

МЕТОДЫ И ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОДНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В РАМКАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Д.Л. Головашкин, А.А. Дегтярёв *, В.А. Сойфер

Институт систем обработки изображений РАН,

*) Самарский государственный аэрокосмический университет

Введение

В связи с развитием численных методов и прогрессом в области вычислительной техники появилась возможность численного решения уравнений Максвелла. Таким образом, наложением соответствующих граничных условий и подстановкой в уравнения параметров среды возможно моделирование процесса распространения излучения в различных средах.

В работе [1] изложен разностный метод решения уравнений Максвелла и получены результаты для оптических интегральных схем. В нашей работе проводятся исследования градиентных сред и дифракционных оптических элементов. Для этого применяется разностная схема «push-pull», которая позволяет исследовать градиентные волокна на малых расстояниях и дифракционные оптические элементы непосредственно за их плоскостью. Разностный метод реализован для решения уравнений Максвелла в декартовых координатах в случае ТЕ поляризованной волны. Для ТМ поляризации может быть построена аналогичная схема при других граничных условиях.

1. Постановка задачи о распространении излучения

Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных полей в диэлектрике, выглядят следующим образом [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_{zz}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial H_y}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_{yy}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial H_x}{\partial \tau} &= \frac{1}{\mu_{xx}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{yy}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial E_x}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

где E и H электрическая и магнитная составляющие поля, $\tau=ct$, c - скорость света в свободном пространстве, t - время, ε и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Пусть среда представляет собой тонкий слой, расположенный в плоскости (Y,Z) , а излучение направлено вдоль оси Z . В случае ТЕ поляризованной волны уравнения (1) примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial \tau} &= \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial H_y}{\partial \tau} &= \frac{\partial E_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} &= -\frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \right. (2)$$

Будем полагать, что на границе $E_x = 0$. Это справедливо, например, для планарного волновода, заключенного в металлическую оболочку. Такой волновод будет соответствовать волноводу без оболочки в случае, если:

- изгиб не превышает критического угла α , который соответствует переходу возбужденной моды высшего порядка в первую воздушную радиационную моду;
- неоднородностями показателя преломления, которые вызывают появление воздушных мод, можно пренебречь.

2. Метод «push-pull» численного решения уравнений Максвелла

Будем решать систему (2) посредством конечных разностей. Для этого рассмотрим множество функций $E_x(z, y, \tau)$, $H_y(z, y, \tau)$, $H_z(z, y, \tau)$ в области

$$D = \left\{ 0 \leq z \leq L, -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \tau \leq T \right\},$$

где L – длина волновода, d – ширина волновода, $T = ct_1$, t_1 – длительность эксперимента.

Определим на ней сетку:

$$\omega_{\Delta z \Delta y \Delta \tau} = \{(z_i, y_j, \tau_n) \in D\}$$

где (z_i, y_j, τ_n) – узлы сетки, причем

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$0 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1.$$

Шаги сетки определяются формулами:

$$\Delta z = \frac{L}{N_1 - 1};$$

$$\Delta y = \frac{d}{N_2 - 1};$$

$$\Delta \tau = \frac{T}{N_3 - 1}.$$

В уравнениях Максвелла (2) произведем расщепление

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{\partial H_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{\partial H_z}{\partial y}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial z}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} = -\frac{\partial E_x}{\partial y}, \end{array} \right. \quad (3)$$

где $n^2(y) = \varepsilon_{xx}$.

Основываясь на общих принципах, изложенных в [2], построим неявную разностную схему расщепления. Запишем систему разностных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta \tau} = -\frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta y}; \\ \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{\tilde{E}_{x_{i+1,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = -\frac{E_{x_{i,j+1}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta y}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Система (4) аппроксимирует (3) в узлах (z_i, y_j, τ_n) при значениях индексов:

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$1 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1.$$

Подставив третье уравнение системы (4) в первое и четвертое во второе, получим разностные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i-1,j}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta \tau} - 2 \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \right) \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i+1,j}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta \tau} E_{x_{i,j}}^n - \\ & - \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i,j}}^n + \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i-1,j}}^n; \\ & \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta y^2} E_{x_{i,j-1}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta \tau} - 2 \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta y^2} \right) E_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta y^2} E_{x_{i,j+1}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta \tau} \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - \\ & - \frac{1}{n^2(y) \Delta y} H_{z_{i,j}}^n + \frac{1}{n^2(y) \Delta y} H_{z_{i,j-1}}^n, \end{aligned}$$

которые решаются методом прогонки.

В узлах (x_i, y_j, τ_k) при значениях индексов:

$$0 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$j = 0;$$

$$0 \leq n \leq N_3 - 1$$

построим альтернативную систему аппроксимирующих уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{y_{i+1,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta \tau} = -\frac{1}{n^2(y)} \frac{H_{z_{i,j+1}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^{n+1}}{\Delta y}; \\ \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = \frac{\tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - \tilde{E}_{x_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta \tau} = -\frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta y}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Подставив третье уравнение системы (5) в первое и четвертое во второе, получим разностные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i-1,j}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta \tau} - 2 \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \right) \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta \tau}{n^2(y) \Delta z^2} \tilde{E}_{x_{i+1,j}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta \tau} E_{x_{i,j}}^n - \\ & - \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i+1,j}}^n + \frac{1}{n^2(y) \Delta z} H_{y_{i,j}}^n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta\tau}{n^2(y)\Delta y^2} E_{x_{i,j-1}}^{n+1} + \left(-\frac{1}{\Delta\tau} - 2\frac{\Delta\tau}{n^2(y)\Delta y^2} \right) E_{x_{i,j}}^{n+1} + \\ & + \frac{\Delta\tau}{n^2(y)\Delta y^2} E_{x_{i,j+1}}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta\tau} \tilde{E}_{x_{i,j}}^{n+1} - \\ & - \frac{1}{n^2(y)\Delta y} H_{z_{i,j+1}}^n + \frac{1}{n^2(y)\Delta y} H_{z_{i,j}}^n, \end{aligned}$$

так же решаемые методом прогонки.

Теперь зная электрическое поле определим магнитное как

$$\begin{cases} \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = \frac{E_{x_{i+1,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = -\frac{E_{x_{i,j+1}}^{n+1} - E_{x_{i,j}}^{n+1}}{\Delta y} \end{cases}$$

при значениях индексов:

$$\begin{aligned} 0 & \leq i \leq N_1 - 1; \\ 1 & \leq j \leq N_2 - 1; \\ 0 & \leq n \leq N_3 - 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{cases} \frac{H_{y_{i,j}}^{n+1} - H_{y_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = \frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i-1,j}}^{n+1}}{\Delta z}; \\ \frac{H_{z_{i,j}}^{n+1} - H_{z_{i,j}}^n}{\Delta\tau} = -\frac{E_{x_{i,j}}^{n+1} - E_{x_{i,j-1}}^{n+1}}{\Delta y} \end{cases}$$

при значениях индексов:

$$\begin{aligned} 0 & \leq i \leq N_1 - 1; \\ j & = 0; \\ 0 & \leq n \leq N_3 - 1. \end{aligned}$$

Возьмем в качестве граничного условия $E_x|_{\Gamma} = 0$ и торцевого условия

$$E_x = A(y) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ где } A - \text{ действительная}$$

амплитуда волны в скалярном приближении.

В системе (4) аппроксимации пространственных производных в первых двух уравнениях являются левыми, а во вторых двух уравнениях - правыми. В системе (5) наоборот. Поэтому (4) и (5) можно условно назвать схемой «push-pull». Она позволяет отказаться от использования краевых условий для магнитного поля, что существенно упрощает задачу.

Схема (4), (5) аппроксимируют краевую задачу (2) с погрешностью аппроксимации $O(\Delta\tau, \Delta z, \Delta y)$. Доказательство этого не является предметом рассмотрения данной статьи.

3. Результаты численного моделирования распространения излучения

Построим примеры для тестирования полученной разностной схемы и представим практические приложения.

Пример 1. Для планарного вакуумного волновода с металлическими стенками модой будет являться следующая TE волна [3]:

$$\begin{cases} E_x = \cos(ay) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - a^2}z - \omega t) \\ H_y = -\frac{1}{k} \sqrt{k^2 - a^2} \cdot \cos(ay) \cdot \cos(\sqrt{k^2 - a^2}z - \omega t) \\ H_z = -\frac{1}{k} a \cdot \sin(ay) \cdot \sin(\sqrt{k^2 - a^2}z - \omega t) \end{cases} \quad (6)$$

где k -волновое число, $a = \frac{2\pi}{d}$.

Зададим начальные условия, приняв в (6) $t=0$. На рисунке 1 представлен результат, полученный численно для значений параметров: $t = 1 \cdot 10^{-11}$ с, $\Delta t = 4.2 \cdot 10^{-15}$ с, $d=60$ мкм, $L=3$ мкм, $\Delta x = 2.36 \cdot 10^{-2}$ мкм, $\Delta y = 1.935$ мкм, $\lambda=0.63$ мкм.

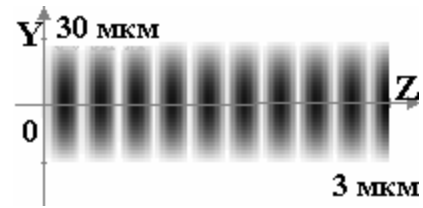


Рис.1. Численное моделирование распространения моды (6) в вакуумном волноводе.

Визуально результат соответствует ожидаемому представлению электрической составляющей в виде косинусоиды. Численный анализ показывает наличие погрешности, зависящей от величин шагов дискретизации $\Delta\tau, \Delta z, \Delta y$.

Пример 2. Рассмотрим распространение той же волны [3] с теми же параметрами дискретизации в стекле с показателем преломления $n=1.458$, полагая, что волна падает из вакуума на полубесконечный стеклянный волновод.

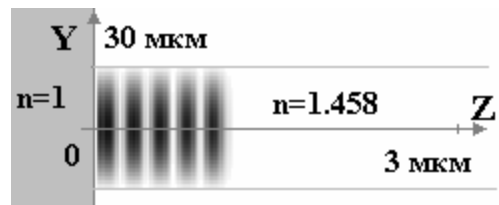


Рис.2. Численное моделирование распространения моды (6) в стеклянном волноводе с показателем преломления $n=1.458$.

Из рисунка 2 можно заметить изменение формы импульса, обусловленное отличием скорости света в стекле относительно вакуума в п

раз. Изменение состоит в том, что импульсы сжимаются пропорционально σ .

Пример 3. Проследим распространение моды Гаусса-Лагерра [4]

$$\Psi_1 = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} L_1^0 \left(\frac{2y^2}{\sigma^2} \right)$$

в волноводе с градиентным профилем показателя преломления

$$n^2(y) = n_1^2 \left(1 - 2\Delta \left(\frac{y}{d} \right)^2 \right),$$

где L_1^0 - обобщенный полином Лагерра, эффективный радиус моды $\sigma=5.6$ мкм, $n_1=1.458$, $\Delta=0.009$, $d=60$ мкм.

Шаги дискретизации возьмем следующими: $\Delta t = 4.2 \cdot 10^{-15}$ с, $d=60$ мкм, $L=3$ мкм, $\Delta x = 1.003 \cdot 10^{-2}$ мкм, $\Delta y = 4.72 \cdot 10^{-1}$ мкм, $\lambda=0.63$ мкм. $t = 1 \cdot 10^{-11}$. Результат моделирования представлен на рисунке 3.

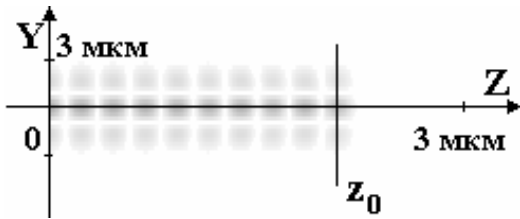


Рис.3. Распространение моды Гаусса-Лагерра в волноводе с градиентным показателем преломления.

Для визуальной наглядности рассмотрим распределение амплитуды на входном торце волновода ($z=0$), представленное на рисунке 4 и в волноводе ($z=z_0$), представленное на рисунке 5.

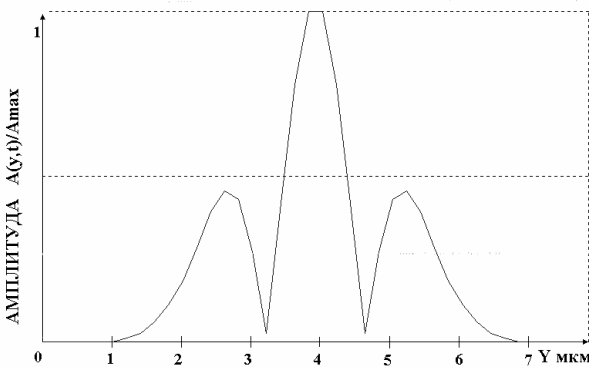


Рис.4. Распределение амплитуды моды Гаусса-Лагерра на входном торце градиентного волновода.

Из графиков видно, что мода сохранила характерные максимумы, хотя максимальное значение амплитуды несколько уменьшилась. Это связано с наличием погрешности дискретизации. Ширина волновода составляет 60 мкм в то время, как эффективный радиус моды Гаусса-Лагерра - 5.6 мкм, поэтому из 200 точек дискретизации по оси Y только 18 несут информацию о моде. При увеличении числа точек дискретизации возрастают затраты времени. В рассматриваемом случае численный эксперимент длился 14 часов на компьютере Pentium II с тактовой частотой 233 МГц. Необходимо отметить, что с уменьшением шага дискретизации точность эксперимента повышается.

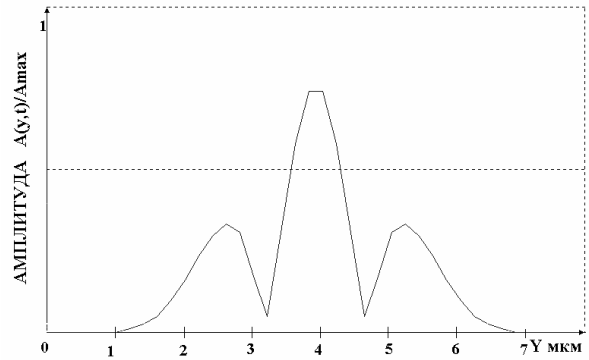


Рис.5. Распределение амплитуды моды Гаусса-Лагерра в градиентном волноводе ($z=z_0$).

Пример 4. Рассмотрим прохождение ТЕ поляризованной волны ($\lambda=1$ мкм) по планарному волноводу через цилиндрическую фокусирующую линзу. На рисунке 6 представлен результат численного моделирования для линзы, радиус кривизны которой 5 мкм, апертура 8 мкм, фокусное расстояние для данной длины волны 5 мкм, показатель преломления равен 2, а волна содержит 8 цугов. Заметим, что волновой фронт после линзы является сферическим. Распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы представлено на рисунке 7.

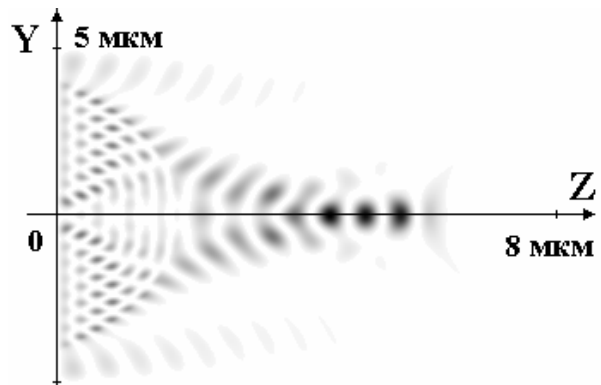


Рис.6. Распределение интенсивности света в меридиональном сечении цилиндрической линзы.

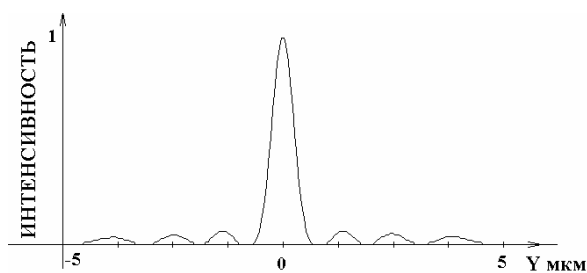


Рис.7. Распределение интенсивности света в фокальной плоскости цилиндрической линзы.

Пример 5. Заменяем линзу дифракционным оптическим элементом с двумя градациями, как показано на рисунке 8.

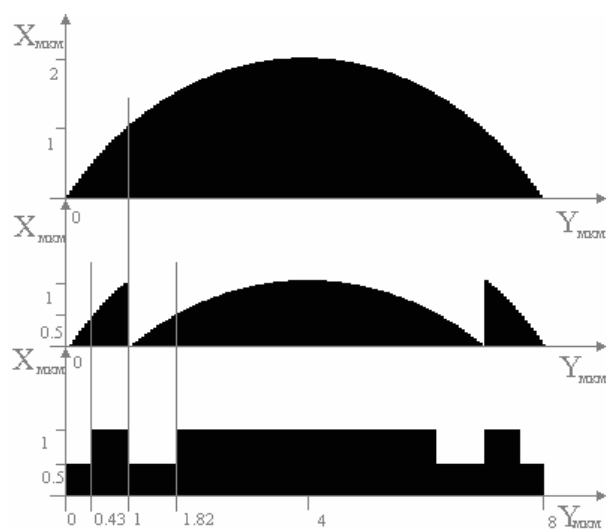


Рис.8. Синтез дифракционной линзы.

Результаты численного моделирования представлены на рисунках 9,10.

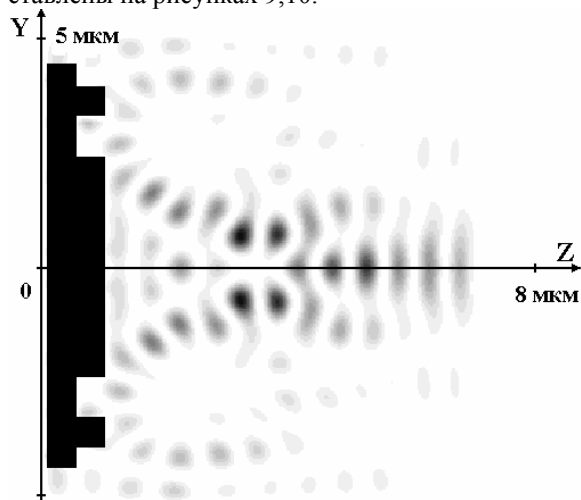


Рис.9. Распределение интенсивности света в меридиональном сечении дифракционной линзы.

Необходимо отметить, что интенсивность, представленная на рисунках 7, 10, не является интегральной интенсивностью, характеризующей эффективность оптических элементов.

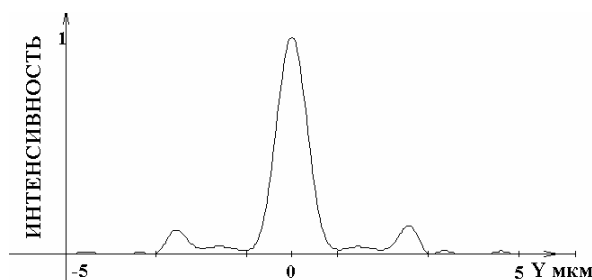


Рис.10. Распределение интенсивности света в фокальной плоскости цилиндрической дифракционной линзы.

4. Заключение

В представленной работе предложен численный метод решения системы уравнений Максвелла и проведено его тестирование. Изложенный метод может использоваться для решения широкого класса задач дифракционной и интегральной оптики. Однако необходимо отметить некоторые недостатки. К ним относятся низкий порядок аппроксимации разностной схемой исходной задачи и значительные затраты вычислительных ресурсов, что, в частности, не позволяет использовать метод для расчета полей в волноводах большой протяженности. Дальнейшую работу авторы видят в модификации метода «push-pull» с целью повышения его точности; применении метода для исследования системы двух скрещенных цилиндрических линз, сферической линзы; создания рекурсивного метода расчета поля в волноводах большой протяженности.

Благодарность

Авторы благодарят В.В. Котляра и С.И. Харитонову за помощь в работе и обсуждение результатов.

Список литературы

1. **Chu S.T., Huang W.P., Chaudhuri S.K.**, Simulation and analysis of waveguide based optical integrated circuits, Computer Physics Communications, 68,1991.
2. **Самарский А.А.**, Теория разностных схем, М. «Наука», 1989.
3. **Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П.**, Дифракция и волноводное распространение оптического излучения, М. «Мир», 1984.
4. **Soifer V.A., Golub M.A.**, Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1994.

Modeling the waveguide optical radiation propagation using the electromagnetic theory

*D.L. Golovashkin, A.A. Degtyarev¹, V.A. Soifer
Image Processing Systems Institute of RAS
¹Samara State Aerospace University*

Abstract

The development of numerical methods and the advances in the field of computer technology provide for the numerical solution of Maxwell's equations. Thus, it is possible to simulate the process of radiation propagation in various media by imposing the appropriate boundary conditions and substituting the parameters of the media into the equations.

The paper [1] presents a difference method for solving Maxwell's equations and obtains the results for optical integrated circuits. In our work, we study gradient media and diffractive optical elements. For this purpose, we use a "push-pull" difference scheme, which allows to study gradient fibers at short distances and the diffractive optical elements directly behind their plane. The difference method is implemented for solving Maxwell's equations in Cartesian coordinates for the case of a TE polarized wave. A similar scheme can be developed for the TM polarization under other boundary conditions.

Citation: Golovashkin DL, Degtyarev AA, Soifer VA. Modeling the waveguide optical radiation propagation using the electromagnetic theory. *Computer Optics* 1997; 17: 5-9.

References

- [1] Chu S.T., Huang W.P., Chaudhuri S.K., Simulation and analysis of waveguide based optical integrated circuits, *Computer Physics Communications*, 68,1991.
- [2] Samarskii AA. *Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka Publisher; 1977.
- [3] Solimeno S, Crosignani B, Di Porto P. *Diffraction and waveguide propagation of optical radiation*. Moscow: Mir Publisher; 1989: 662.
- [4] Soifer VA, Golub MA. *Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms*. Florida: CRC Press; Boca Raton; 1994.