределения интенсивности в порядках от требуемых значений составили 93.1% и 0% для трехпорядковой решетки (рис.2), 96.6% и 3.1%, для пятипорядковой решетки (рис.3) и 96.4% и 4.6% для семипорядковой решетки (рис.4).

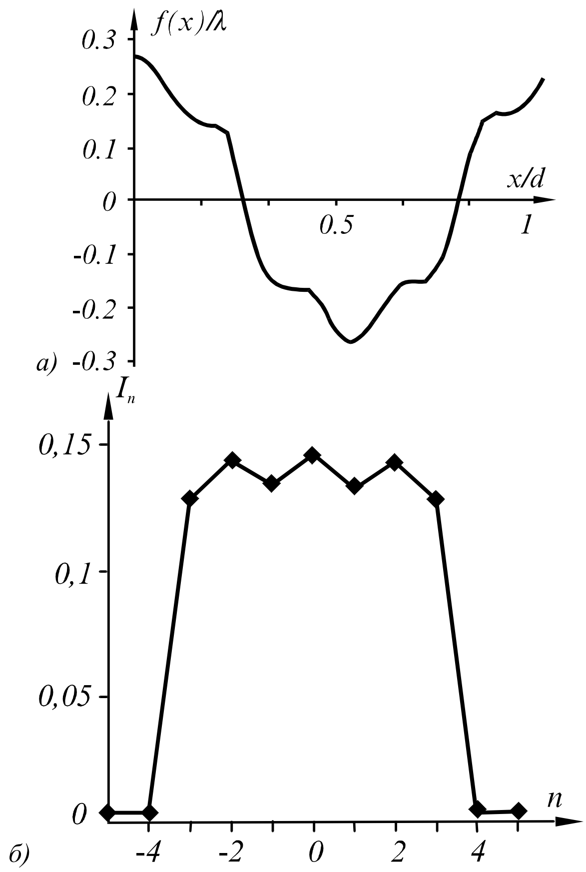

Рис. 4.

Результаты проведенных расчетов демонстрируют высокую работоспособность предложенного метода.

Литература.

[1] Vassara A., Taghizaden M.R., Turunen J et all. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics.// Appl. Opt., 1992, v.31, N 7, pp.3320-3336.

[2] Morrison R.L., Walker S.L., Cloonan T.J. Beam array generation and holographic interconnections in a free-space optical network.// Appl. Opt., 1993, v.32, pp.2512-2518.

[3] Mait J.N. Design of binary phase and multiphase Fourier gratings for array generation.// JOSA A, 1990, v.7, N 8, pp.1514-1528.

[4] *Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics*, v.22, Ed. by R.Petit, N.Y.: Springer-Verlag, 1980.

[5] Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of the phase from im-

age and diffraction plane pictures.// Optik, 1972, v.35, N 2, pp.237-246.

[6] J.R.Fienup Phase retrieval algorithms: a comparison.// Appl. Opt., 1982, v.21, N 15, pp.2758-2769.

[7] Doskolovich L.L., Soifer V.A., Alessandretti G., Perlo P., Repetto P. Analytical initial approximation for multiorder binary gratings design.// Pure&Appl.Opt., 1994, v.3, pp.921-930.

[8] *Iterative methods for diffraction optical elements computation.* V.Soifer, V.Kotlyar, L.Doskolovich, Tailor&Francis LTD, 1996 (accepted for publication).

Gradient method for the design of multiorder diffraction gratings using the Rayleigh method

L.L. Doskolovich, O.I. Petrova, V.A. Soifer, S.I. Kharitonov

Abstract

Multi-order diffraction gratings that convert a light beam into N beams with a given intensity are used widely as the beam-splitting and multiplying devices [1-3]. In this paper, we propose a gradient method for the design of a relief profile of a multi-order ideally reflecting diffraction grating in the Rayleigh approximation. The method generalizes the available gradient algorithms for the design of diffraction gratings in the Kirchhoff approximation.

Citation: Doskolovich LL, Petrova OI, Soifer VA, Kharitonov SI. Gradient method for the design of multiorder diffraction gratings using the Rayleigh method. Computer Optics 1996; 16: 31-35.

References

[1] Vassara A, Taghizaden MR, Turunen J et all. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics. Appl.Opt.; 1992; 31(7): 3320-3336.
[2] Morrison RL, Walker SL, Cloonan TJ. Beam array generation and holographic interconnections in a free-space optical network. Appl.Opt.; 1993; 32: 2512-2518.
[3] Mait JN. Design of binary phase and multiphase Fourier gratings for array generation. JOSA A; 1990; 7(8): 1514-1528.
[4] Electromagnetic theory of gratings: Topics in current physics, Ed. by Petit R; New York: SpringerVerlag; 1980; 22.
[5] Gerchberg RW, Saxton WO. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. Optik; 1972; 35(2): 237-246.
[6] Fienup JR. Phase retrieval algorithms: a comparison. Appl. Opt.; 1982; 21(15): 2758-2769.
[7] Doskolovich LL, Soifer VA, Alessandretti G, Perlo P, Repetto P. Analytical initial approximation for multiorder binary gratings design. Pure&Appl.Opt.; 1994; 3: 921-930.
[8] Soifer VA, Kotlyar VV, Doskolovich LL. Iterative methods for diffraction optical elements computation. Tailor&Francis LTD; 1996 (accepted for publication).