

"БЕЗДИФРАКЦИОННЫЕ ПУЧКИ" И ИХ КАУСТИКИ

В настоящей работе обсуждается возможность формирования фокальных областей в различных зонах дифракции и доказывается, что термин "бездифракционные пучки" применяется для обозначения ограниченной в пространстве части тороидальной световой волны. Световая линия, или осевая каустика, является результатом интерференции пересекающихся областей этой волны. Показано, что "бездифракционные пучки" формируются такими оптическими элементами, фазовая функция пропускания которых содержит линейные по радиальной координате слагаемые. Выполнено сравнение оптических характеристик каустик в ближней и в дальней зонах дифракции. Сообщается о синтезе нового дифракционного модулированного аксикона, который формирует две фокальные области различного типа. Приводятся результаты экспериментального исследования его оптических характеристик.

1. Введение.

Термин "бездифракционные пучки" был введен в работах [1,2] для обозначения Бесселева пучка нулевого порядка, распространяющегося в однородной среде. Такой пучок имеет максимум интенсивности на оптической оси и подобно неограниченной плоской волне не расплывается при распространении. Для формирования бездифракционных пучков предложено [3,4] использовать оптические элементы, функция пропускания $t(\rho, \theta)$ которых имеет вид:

$$t_1(\rho, \Theta) = \exp[i(\alpha\rho + m\Theta)], \quad (1)$$

или

$$t_2(\rho, \Theta) = \operatorname{sgn}[J_m(\alpha\rho)] \exp(im\Theta), \quad (2)$$

где (r, Q) - цилиндрические координаты в плоскости выходного зрачка (Рис.1), α - действительное неотрицательное число, m - целое, J_m - функция Бесселя первого рода m -ого порядка. При освещении такого оптического элемента плоской, однородной, монохроматической световой волной формируются узкие слаборасходящиеся световые пучки, которые являются суперпозицией малого числа Бесселевых пучков [4].

Бесселев пучок можно создать лишь в ограниченном пространстве, поскольку очевидно, что для его формирования требуется неопределенная энергия. Таким образом, фактически в [1-4] речь идет о световых пучках, имеющих фокальную область в

виде линии конечной длины, ширина которой не зависит от размера линейной апертуры оптического элемента, а влияние дифракции на оптические характеристики элемента не рассматривается.

Задача создания синтезированных голограмм для формирования световых линий рассматривалась [5,6,7] и обычно рассматривается [8] вне зависимости от задачи о получении "бездифракционных пучков". Так в работе [7] проведен подробный анализ решений уравнения Гельмгольца для световых волн, каустика которых является прямой линией, а так же приведены фрагменты амплитудных синтезированных голограмм, формирующих цилиндрические, конические и винтовые волновые фронты. Однако и в работах [5-8] не проведено сравнительного анализа дифракционных ограничений для каустик пересеченных волновых фронтов.

В настоящей работе обсуждаются каустики Бесселевых пучков, возможности получения "бездифракционных пучков" с помощью дифракционных оптических элементов и приводятся результаты экспериментального исследования модулированно-го аксикона.

2. Каустики "бездифракционных пучков".

Наиболее интересные особенности линейных каустик проявляются при рассмотрении дифракции на упомянутых выше оптических элементах (1), (2). Легко видеть, что из общих свойств волновых фронтов следует, что "бездифракционные пучки" порождаются гораздо более широким классом оптиче-

ских элементов, чем это считалось ранее. В однородной среде, где лучи прямые, любая система лучей имеет две каустические поверхности, поскольку в каждой точке фронт волны характеризуется двумя главными радиусами кривизны. Эти каустические поверхности формируются в дальней зоне дифракции, однако существуют волновые фронты, имеющие каустику и в ближней зоне дифракции. Примером такого волнового фронта может служить конический. Даваемое обычно определение каустики [10] не пригодно в этом случае. Наиболее подходящим здесь является физическое определение каустики, данное Р.Вудом (R.Wood) [11]: "Каустика - это поверхность, вычерчиваемая заострением фронта волны... Заострение можно рассматривать как движущийся фокус, где происходит концентрация энергии." Если лучевое поле осесимметрично, то в ближней зоне дифракции обычно возникает фокальная область. Это положение обосновывается рассмотрением дифракции на оптическом элементе с функцией пропускания

$$t_3 = \exp (if(\rho)).$$

Используя метод стационарной фазы для нахождения интеграла Френеля в ближней зоне дифракции [8,9] можно легко получить следующее выражение для распределения интенсивности $I(r, \varphi, h)$ [8,9] в произвольном поперечном сечении осевой каустики (см. рис. 1):

Ход лучей при формировании осевой каустики в ближней зоне дифракции.

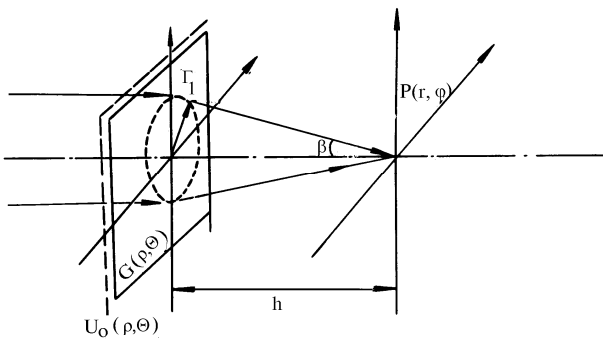


Рис. 1

$$I(r, h) = 2\pi\kappa I_0 \frac{[f'(\rho_s) J_0(\kappa r f'(\rho_s))]^2 h}{1 + h f''(\rho_s)}, \quad (3)$$

где λ -длина световой волны, $\kappa = 2\pi/\lambda$; $I_0 = [U_0(\rho, \theta)]^2 = const$ - распределение интенсивности в поперечном сечении исходной плоской световой волны; $f(\rho)$ - аналитическая функция радиальной координаты; $(.)'$ штрих используется для обозначения производной функции; (r, φ, h) - цилиндрические координаты в плоскости сечения осевой каустики; J_0 - функция Бесселя первого рода нулевого порядка; ρ_s - стационарные точки; для дифракционных оптиче-

ских элементов f, h и ρ_s связаны следующим соотношением:

$$\rho_s = -fh.$$

Оптические элементы, фазовая функция которых содержит линейные по ρ члены, хорошо изучены и известны под названием "аксиконы". Из (3) следует, что Бесселевы пучки формируются в ближней зоне дифракции аксикона любого типа, например, конического, когда

$$f_1 = -\alpha\rho$$

или логарифмического [8]:

$$f_2 = C_1 \ln(\rho_0^2 + \rho^2) \text{ или}$$

$$f_3 = -\rho^2 \left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - C_3 \right],$$

C_1, C_2, C_3 - постоянные величины. Ход лучей через конические аксиконы показан на рис.2а.

Ход лучей через конический аксикон.

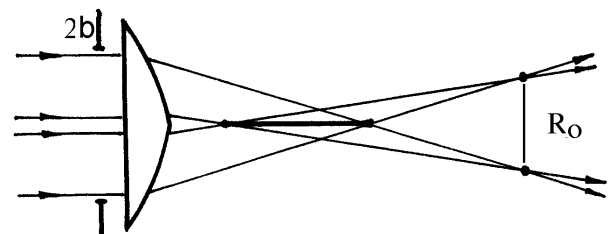
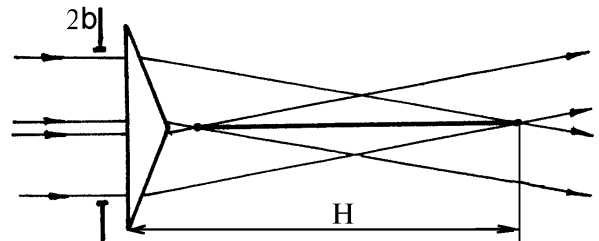


Рис. 2а и 2б.

Вторая каустика аксикона является кольцом и так же как и каустика плоской волны, она уходит в бесконечность, потому что лучи, формирующие ее, параллельны друг другу. В терминах теории дифракции можно сказать, что она создается в дальней зоне дифракции. Эту каустику легко наблюдать, помещая следом за аксиконом линзу с фокусным расстоянием F . Распределение интенсивности в кольцевой каустике [12] находится как преобразование Фурье-Бесселя от функции пропускания оптического элемента:

$$I(r, \varphi, h) = I_0 \kappa^2 F^{-2} \left| \int_0^b t(\rho) J_0\left(\frac{\kappa \rho r}{F}\right) \rho d\rho \right|^2 \quad (4)$$

Из (4) для конического аксикона диаметром $2b$ получаем:

$$I(r, \varphi, F) = \left| 1,5y^{-3/2} \int_0^y \exp(i\xi) \sqrt{\xi} d\xi \right|^2, \quad (5)$$

где $y = \kappa b (R_0 - r) / F$, R_0 - радиус кольца.

Наличие двух каустик наиболее ярко проявляется у аксикона с фазовой функцией пропускания $f_4(\rho)$ [5]:

$$f_4(\rho) = -\kappa(\rho + R_0)^2 / 2F.$$

Ход лучей показан на рис.2б. Обе каустики находятся на конечном расстоянии от аксикона f_4 . Распределение интенсивности в каустиках описывается приведенными выше выражениями (3),(5). Наличие слагаемого $(-\kappa\rho^2/2F)$ в функции f_4 приводит к смещению стационарных точек ρ_s по сравнению с коническим аксиконом, у которого $\alpha = \kappa R_0 / F$, и не влияет на вид распределения интенсивности вдоль осевой каустики [9], приводя лишь к изменению ее диаметра.

3. Дифракционные ограничения для "бездифракционных" пучков.

Из вида фазовой функции пропускания следует, что аксиконы формируют тороидальные волны. Количество каустик, наблюдаемых на конечном расстоянии от элемента зависит от вида фазовой функции пропускания. Кольцевая и осевая каустики образуются в различных зонах дифракции и это приводит к принципиальным различиям в их характеристиках.

Осевая область фокусировки имеет вид тела вращения [8,9]. У конического аксикона - это цилиндр, длина которого $H = b / \alpha$, диаметр d по первым нулям функции Бесселя равен $5/\kappa\alpha$ и не зависит от осевой координаты. Интенсивность на оси линейно возрастает вдоль фокального отрезка, достигая максимального значения при $h=H$, если у исходного пучка $I_0(\rho) = \text{const}$. В окрестности точки максимальной интенсивности проявляется и хорошо наблюдается влияние дифракции на краях апертуры аксикона: вначале в виде плавного спада интенсивности на оси, затем при дальнейшем увеличении координаты h - в виде колебаний интенсивности, и по мере приближения к кольцевой каустике, на оси наблюдается слабое по яркости светлое пятно, размеры которого соответствуют дифракционным [12].

Распределение интенсивности в любом поперечном сечении воспроизводится и полностью определяется функцией Бесселя нулевого порядка, что и дает повод называть такие каустики "бездифракционными" или точнее "бесселевыми" пучками. Проведем геометрическое рассмотрение этой особенности. Сравним ход лучей через аксикон и цилиндрическую линзу. Хорошо известно, что цилиндрическая линза (Рис.3) так же формирует каустику в виде прямой (или в общем случае произвольной) линии. Каждая точка кау-

стики цилиндрической волны формируется лучами, приходящими из узкой области Γ_2 на поверхности линзы, которая пересекает всю апертуру линзы и содержит в себе два противоположных отрезка А и В границы апертуры, что и обуславливает дифракционные размеры точки. Причем волновые векторы перпендикулярны оси цилиндрической каустики.

В отличие от цилиндрической, каждая точка конической каустики (Рис.1) формируется лучами, приходящими из узкой области Γ_1 на поверхности аксикона, и эта область полностью лежит в пределах апертуры элемента и не содержит точек границы. Волновые векторы пересекают ось каустики под одним и тем же углом β , который задается функцией пропускания элемента $\beta = \text{tg } \alpha$. Вершина конуса лучей, сходящихся в осевую точку Р "вычерчивает" осевую фокальную линию. Физически, возрастание энергии в точке фокальной линии (вершина конуса) происходит вследствие интерференции лучей, а дифракция на краях апертуры аксикона не искажает картину.

Ход лучей через цилиндрическую линзу.

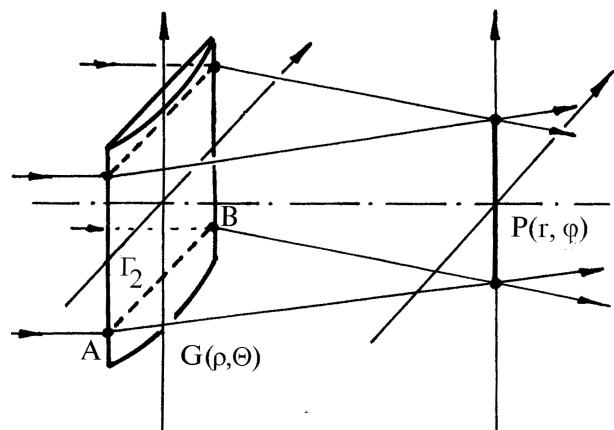


Рис. 3

Вторая, кольцевая, каустика аксикона имеет характеристики, аналогичные каустике цилиндрической линзы. Форма ее определяется симметрией задачи и функцией пропускания элемента. Угловая зависимость в распределении интенсивности отсутствует, ширина кольца ограничивается дифракцией на границе апертуры аксикона и равна $\lambda E / 2b$.

Функция пропускания конического аксикона приобретает вид (1) после добавления в фазовую функцию слагаемого $m\theta$, зависящего от угловой координаты θ в плоскости элемента. Это приводит к тому, что на конический волновой фронт накладывается винтовая. Волновые векторы пересекают точку оси под разными углами, вследствие чего на оси лучи гасятся и наблюдается интерференционный минимум интенсивности. Модуль амплитуды поля $U(r, \varphi, h)$ в поперечном сечении осевой каустики и определяется функцией Бесселя m -ого порядка,

угловая зависимость $m\varphi$ сохраняется только в фазовой функции.

$$U(r, \varphi, h) = -i\alpha U_0 \sqrt{\lambda h} \exp[i \times \left(\kappa h + \frac{\kappa r^2}{2h} - \frac{\alpha^2 h}{2\kappa} + m\varphi \right)] J_m(\alpha r) \quad (6)$$

Если отсутствуют иные световые поля, то есть если нет паразитных дифракционных порядков или оптический элемент используется не в интерферометре, то угловой зависимости в распределении интенсивности не наблюдается.

В дальней зоне дифракции формируется кольцевая каустика с угловой зависимостью по фазе вдоль кольца $m\varphi$. Распределение интенсивности в поперечном сечении кольца теряет симметрию относительно точки $r = R_0$ [13,14], степень асимметрии зависит от величины m .

Таким образом, термин "бездифракционные пучки" применяется для обозначения ограниченной в пространстве части тороидальной волны. И световая линия, осевая каустика, является результатом интерференции пересекающихся областей этой волны. С точки зрения такого понимания применительно к дифракционным оптическим элементам "бездифракционные пучки" могут формироваться при пересечении волновых фронтов. Например, они возникают всякий раз при пересечении и интерференции порядков дифракции. Подобное понимание позволяет находить феноменологические модели для построения дифракционных структур, создающих новые "бездифракционные" пучки.

4. Дифракционная структура модулированного аксикона.

Дифракционные оптические элементы обычно изготавливаются по технологии фотолитографии, когда непрерывный фазовый профиль оптического элемента заменяется ступеньчатым. В ряде случаев используются амплитудные маски. Расчетная фазовая функция реализуется в первом порядке дифракции, где в случае амплитудного дифракционного оптического элемента концентрируется лишь 10% энергии. Остальные дифракционные порядки являются паразитными и интерферируют с первым, если используется когерентный источник света. Теоретические же рассмотрения оптических свойств элементов, формирующих "бездифракционные пучки", проводятся для непрерывных фазовых профилей [15, 16]. И это приводит не только к неадекватному описанию, но и не позволяет находить нестандартные решения. А ведь паразитные порядки дифракционных структур могут быть использованы для формирования каустик в ближней зоне дифракции. Далее в разделе 4 приводится описание дифракционной структуры решетки, в формировании каустики которой участвуют все порядки дифракции. Предлагаемая

решетка обладает всеми свойствами модулированного аксикона.

В первом порядке дифракции амплитудная равномерная круговая решетка реализует как функцию пропускания t_1 при $m=0$ (конический аксикон), так и функцию t_2 при $m=0$. Это очевидно из разложения [17] функции пропускания $\text{sgn}[\cos(\alpha\rho - \pi/4)]$ такой решетки в следующий ряд:

$$t_2(\rho) = b_0 + \sum_{m>0} \{ b_m e^{im\alpha\rho} + b_{-m} e^{-im\alpha\rho} \} \quad (7)$$

где тригонометрические члены $\exp(\pm im\alpha\rho)$ являются функциями пропускания "собирающего" и "рассеивающего" конических аксиконов. Из (7) следует, что в ближней зоне дифракции наблюдается осевая каустика, распределение интенсивности в которой описывается суммой функций Бесселя нулевого порядка.

Радиальный сдвиг m секторов дифракционной структуры согласно методу детур- фазы реализует угловую модуляцию $m\varphi$ фазовой функции пропускания t_2 подобно тому, как амплитудная круговая решетка реализует часть функции пропускания t_2 , зависящую от радиальной координаты. Винтовые волновые фронты появляются в каждом порядке дифракции. С позиции теоретического рассмотрения, общепринятого для дифракционных оптических элементов, описанное построение дифракционной структуры позволяет получить функцию пропускания $t_2(\rho, \vartheta)$ для первого порядка дифракции. Но особенность каустик ближней зоны дифракции заключается в том, что разделить пространственно порядки дифракции здесь не удастся. Поэтому осевая каустика решетки формируется в результате суперпозиции многих тороидальных световых волн. Интерференция приводит к распределению интенсивности в каустике, отличному от предполагаемому для основного первого порядка дифракции. Но именно благодаря интерференции возникает каустика, обладающая всеми свойствами "бездифракционности".

5. Экспериментальные результаты.

Фрагмент амплитудного дифракционного аксикона, модулированного по угловой координате, показан на рис.4. Дифракционная структура изготовлена по термохимической технологии [5] на специализированном лазерном фотопостроителе в тонкой пленке хрома, нанесенную на стеклянную подложку. Равномерная круговая решетка с периодом 15 мкм промодулирована по угловой координате согласно фазовой функции $\text{sgn}(\sin(3\varphi))$ путем сдвига дифракционной структуры в трех секторах и имеет диаметр 40мм.

Экспериментальное изучение распределения интенсивности в каустиках проводилось на оптической скамье. Луч одномодового He-Ne лазера (длина световой волны 632,8нм) расширялся телескопом из двух объективов и фокусировался дифракционным

элементом. Неоднородность интенсивности по рабочей поверхности составляла менее 1%.

Центральная часть амплитудной маски.

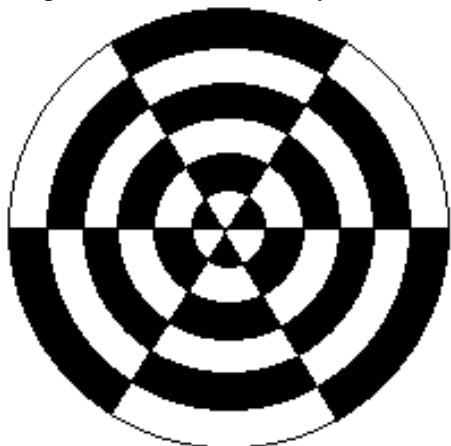


Рис. 4

Поперечное сечение фокального отрезка. Длина фокального отрезка - 250 мм, характерный поперечный размер - 60 мкм.

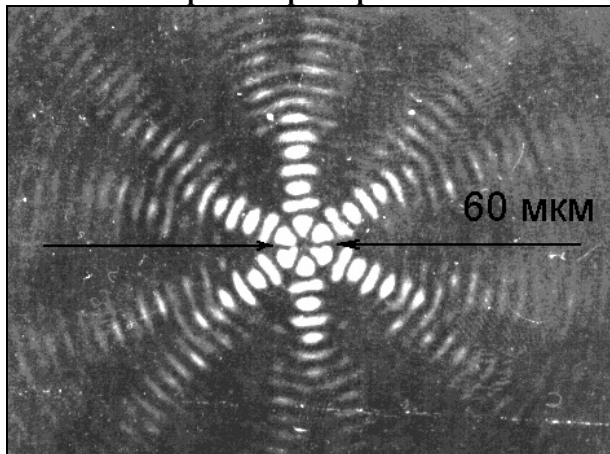


Рис. 5

Фрагмент кольцевой каустики

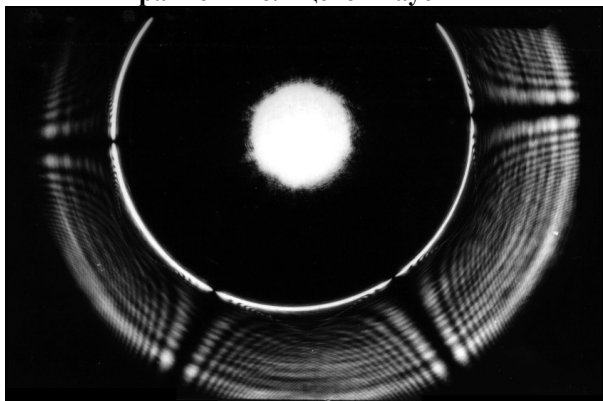


Рис. 6

Модулированный аксикон имеет в ближней зоне дифракции бездифракционную осевую каустику, показанную на Рис.5. Эта сложная картина возникает в результате пересечения и интерфе-

ренции порядков дифракции, она остаётся неизменной вдоль оси на расстояниях порядка 250 мм и имеет минимум на оптической оси. Характерный поперечный размер осевой каустики составляет 60 мкм (см. рис. 5) и не зависит от размера рабочей апертуры, которая определяет её длину. В дальней зоне в первом порядке дифракции наблюдается кольцо, ширина которого дифракционно ограничена и зависит от параметров используемого объектива. Распределение интенсивности в кольце модулировано по углу шестью провалами. Фрагмент кольца изображен на Рис.6.

6. Заключение.

Проведённое рассмотрение демонстрирует возможность формирования двух и более каустик различного типа, как дифракционно ограниченных, так и "бездифракционных", с помощью одного дифракционного оптического элемента.

Угловая модуляция структуры дифракционного аксикона позволяет формировать световую линию с минимумом интенсивности на оптической оси. Применение модулированных аксиконов в приборах для контроля прямолинейности поверхностей или прямолинейности перемещения неподвижных узлов машин позволит повысить точность контроля, поскольку положение минимума интенсивности регистрируется гораздо точнее, чем положение максимума.

Настоящая работа выполнялась в рамках программы гранта Международного Научного Фонда (JD9100). Автор благодарит Ю.И.Юрлова за изготовление дифракционного аксикона.

Литература

1. J.Durnin, J.J.Miceli,Jr, J.H.Eberly, Physical Review Letters, **58**, (1987) 1499.
2. J.Durnin, J.Opt.Soc.Am.A., **5**, (1987) 651.
3. A.B.Valyaev, S.G.Krivoshlykov, Quantum electronics, **16**, (1989) 1047.
4. V.V.Kotlyar, V.A.Soifer, S.N.Khonina. Quantum electronics, **18**, (1991) 1391.
5. V.P.Koronkevitch, G.A.Lenkova, I.A.Mihal'tsova, I.G.Palchikova, etc., Optoelectronics, Instrumentation & Data Processing, **1**, (1985) 1.
6. Ch.Frere, D.Leseberg, O.Bryngdahl. J. Opt. Soc. Am. A., **3**, (1986) 726.
7. D.Leseberg, Applied optics, **26**, (1987) 4385.
8. I.G.Pal'chikova, Optoelectronics, Instrumentation & Data Processing, **6**, (1988) 78.
9. I.G.Palchikova : The Synthesis of the Kinoform Phase Axicon Structure. (In russian) Preprint of the Institute of Automation and Electrometry Sib.Br.USSR Ac.of Sc., N328, Novosibirsk, 1986.
10. М.Борн, Э. Вольф. Основы оптики, М. : Наука, 1970, 856 с.
11. R.W. Wood. Physical Optics, New York, The Macmillan Company, 1934. (Р. Вуд, Физическая оптика, Ленинград, Объединённое научно-техническое издательство, 1936, 896 с.)

12. V.P. Koronkevitch, I.G. Palchikova, A.G. Poleshchuk, etc.: Kinoform Optical Elements with a Ring Pulse Responce. (In russian) Preprint of the Institute of Automation and Electrometry Sib.Br. USSR Ac.of Sc., N265, Novosibirsk, 1985.

13. A. Fedotowsky, K. Lehovec, Applied optics, **13**, (1974) 2919.

14. A. Fedotowsky, K. Lehovec, Applied optics, **13**, (1974) 2638.

15. Z. Jaroszewicz, in Diffractive Optics: Design, Fabrications, and Applications. 1994 Technical Digest Series, Vol.11, p.228 .

16. J. Turunen, A. Vasara, A.T. Friberg, Applied Optics, **28**, (1989) 682.

17. A. Boivin. Theorie et Calcul des Figures de Diffraction de Revolution Gauthier Villars, Les Presses de l'Universite Laval, Quebec, 1964.

И.Г.Пальчикова

"БЕЗДИФРАКЦИОННЫЕ ПУЧКИ" И ИХ КАУСТИКИ.

Аннотация.

В настоящей работе обсуждается возможность формирования фокальных областей в различных зонах дифракции и доказывается, что термин "бездифракционные пучки" применяется для обозначения ограниченной в пространстве части тороидальной световой волны. Световая линия, или осевая каустика, является результатом интерференции пересекающихся областей этой волны. Показано, что "бездифракционные пучки" формируются такими оптическими элементами, фазовая функция пропускания которых содержит линейные по радиальной координате слагаемые. Выполнено сравнение оптических характеристик каустик в ближней и в дальней зонах дифракции. Сообщается о синтезе нового дифракционного модулированного аксикона, который формирует две фокальные области различного типа. Приводятся результаты экспериментального исследования его оптических характеристик.

I.G.Palchikova

"NONDIFFRACTING BEAMS" AND CAUSTICS.

Abstract.

The attention is focused on the fact that focal regions may be formed in the different diffraction fields. At the near field of diffraction the focal segment can be formed during the intersection and interference of wave fronts, the same way as "nondiffracting beams". It is found that "nondiffracting beams" are generated by any optical element, which phase transmission function involves the linear in radial coordinate term, and so "nondiffracting beam" is the limited in space part of the toroidal wave. The comparison of optical characteristics of the near and the far diffraction field caustics is carried out.

The new diffractive modulated axicon is proposed. It forms two focal regions of different types. The results of experimental investigations for the modulated axicon are represented.

Diffraction-free beams and their caustics

I.G. Palchikova

Abstract

We discuss the feasibility of generating focal areas in different diffraction fields and prove that the term “diffraction-free beams” is used to designate a spatially limited portion of the toroidal light wave. The light line, or axial caustic, is a result of interference of intersecting areas of this wave. It is shown that the “diffraction-free beams” are generated by such optical elements whose phase transmission function includes linear terms with respect to the radial coordinate. A comparison of optical characteristics of caustics in the near- and far-diffraction fields is made. Synthesis of a new diffraction-modulated axicon that forms two focal areas of different types is reported. The results of experimental studies of its optical characteristics are discussed.

Citation: Palchikova IG. Diffraction-free beams and their caustics. *Computer Optics* 1996; 16: 35-40.

References

- [1] Durnin J, Miceli JJ Jr, Eberly JH. *Physical Review Letters*; 1987; 58: 1499.
- [2] Durnin J. *J.Opt.Soc.Am.A.*; 1987; 5: 651.
- [3] Valyaev AB, Krivoslykov SG. *Quantum electronics*; 1989; 16: 1047.
- [4] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. *Quantum electronics*; 1991; 18: 1391.
- [5] Koronkevitch VP, Lenkova GA, Mikhaltsova IA, Palchikova IG et al. *Optoelectronics, Instrumentation & Data Processing*; 1985; 1: 1.
- [6] Frere C, Leseberg D, Bryngdahl O. *J.Opt.Soc.Am.A.*; 1986; 3: 726.
- [7] Leseberg D. *Applied optics*; 1987; 26: 4385.
- [8] Palchikova IG. *Optoelectronics, Instrumentation & Data Processing*; 1988; 6: 78.
- [9] Palchikova IG. The synthesis of the kinoform phase axicon structure. Preprint of the Institute of Automation and Electrometry Sib.Br.USSR Ac.of Sc.; Novosibirsk: 1986; 328.
- [10] Born M, Wolf E. *Basics of optics*; Moscow: Nauka Publisher; 1973; 856.
- [11] Wood RW. *Physical Optics*; New York: The Macmillan Company; 1934; 896.
- [12] Koronkevitch VP, Palchikova IG, Poleshchuk AG et al. Kinoform optical elements with a ring pulse response. Preprint of the Institute of Automation and Electrometry Sib.Br. USSR Ac.of Sc.; Novosibirsk: 1985; 265.
- [13] Fedotowsky A, Lehovec K. *Applied optics*; 1974; 13: 2919.
- [14] Fedotowsky A, Lehovec K. *Applied optics*; 1974; 13: 2638.
- [15] Jaroszewicz Z. *Diffraction Optics: Design, Fabrications, and Applications*; Technical Digest Series; 1994; 11: 228.
- [16] Turunen J, Vasara A, Friberg AT. *Applied Optics*. 1989; 28: 682.
- [17] Boivin A. *Theorie et Calcul des Figures de Diffraction de Revolution* Gauthier Villars, Les Presses de l'Universite Laval; Quebec: 1964.