

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОПОРЯДКОВЫХ БИНАРНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Л.Л. Досколович

Институт систем обработки изображений РАН

Разработан градиентный метод расчета диэлектрических бинарных решеток. Метод состоит в итерационной коррекции координат профиля решетки и использует для расчета дифрагированного поля точный дифференциальный метод. Получены аналитические матричные представления для градиента функционала невязки, представляющего ошибку формирования заданных интенсивностей прошедших через решетку порядков. Приведены примеры расчета решеток для формирования 5-11 равных порядков.

1. Введение

Широкое использование многопорядковых дифракционных решеток [1-4] требует развития эффективных и точных оптимизационных процедур расчета решеток. Многопорядковые решетки с бинарным (двухуровневым) профилем рельефа представляют особый интерес вследствие наибольшей простоты изготовления. Как правило расчет дифракционных решеток производится в скалярном приближении Кирхгофа, которое применимо только при $d \gg \lambda$, где d – период решетки, λ – длина волны освещающего пучка. Многопорядковые решетки, рассчитанные на основе разработанных итерационных и градиентных алгоритмов для приближения Кирхгофа [5-10], оказываются неработоспособными при малых периодах $d=2-10\lambda$ [11].

В работе [11] на основе точного метода модового разложения [4,12] разработан градиентный алгоритм расчета многопорядковых отражающих бинарных дифракционных решеток, изготовленных из идеально-проводящего материала. В данной работе предлагается градиентный метод расчета диэлектрических бинарных решеток на основе точного дифференциального метода [4]. Градиентный метод сос-

тоит в итерационном расчете координат бинарного профиля решетки из условия формирования заданных интенсивностей прошедших через решетку порядков. При этом использование матричных представлений для поля в зоне модуляции дает аналитическое выражения для градиента функционала невязки, представляющего ошибку формирования заданных порядков.

2. Дифференциальный метод

Рассмотрим дифракцию плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = k_0(\sin(\theta), -\cos(\theta), 0)$, где $k_0=2\pi/\lambda$, λ – длина волны, на бинарной диэлектрической решетке с периодом d , изготовленной из материала с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис.1). Для приведенной на рис.1 геометрии задачи имеется три зоны с различной диэлектрической проницаемостью ϵ .

Первая и третья зоны соответствуют областям $y > a$, где a – высота штрихов решетки и $y < 0$ с постоянной диэлектрической проницаемостью. Без ограничения общности будем считать, что в первой зоне $\epsilon=1$, а в третьей зоне $\epsilon > 1$. Во второй зоне

$y \in [0, a]$ - зоне модуляции, диэлектрическая проницаемость является функцией $\varepsilon = \varepsilon(x)$.

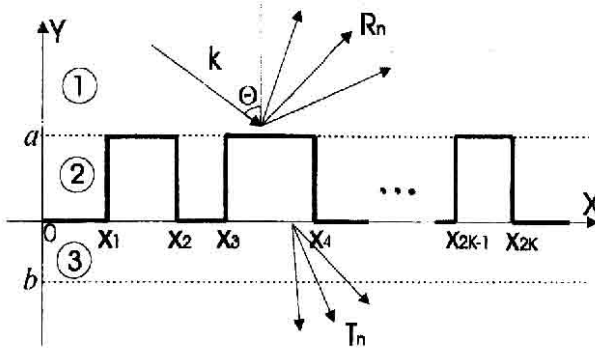


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассмотрим дифракцию двух независимых ТЕ и ТМ поляризованных плоских волн. В зонах 1 и 3 (при $y > a$ и $y < 0$) поле соответствует разложению Рэлея по плоским волнам. При $y > a$ поле имеет вид

$$u(x, y) = \exp(i(\alpha_0 x - \beta_0 y)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \exp(i(\alpha_n x + \beta_n y)) \quad (1)$$

$$\text{где } \begin{cases} \alpha_n = k_0 \sin(\theta) + n \frac{2\pi}{d} \\ \beta_n = \sqrt{k_0^2 - \alpha_n^2} \end{cases} \quad (2)$$

Скалярная функция $u(x, y)$ в (1) соответствует компоненте $E_z(x, y)$ для ТЕ-поляризации и компоненте $H_x(x, y)$ для ТМ-поляризации.

При $y < 0$ поле имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \exp(i(\alpha_n x - \tilde{\beta}_n y)) \quad (3)$$

$$\text{где } \tilde{\beta}_n = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - \alpha_n^2} \quad (4)$$

В зоне модуляции ($y \in [0, a]$) поле описывается системой дифференциальных уравнений, различных для ТЕ и ТМ поляризаций [4]. Функции $E_z(x, y)$, $H_x(x, y)$ в зоне модуляции являются квазипериодическими [4], то есть представимыми в виде:

$$\begin{cases} H_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m(y) \exp(i\alpha_m x) \\ E_z(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m(y) \exp(i\alpha_m x) \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем будем считать, что квазипериодические функции $E_z(x, y)$, $H_x(x, y)$ в зоне модуляции могут быть аппроксимированы отрезками рядов с $2N+1$ членами. В этом случае для ТМ-поляризации расчет функции $H_x(x, y)$ в зоне модуляции сводится к решению следующей системы $4N+2$ дифференциальных уравнений 1-го порядка [4];

$$\begin{cases} \frac{dH_p(y)}{dy} = \sum_{l=-N}^N \tilde{E}_l(y) c_{p-l}^{(1)}(y), \\ \frac{d\tilde{E}_p(y)}{dy} = \alpha_p \sum_{l=-N}^N \alpha_l c_{p-l}^{(2)}(y) H_l(y) - H_p(y), \\ p = -N, \overline{N} \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\begin{cases} k^2 \tilde{E}_p(x) = \frac{dH_p(y)}{dy} \\ \frac{\partial H_x(x, y)}{\partial y} = k^2 \tilde{E}(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

а $c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ - коэффициенты Фурье в разложении периодических функций $k^2(x) = k_0^2 \varepsilon(x)$ и $1/k^2(x)$;

$$c_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{ik_0^2(\varepsilon-1)}{2\pi n} \sum_{j=1}^{2K} \frac{(-1)^j}{\exp\left(i\frac{2\pi}{d}nx_j\right)}, & n \neq 0 \\ k_0^2 + \frac{k_0^2(\varepsilon-1)}{d} \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j x_j, & n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$c_n^{(2)} = \begin{cases} \frac{i(1/\varepsilon-1)}{2\pi nk_0^2} \sum_{j=1}^{2K} \frac{(-1)^j}{\exp\left(i\frac{2\pi}{d}nx_j\right)}, & n \neq 0 \\ 1/k_0^2 + \frac{(1/\varepsilon-1)}{k_0^2 d} \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j x_j, & n = 0 \end{cases} \quad (8)$$

где K - число штрихов решетки, x_1, \dots, x_{2K} - координаты границ штрихов.

Для поиска общего решения системы (5) необходимо найти $4N+2$ линейно независимых частных решений. При отсутствии модуляции ($\varepsilon(x) = \varepsilon$) базисные решения системы (5) имеют вид:

$$\begin{cases} H_p^\pm(y) = \exp(\pm i\tilde{\beta}_p y), & p = -\overline{N}, \overline{N} \\ \tilde{E}_p^\pm(y) = \pm \frac{i\tilde{\beta}_p}{k_0^2 \varepsilon} \exp(\pm i\tilde{\beta}_p y), & p = -\overline{N}, \overline{N} \end{cases} \quad (9)$$

Для согласования решения в зоне модуляции с решением (9) в зоне 3, определим граничные условия для системы (5) в виде:

$$\begin{cases} H_{-mj}^-(0) = \delta_{mj} \\ \tilde{E}_{-mj}^-(0) = \mp i\tilde{\beta}_m \delta_{mj} / (k_0^2 \varepsilon) \end{cases} \quad (10)$$

Для удобства выкладок введем $4N+2$ объединенных векторов начальных условий $\Psi_i(0)$ вида

$$\begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} \mathbf{H}_{-N}^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^-(0) \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} \mathbf{H}_N^-(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^-(0) \end{matrix} \right), \\ \left(\begin{matrix} \mathbf{H}_{-N}^+(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{-N}^+(0) \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} \mathbf{H}_N^+(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}_N^+(0) \end{matrix} \right) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Обозначим $\Psi_i(y)$, $i = 1, 4N+2$ вектора базисных функций

$$\left(\begin{array}{c} \left(\Psi_{-N}^+(y) \right) \\ \left(\tilde{\Psi}_{-N}^+(y) \right) \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} \Psi_N^+(y) \\ \tilde{\Psi}_N^+(y) \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} \Psi_{-N}^-(y) \\ \tilde{\Psi}_{-N}^-(y) \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} \Psi_N^-(y) \\ \tilde{\Psi}_N^-(y) \end{array} \right) \end{array} \right), \quad (12)$$

полученные из решения системы (5) с начальными условиями (10). При этом общее решение системы принимает имеет вид

$$H_m(y) = \sum_{j=-N}^N C^-_j \Psi_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C^+_j \Psi_{mj}^+(y), \quad m = -N, N \quad (13)$$

$$\tilde{E}_m(y) = \sum_{j=-N}^N C^-_j \tilde{\Psi}_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C^+_j \tilde{\Psi}_{mj}^+(y), \quad m = -N, N \quad (14)$$

Для определения рэлеевских коэффициентов пропускания T_n и отражения R_n в уравнениях (1), (3), воспользуемся условиями непрерывности поля $H_z(x, y)$ и функции $\tilde{E}_x(x, y)$ в (6) на границах зоны модуляции при $y=0$ и при $y=a$. Из условия непрерывности при $y=0$ несложно получить, что

$$\begin{cases} T_p = C^-_p \\ C^+_p = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Согласно (15), поле в зоне модуляции имеет вид:

$$\mathbf{P}_m(y) = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_m(y) \\ \tilde{\mathbf{E}}_m(y) \end{pmatrix} = \sum_{j=-N}^N T_j \begin{pmatrix} \Psi_m(y) \\ \tilde{\Psi}_m(y) \end{pmatrix} = \sum_{j=-N}^N C^-_j \tilde{\Psi}_m(y), \quad m = -N, N \quad (16)$$

Используя условия непрерывности функций $H_z(x, y)$ и $\tilde{E}_x(x, y)$ на верхней границе зоны модуляции (при $y=a$), несложно получить для определения коэффициентов T_n и R_n следующие две системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=-N}^N T_j \Psi_{pj}^-(a) = R_p \exp(i\beta_p a) + \delta_p \exp(-i\beta_p a), \quad p = -N, N \quad (17)$$

$$\sum_{j=-N}^N T_j \tilde{\Psi}_{pj}^-(a) = R_p \exp(i\beta_p a) \frac{i\beta_p}{k_0^2} - \delta_p \exp(-i\beta_p a) \frac{i\beta_0}{k_0^2}, \quad p = -N, N \quad (18)$$

Системы линейных уравнений (17), (18) представим в матричном виде:

$$\mathbf{H}_{01} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{H}_{02} \mathbf{R} + \exp(-i\beta_0 a) \delta, \quad H_{01pj} = \Psi_{pj}(a), \quad (19)$$

$$H_{02pj} = \delta_{p-j} \cdot \exp(i\beta_p a), \quad p, j = -N, N$$

$$\mathbf{H}_{11} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{H}_{12} \mathbf{R} - \frac{i\beta_0}{k_0^2} \exp(-i\beta_0 a) \delta, \quad H_{11pj} = \tilde{\Psi}_{pj}(a), \quad (20)$$

$$H_{12pj} = \delta_{p-j} \cdot \frac{i\beta_p}{k_0^2} \exp(i\beta_p a), \quad p, j = -N, N$$

Из уравнений (19), (20) получим вектора коэффициентов Рэлея в виде:

$$\mathbf{T} = 2 \exp(-i\beta_0 a) (\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \delta \quad (21)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{12}^{-1} \mathbf{H}_{11} \cdot \mathbf{T} + \exp(-2i\beta_0 a) \delta \quad (22)$$

где \mathbf{D}_β - диагональная матрица с элементами $k_0^2 / i\beta_p$, $p = -N, N$

Для рассмотренной задачи дифракции несложно учесть влияние подложки на работу решетки. Подложка обозначена штриховой линией на рис.1. Будем предполагать, что ниже подложки $\varepsilon=1$. Тогда поле в зоне за подложкой имеет вид:

$$H_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \exp(i(\alpha_n x - \beta_n y)) \quad (23)$$

Поле (23) отличается от поля (3) в зоне 3 видом коэффициентов β_n . Согласно (9), общее решение системы (5) в зоне (3) имеет вид:

$$\begin{cases} H_p^+(y) = C_p^+ \exp(i\tilde{\beta}_p y) + C_p^- \exp(-i\tilde{\beta}_p y) \\ \tilde{E}_p^+(y) = C_p^+ \frac{i\tilde{\beta}_p}{k_0^2 \varepsilon} \exp(i\tilde{\beta}_p y) - \\ - C_p^- \frac{i\tilde{\beta}_p}{k_0^2 \varepsilon} \exp(-i\tilde{\beta}_p y), \quad p = -N, N \end{cases} \quad (24)$$

Используя условиями непрерывности функций $H_z(x, y)$ и $\tilde{E}_x(x, y)$ на границе подложка-воздух несложно выразить коэффициенты C_p^\pm в (24) через коэффициенты T_n в виде:

$$\begin{cases} C_p^- = T_p \cdot \gamma_p \\ C_p^+ = T_p \cdot \mu_p \end{cases}, \quad p = -N, N \quad (25)$$

$$\text{где } \begin{cases} \gamma_p = \frac{\tilde{\beta}_p + \varepsilon \beta_p}{2\tilde{\beta}_p} \\ \mu_p = \exp(-2i\tilde{\beta}_p b) \frac{\tilde{\beta}_p - \varepsilon \beta_p}{2\tilde{\beta}_p} \end{cases} \quad (26)$$

Подставляя (25) в (24) получим функции $H_p^\pm(y)$, $\tilde{E}_p^\pm(y)$ в явном виде:

$$\begin{cases} H_p(y) = T_p (\mu_p \exp(i\tilde{\beta}_p y) + \gamma_p \exp(-i\tilde{\beta}_p y)) \\ \tilde{E}_p(y) = T_p \frac{i\tilde{\beta}_p}{k_0^2 \varepsilon} (\mu_p \exp(i\tilde{\beta}_p y) - \\ - \gamma_p \exp(-i\tilde{\beta}_p y)), p = -N, N \end{cases} \quad (27)$$

Согласно (27), при учете подложки в зоне 3 существуют как прошедшие волны, распространяющиеся против оси Oy , так и отраженные от границы подложка-воздух волны, распространяющиеся по оси Oy . Для согласования решения в зоне модуляции с решением (27) в зоне 3, определим граничные условия для системы (5) в виде:

$$\begin{cases} H^+_{mj}(0) = \mu_m \delta_{mj}, H^-_{mj}(0) = \gamma_m \delta_{mj} \\ \tilde{E}^+_{mj}(0) = i\chi_m \mu_m \delta_{mj}, \\ \tilde{E}^-_{mj}(0) = -i\chi_m \gamma_m \delta_{mj}, \chi_m = \tilde{\beta}_m / (k_0^2 \varepsilon) \end{cases} \quad (28)$$

Используя условия непрерывности функций $H_z(x, y)$, $\tilde{E}_x(x, y)$ на нижней границе зоны модуляции, получим

$$T_p = C^+{}_p = C^-{}_p \quad (29)$$

При этом общее решение системы (5) принимает вид

$$H_m(y) = \sum_{j=-N}^N T_j (\Psi^-_{mj}(y) + \Psi^+_{mj}(y)), m = -N, N \quad (30)$$

$$\tilde{E}_m(y) = \sum_{j=-N}^N T_j (\tilde{\Psi}^-_{mj}(y) + \tilde{\Psi}^+_{mj}(y)), m = -N, N \quad (31)$$

Далее, используя условия непрерывности функций $H_z(x, y)$, $\tilde{E}_x(x, y)$ на верхней границе зоны модуляции (при $y=a$), несложно получить резонансные коэффициенты пропускания T_n и отражения R_n в виде (21), (22), где матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} имеют вид

$$\begin{aligned} H_{01pj} &= \Psi^+_{pj}(a) + \Psi^-_{pj}(a), p, j = -N, N \\ H_{11pj} &= \tilde{\Psi}^+_{pj}(a) + \tilde{\Psi}^-_{pj}(a), p, j = -N, N \end{aligned} \quad (32)$$

Решение системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами (5) для граничного условия \mathbf{X}_0 , определенного в уравнении (10) или (28), может быть представлено в компактном матричном виде;

$$\begin{pmatrix} \Psi^+_{pj}(y) \\ \tilde{\Psi}^-_{pj}(y) \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot y) \mathbf{X}_0 \quad (33)$$

где \mathbf{A}^{TM} - матрица системы (5). Согласно (5), матрица \mathbf{A}^{TM} имеет вид:

$$\mathbf{A}^{TM} = \begin{pmatrix} \mathbf{NU}, & \mathbf{F1} \\ \mathbf{F2}, & \mathbf{NU} \end{pmatrix} \quad (34)$$

где \mathbf{NU} - нулевые матрицы с размером $(2N+1) \times (2N+1)$, а $\mathbf{F1}$ и $\mathbf{F2}$ - матрицы из Фурье коэффициентов;

$$\begin{aligned} F1_y &= c_{i-j}^{(1)}, \\ F2_y &= \alpha_{-(N+1)-i} \alpha_{-(N+1)+j} c_{i-j}^{(2)} - \delta_y, \\ i, j &= \overline{1, 2N+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

Матричное представление (33) позволяет компактно выразить матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} в (21), (22) через матрицу системы и граничные условия (10) или (28) в виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{01} \\ \mathbf{H}_{11} \end{pmatrix} = \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{BC} \quad (36)$$

где при расчете без учета влияния подложки матрица \mathbf{BC} составлена из второй половины векторов начальных условий в (10);

$$\mathbf{BC} = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{H}^-_{-N}(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}^-_{-N}(0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \mathbf{H}^-_N(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}^-_N(0) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{DE} \end{pmatrix} \quad (37)$$

где \mathbf{E} - единичная матрица с размером $(2N+1) \times (2N+1)$, а \mathbf{DE} - диагональная матрица с элементами $-i\tilde{\beta}_j / k_0^2 \varepsilon$, $j = -N, N$. При учете влияния подложки матрица \mathbf{BC} составлена из векторов начальных условий (28);

$$\begin{aligned} \mathbf{BC} &= \left(\begin{pmatrix} \mathbf{H}^-_{-N}(0) + \mathbf{H}^+_{-N}(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}^-_{-N}(0) + \tilde{\mathbf{E}}^+_{-N}(0) \end{pmatrix}, \dots, \right. \\ &\left. \begin{pmatrix} \mathbf{H}^-_N(0) + \mathbf{H}^+_N(0) \\ \tilde{\mathbf{E}}^-_N(0) + \tilde{\mathbf{E}}^+_N(0) \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Для ТЕ-поляризации расчет функции

$$E_z(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m(y) \exp(i\alpha_m x) \quad (39)$$

в зоне модуляции сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений 2-го порядка [4];

$$\frac{d^2 E_n(y)}{dy^2} - \alpha_n^2 E_n(y) + \sum_{m=-N}^N c_{n-m}^{(1)}(y) E_m(y) = 0, \quad (40)$$

$$n = \overline{-N, N}$$

Для поиска общего решения системы (40) необходимо найти $2(2N+1)$ линейно-независимых частных решений. При отсутствии модуляции ($\varepsilon(x) = \varepsilon$) базисные решения системы (40) имеют вид:

$$E_p^\pm(y) = \pm \exp(\pm i\tilde{\beta}_p y), p = \overline{-N, N} \quad (41)$$

Для согласования решения в зоне модуляции с решением (41) в зоне 3, определим $2(2N+1)$ векторов граничных условий для системы (40) в виде:

$$\begin{cases} E^-_{mj}(0) = \delta_{mj} \\ \partial E^+_{mj}(0) / \partial y = \mp i\tilde{\beta}_m \delta_{mj} \end{cases} \quad (42)$$

При этом поле в зоне модуляции имеет вид:

$$E_z(x, y) = \sum_{m=-N}^N \left(\sum_{j=-N}^N C_j^- E_{mj}^-(y) + \sum_{j=-N}^N C_j^+ E_{mj}^+(y) \right) \exp(ik\alpha_m x) \quad (43)$$

Для определения рэлеевских коэффициентов пропускания T_n и отражения R_n в уравнениях (1), (3) запишем условия непрерывности поля $E_z(x, y)$ и производной $\partial E_z(x, y)/\partial y$ на границах зоны модуляции при $y=0$ и при $y=a$. Из условия непрерывности поля и производной при $y=0$, как и в случае ТМ поляризации, несложно получить, что $T_p = C_p^-$, а $C_p^+ = 0$. При этом поле в зоне модуляции имеет вид:

$$E(x, y) = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=-N}^N T_j E_{mj}^-(y) \exp(ik\alpha_m x) \quad (44)$$

Используя условия непрерывности поля и производной на верхней границе зоны несложно получить для определения коэффициентов T_n и R_n следующие две системы линейных уравнений:

$$\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}_{02} \mathbf{R} + \exp(-i\beta_0 a) \delta, \quad (45)$$

$$E_{01pj} = E_{pj}^-(a),$$

$$E_{02pj} = \delta_{p-j} \cdot \exp(i\beta_p a), \quad p, j = -N, N$$

$$\mathbf{E}_{11} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}_{12} \mathbf{R} - i\beta_0 \exp(-i\beta_0 a) \delta,$$

$$E_{11pj} = \frac{\partial E_{pj}^-(a)}{\partial y}, \quad (46)$$

$$E_{12pj} = \delta_{p-j} \cdot i\beta_p \exp(i\beta_p a), \quad p, j = -N, N$$

Из уравнений (45), (46) получим вектора коэффициентов Рэлея в виде:

$$\mathbf{T} = -2i\beta_0 \exp(-i\beta_0 a) (\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{E}_{01})^{-1} \delta \quad (47)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}_{02}^{-1} \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{T} + \exp(-2i\beta_0 a) \delta \quad (48)$$

где \mathbf{D}_p - диагональная матрица с элементами $i\beta_p$, $p = -N, N$

Рассмотрим дифракцию на решетке с учетом подложки. Поле в зоне за подложкой имеет вид (3) с коэффициентами $\tilde{\beta}_n = \beta_n$, определенными в уравнении (2):

$$E_z(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \exp(i(\alpha_n x - \beta_n y)) \quad (49)$$

Общее решение системы (40) в зоне 3 имеет вид:

$$E_p^\pm(y) = C_p^+ \exp(i\tilde{\beta}_p y) + C_p^- \exp(-i\tilde{\beta}_p y), \quad (50)$$

$$p = -N, N$$

Используя условия непрерывности функции $E_z(x, y)$ и ее производной на границе подложка-воздух, получим функции $E_p(y)$ в явном виде:

$$E_p(y) = T_p \left(\mu_p \exp(i\tilde{\beta}_p y) + \gamma_p \exp(-i\tilde{\beta}_p y) \right), \quad (51)$$

$$p = -N, N$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_p &= \frac{\tilde{\beta}_p + \beta_p}{2\tilde{\beta}_p} \\ \mu_p &= \exp(-2i\tilde{\beta}_p b) \frac{\tilde{\beta}_p - \beta_p}{2\tilde{\beta}_p} \end{aligned} \right. \quad (52)$$

Для согласования решения в зоне модуляции с решением (51) в зоне 3, определим граничные условия для системы (40) в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{mj}^+(0) &= \mu_m \delta_{mj}, \quad E_{mj}^-(0) = \gamma_m \delta_{mj} \\ \frac{\partial E_{mj}^+(0)}{\partial y} &= i\tilde{\beta}_m \mu_m \delta_{mj}, \\ \frac{\partial E_{mj}^-(0)}{\partial y} &= -i\tilde{\beta}_m \gamma_m \delta_{mj} \end{aligned} \right. \quad (53)$$

Используя условия непрерывности поля и производной на нижней границе зоны модуляции, получим, что как и для случая ТМ-поляризации

$$T_p = C_p^+ = C_p^- \quad (54)$$

При этом общее решение системы (40) принимает вид

$$E_m(y) = \sum_{j=-N}^N T_j (E_{mj}^-(y) + E_{mj}^+(y)), \quad (55)$$

$$m = -N, N$$

Далее, для определения рэлеевских коэффициентов пропускания T_n и отражения R_n в уравнениях (1), (49), достаточно воспользоваться условиями непрерывности поля и производной на верхней границе зоны модуляции. Из условий непрерывности несложно получить выражения для векторов коэффициентов Рэлея в виде (47), (48), где матрицы \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} , имеют вид:

$$E_{01pj} = E_{pj}^-(a) + E_{pj}^+(a), \quad p, j = -N, N$$

$$E_{11pj} = \frac{\partial E_{pj}^-(a)}{\partial y} + \frac{\partial E_{pj}^+(a)}{\partial y}, \quad p, j = -N, N \quad (56)$$

Запишем решение системы (40) с постоянными коэффициентами для m -го граничного условия в (42) или в (53) в матричном виде:

$$\Psi_m(y) = \cos\left(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot y\right) \mathbf{E}_m^-(0) + \frac{\sin\left(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot y\right)}{\sqrt{\mathbf{A}^{TE}}} \frac{\partial \mathbf{E}_m^-(0)}{\partial y}$$

где

$$\mathbf{A}_{i,j}^{TE} = -\alpha_{-(N+1)+i}^2 \delta_{i,j} + c_{i-}^{(1)}, \quad i, j = \overline{1, 2N+1} \quad (57)$$

- матрица системы (40). Приведенное матричное представление позволяет представить матрицы E_{01} и E_{11} в (47), (48) через матрицу системы (40) и граничные условия (42) или (53) в виде:

$$E_{01} = \cos(\sqrt{A^{TE}} \cdot a) E + \frac{\sin(\sqrt{A^{TE}} \cdot a)}{\sqrt{A^{TE}}} DE \quad (58)$$

$$E_{11} = -\sqrt{A^{TE}} \sin(\sqrt{A^{TE}} \cdot a) E + \cos(\sqrt{A^{TE}} \cdot a) DE \quad (59)$$

При расчете без учета подложки матрицы E и DE в (58), (59) являются единичной матрицей и диагональной матрицей с элементами $DE_{jj} = -i\beta_j$, $j = -N, N$. При расчете с учетом подложки матрицы E и DE являются диагональными матрицами с элементами

$$E_{jj} = \mu_j + \gamma_j, \quad j = -N, N \text{ и}$$

$$DE_{jj} = i\tilde{\beta}_j (\mu_j - \gamma_j), \quad j = -N, N,$$

соответственно.

3. Градиентный метод

Рассмотрим обратную задачу синтеза бинарной дифракционной решетки с заданными интенсивностями дифракционных порядков $\tilde{I}_n, n = -M, M$, соответствующих прошедшим волнам. При расчете решетки 'без подложки' под интенсивностями отраженных и прошедших порядков следует понимать следующие нормированные значения коэффициентов Рэлея [4]

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\cos(\theta_n)}{\cos(\theta)}, \quad I_n^T = \sqrt{\varepsilon} |T_n|^2 \frac{\cos(\tilde{\theta}_n)}{\cos(\theta)}, \quad (60)$$

$$\left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_2} I_n^T = 1 \right)$$

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\cos(\theta_n)}{\cos(\theta)}, \quad I_n^T = |T_n|^2 \frac{\cos(\tilde{\theta}_n)}{\sqrt{\varepsilon} \cos(\theta)}, \quad (61)$$

$$\left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_2} I_n^T = 1 \right)$$

для ТЕ и ТМ поляризаций, соответственно. Углы $\theta_n, \tilde{\theta}_n$ в (60), (61) соответствуют направлениям отраженных и прошедших волн в уравнениях (1), (3), а U_1 и U_2 обозначают множества индексов, соответствующих распространяющимся отраженным и прошедшим волнам;

$$U_1 = \left\{ n \left| \left(\frac{\alpha_n}{k_0} \right)^2 < 1 \right. \right\}, U_2 = \left\{ n \left| \left(\frac{\alpha_n}{k_0 \sqrt{\varepsilon}} \right)^2 < 1 \right. \right\} \quad (62)$$

При расчете решеток с учетом подложки интенсивности порядков не зависят от поляризации и определяются по формулам

$$I_n^R = |R_n|^2 \frac{\cos(\theta_n)}{\cos(\theta)}, \quad I_n^T = |T_n|^2 \frac{\cos(\theta_n)}{\cos(\theta)}, \quad (63)$$

$$\left(\sum_{n \in U_1} I_n^R + \sum_{n \in U_2} I_n^T = 1 \right)$$

Для построения градиентной процедуры расчета профиля дифракционной решетки введем некоторый функционал $\varepsilon(\mathbf{p})$, характеризующий отличие рассчитанных интенсивностей I_n в дифракционных порядках от требуемых значений \tilde{I}_n :

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{I}(\mathbf{p}), \tilde{\mathbf{I}}) \quad (64)$$

где $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_{2K})$ - вектор координат штрихов профиля решетки, K - число штрихов; $\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}}$ вектора рассчитанной и требуемой интенсивности в порядках.

Градиентная процедура минимизации функционала $\varepsilon(\mathbf{p})$ состоит в итерационной коррекции вектора \mathbf{p} согласно правилу:

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_n - t \cdot \nabla \varepsilon(\mathbf{p}) \quad (65)$$

где n - номер итерации, t - шаг градиентного метода,

$$\nabla \varepsilon(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_{2K}} \right) \quad (66)$$

- градиент функционала невязки.

Рассмотрим вычисление градиента функционала невязки $\nabla \varepsilon(\mathbf{p})$ для случая ТМ-поляризации. Согласно (64) частные производные $\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m}$ имеют вид:

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} \frac{\partial I_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} t_j T_j^* \frac{\partial T_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} \right) =$$

$$= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m}, \mathbf{L} \right)$$

$$\text{где } \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m} = \left(\frac{\partial T_j(\mathbf{p})}{\partial x_m} \right)_{-M}^M \quad (68)$$

$$\mathbf{L} = (L_j)_{-M}^M, L_j = \sum_{j=-M}^M \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{I}})}{\partial I_j} t_j T_j \quad (69)$$

Константы t_j в (67)-(69) имеют вид:

$$t_j = \frac{\cos(\tilde{\theta}_n)}{\sqrt{\varepsilon} \cos(\theta)} \quad (70)$$

при расчете решетки без учета подложки

$$t_j = \frac{\cos(\theta_n)}{\cos(\theta)} \quad (71)$$

при расчете решетки с учетом подложки.

Рассмотрим расчет производных $\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m}$ в (67).

Согласно (21)

$$(\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11}) \mathbf{\Gamma} = 2 \exp(-i\beta_0 a) \delta \quad (72)$$

Дифференцируя (72) по переменной x_m , получим вектор производных в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_m} = & -(\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} - \mathbf{D}_\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T} \end{aligned} \quad (73)$$

Для расчета производных $\frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m}$ матриц

\mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} воспользуемся аналитическим представлением (36) для матриц \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} . Согласно (36), матрицы $\frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} \end{pmatrix} = & \frac{\partial}{\partial x_m} (\exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \cdot \mathbf{B} \mathbf{C}) = \\ = & a \exp(\mathbf{A}^{TM} \cdot a) \frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{B} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (74)$$

Согласно (34), матрица $\frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m}$ в (74) имеет

вид:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{TM}}{\partial x_m} = \begin{pmatrix} \mathbf{N} \mathbf{U}, & \frac{\partial \mathbf{F}1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \mathbf{F}2}{\partial x_m}, & \mathbf{N} \mathbf{U} \end{pmatrix} \quad (75)$$

где $\mathbf{N} \mathbf{U}$ - нулевые матрицы с размером $(2N+1) \times (2N+1)$, а матрицы $\frac{\partial \mathbf{F}1}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{F}2}{\partial x_m}$ могут быть получены из (35), (7), (8) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}1}{\partial x_m} = & \frac{\partial c_{i-j}^{(1)}}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{k_0^2 (\varepsilon - 1)}{d} \times \\ & \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (i-j)x_m\right), \quad i, j = \overline{1, 2N+1} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}2}{\partial x_m} = & \alpha_{-(N-1)+i} \alpha_{-(N-1)+j} \frac{\partial c_{i-j}^{(2)}}{\partial x_m} = \\ = & \alpha_{-(N-1)+i} \alpha_{-(N-1)+j} (-1)^m \frac{(1/\varepsilon - 1)}{k_0^2 d} \times \\ & \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{d} (i-j)x_m\right), \quad i, j = \overline{1, 2N+1} \end{aligned} \quad (77)$$

Таким образом, компоненты вектора градиента функционала (64) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} = & 2 \operatorname{Re} \left((\mathbf{H}_{01} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{H}_{11})^{-1} \times \right. \\ & \left. \times \left(\mathbf{D}_\beta \frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}, \mathbf{L} \right), \quad m = \overline{1, 2K} \end{aligned} \quad (78)$$

где вектор \mathbf{T} определен уравнением (21), вектор \mathbf{L} определен уравнением (69), матрицы \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{11} аналитически выражаются через матрицу системы (5) и граничные условия (10) или (28) в уравнении (36), а матрицы производных $\frac{\partial \mathbf{H}_{01}}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{H}_{11}}{\partial x_m}$ определены в уравнениях (74)-(77).

Рассмотрим вычисление градиента функционала невязки $\nabla \varepsilon(\mathbf{p})$ для случая ТЕ-поляризации. Для ТЕ-случая компоненты вектора градиента для функционала (64) также имеют вид (66)-(68), где вектор \mathbf{T} определен уравнением (47). При этом константы t_j в (66) при расчете решетки с учетом подложки имеют вид (71), а при расчете решетки без учета подложки определяются по формуле

$$t_j = \sqrt{\varepsilon} \frac{\cos(\tilde{\theta}_n)}{\cos(\theta)} \quad (79)$$

Для вычисления производных $\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{p})}{\partial x_m}$ в (66)

представим уравнение (47) в виде

$$(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_{01}) \mathbf{\Gamma} = -2i\beta_0 \exp(-i\beta_0 a) \delta \quad (80)$$

Дифференцируя уравнение (80) по переменной x_m , получим вектор производных в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_m} = & -(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_{01})^{-1} \times \\ & \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m} - \mathbf{D}_\beta \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T} \end{aligned} \quad (81)$$

Для расчета производных $\frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m}$ от матриц

\mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} воспользуемся аналитическими представлениями (58), (59). Согласно (58), (59) матрицы $\frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m} = & \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \mathbf{E} \right) = \\ = & -\frac{a}{2} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{a}{2} \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) - \right. \\ & \left. - \mathbf{B} \right) \cdot (\mathbf{A}^{TE})^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{D} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m} &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(-\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \mathbf{E} + \right. \\ &+ \left. \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \cdot \mathbf{DE} \right) = \\ &= - \left(\mathbf{B} / 2 + \frac{a}{2} \cos(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a) \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{E} + \\ &+ \frac{a}{2} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} \cdot \mathbf{DE} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\text{где } \mathbf{B} = \frac{\sin(\sqrt{\mathbf{A}^{TE}} \cdot a)}{\sqrt{\mathbf{A}^{TE}}} \quad (84)$$

Матрица $\frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m}$ в (82), (83) может быть получена из (57) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}^{TE}}{\partial x_m} &= \frac{\partial c_{i-j}^{(1)}}{\partial x_m} = (-1)^m \frac{k_0^2 (\varepsilon - 1)}{d} \times \\ &\times \exp \left(-i \frac{2\pi}{d} (i-j)x_m \right), \quad i, j = \overline{1, 2N+1} \end{aligned} \quad (85)$$

Таким образом, для ТЕ-поляризации компоненты вектора градиента имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial x_m} &= 2 \operatorname{Re} \left((\mathbf{E}_{11} - \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_{01})^T \times \right. \\ &\times \left. \left(\mathbf{D}_\beta \frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m} \right) \mathbf{T}, \mathbf{L} \right), \quad m = \overline{1, 2K} \end{aligned} \quad (86)$$

где вектор \mathbf{T} определен уравнением (47), вектор \mathbf{L} определен уравнениями (68), (71), (79), матрицы \mathbf{E}_{01} и \mathbf{E}_{11} аналитически выражаются через матрицу системы (40) и граничные условия (42) или (53), а матрицы производных $\frac{\partial \mathbf{E}_{01}}{\partial x_m}$, $\frac{\partial \mathbf{E}_{11}}{\partial x_m}$ определены уравнениями (82), (83).

4. Результаты расчетов

Для исследования целесообразности использования оптимизационных процедур синтеза решеток в электромагнитном приближении предварительно был проведен анализ работы решеток, рассчитанных

в приближении Кирхгофа для формирования $M=2N+1$ равных порядков. Для характеристики работы решеток были использованы значения энергетической эффективности

$$E(M) = \sum_{j=-N}^N I_j \quad (87)$$

и средне-квадратичной ошибки формирования заданной равной интенсивности порядков

$$\delta(M) = \frac{1}{I} \left[\frac{1}{M} \sum_{j=-N}^N (I_j - \bar{I})^2 \right]^{1/2}, \quad (88)$$

где $\bar{I} = E(M) / M$ - среднее значение.

Для исследования были выбраны 11 и 7-порядковые дифракционные решетки с глубиной штриха $a=\lambda$ и с координатами штрихов (0, 0.06857); (0.20885, 0.44467); (0.5293, 0.72101); (0.72854, 0.86437) и (0, 0.23191); (0.42520, 0.52571), соответственно. Приведенные координаты штрихов являются нормированными на период решетки. Согласно работе [10], в приближении Кирхгофа указанные решетки формируют 11 и 7 порядков с энергетической эффективностью $E(11)=76.6\%$ и $E(7)=78.6\%$ при неравномерности интенсивности порядков менее 1%. В таблице 1 для указанных решеток приведены значения E и δ , рассчитанные в электромагнитном приближении при $\theta=0$ в зависимости от отношения периода к длине волны. Значения E и δ в таблице 1 приведены парами и соответствуют ТМ и ТЕ поляризациям, соответственно. Расчет интенсивности прошедших порядков проводился по формулам (21), (61) и (47), (60) при $\varepsilon=2.25$. Согласно данным таблицы 1, 11-порядковая решетка фактически не работоспособна при периоде $d < 20\lambda$. При этом среднеквадратичная ошибка δ становится менее 10% только при $d > 50\lambda$. Для 7-порядковой решетки ошибка δ становится менее 10% уже при $d > 20\lambda$. Лучшая работа 7-порядковой решетки при малых значениях d/λ объясняется большим размером штрихов. В частности для 11-порядковой решетки минимальная ширина штриха $\Delta=0.08d$, а для 7-порядковой решетки $\Delta=0.1d$. Проведенный расчет наглядно демонстрирует актуальность точных процедур синтеза решеток.

Таблица 1.

Характеристики работы решеток, рассчитанных в приближении Кирхгофа.

Период решетки (d/λ)	11-порядковая решетка		7-порядковая решетка	
	E(%) (ТМ/ТЕ)	δ (%) (ТМ/ТЕ)	E(%) (ТМ/ТЕ)	δ (%) (ТМ/ТЕ)
5.5	90.3 / 82.9	95.9 / 144.0	81.3 / 79.0	35.8 / 38.2
10	78.9 / 77.6	42.7 / 52.3	76.2 / 75.9	19.6 / 22.2
15	75.9 / 75.9	28.6 / 34.2	75.9 / 75.5	13.4 / 14.1
20	75.4 / 75.4	22.4 / 25.1	75.6 / 75.5	11.4 / 11.7
25	74.9 / 74.8	18.0 / 20.4	75.5 / 75.4	9.1 / 8.4
30	74.6 / 74.6	16.3 / 16.9	75.5 / 75.4	7.8 / 7.1
50	74.0 / 74.0	9.9 / 8.6	75.4 / 75.4	4.8 / 4.1

Разработанный градиентный метод (64)-(69), (78), (86) был использован для расчета бинарных диэлектрических решеток ($\epsilon=2.25$) с равными порядками без учета подложки. В качестве функционала невязки был использован функционал квадрата ошибки

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \sum_{j=-N}^N (I_j(\mathbf{p}) - \tilde{I}_j)^2 \quad (87)$$

В таблице 2 приведены результаты расчетов решеток с периодом $d=5.5\lambda$ при нормальном падении для ТЕ и ТМ поляризации. Данные таблицы 2 показывают, что точный электромагнитный расчет дает решетки, существенно отличающиеся от ранее рассмотренных 11 и 7-порядковых решеток, расчи-

танных в скалярном приближении Кирхгофа. Следует отметить, что если использование градиентной процедуры в скалярном случае позволяет снизить среднеквадратичную ошибку δ до 1-4% [8,10], то в электромагнитном приближении градиентная процедура дает, как правило, большую ошибку $\delta \sim 10\%$. Интересно отметить, что рассчитанная 5-порядковая решетка, как и в скалярном случае, имеет относительно низкую энергетическую эффективность [10]. В тоже время рассчитанная 11-порядковая решетка всего с 3 штрихами при относительно большой ошибке $\delta=14\%$ имеет эффективность более 92%.

Таблица 2.

Результаты градиентного расчета решеток в электромагнитном приближении

Число порядков M	Число штрихов K	Высота штрихов (a/λ)	Координаты профиля	E (%)	δ (%)
ТМ-поляризация					
5	2	1.0	(0.0935, 0.1823), (0.4884, 0.7862)	76.8	7.4
7	2	0.9	(0.1574, 0.3466), (0.5116, 0.7093)	86.6	1.0
9	3	1.0	(0.1813, 0.3817), (0.4237, 0.5937), (0.7324, 0.8920)	91.7	11.1
ТЕ-поляризация					
7	2	0.9	(0.1137, 0.2474), (0.5201, 0.9428)	83.3	11.9
9	3	0.9	(0.0071, 0.1783), (0.3281, 0.4742), (0.7910, 0.9485)	89.3	8.6
11	3	0.85	(0.2757, 0.3795), (0.5264, 0.6260), (0.7343, 0.9638)	92.6	14.3

Благодарность

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-15-96026)

Литература

- Vassara A., Taghizaden M.R., Turunen J et all. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics. // *Appl.Opt.*, **31**(7), 1992, pp.3320-3336.
- Morrison R.L., Walker S.L., Cloonan T.J. Beam array generation and holographic interconnections in a free-space optical network. // *Appl.Opt.*, **32**, 1993, pp.2512-2518.
- Mait J.N. Design of binary phase and multiphase Fourier gratings for array generation. // *JOSA A*, **7**(8), 1990, pp.1514-1528.
- Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics*, v.22, Ed. by R.Petit, N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
- Gerchberg R.W., Saxton W.O. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. // *Optik*, **35**(2), 1972, pp.237-246.
- J.R.Fienup Phase retrieval algorithms: a comparison. // *Appl.Opt.*, **21**(15), 1982, pp.2758-2769.
- Doskolovich L.L., Soifer V.A., Alessandretti G., Perlo P., Repetto P. Analytical initial approximation for multiorder binary gratings design. // *Pure&Appl.Opt.*, **3**, 1994, pp.921-930.
- L.L. Doskolovich, N.L.Kazanskiy, P. Perlo, P. Repetto, V.A. Soifer. Direct two-dimensional calculation of binary DOEs using a non-binary series expression approach. // *Int. Jour. of Optoelectronics*, **10**, 1995, pp.243-249.
- Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation*. V.Soifer, V.Kotlyar, L. Doskolovich, London, Taylor&Francis Ltd, 1997.
- C. Zhou and L. Liu. Numerical study of Dammann array illuminators. // *Appl.Opt.*, **34**, 1995, pp.5961-5969.
- L.L. Doskolovich, S.I.Kharitonov, O.I. Petrova, V.A.Soifer. A gradient method for design of multiorder varied-depth binary diffraction gratings. // *Optics and Lasers in Engineering*, **29**, 1998, pp.249-259.
- Y.-L. Kok 'Design of a binary chirped grating for near-field operation', // *Opt.Eng.*, **33**, 1994, pp.3604-609.

Gradient method for multi-order binary dielectric gratings computation in the frame of electromagnetic theory

L.L. Doskolovich

Image Processing Systems Institute of RAS

Abstract

The authors have developed a gradient method for the computation of binary dielectric gratings. The method consists in iterative correction of the coordinates of the grating profile and uses an exact differential method to calculate the diffracted field. Analytical matrix representations are obtained for the gradient of the residual functional, which represents the error in the formation of the target intensities of the orders that have passed through the grating. The paper provides the examples of computation of gratings for the formation of 5-11 equal orders.

Citation: Doskolovich LL. Gradient method for multi-order binary dielectric gratings computation in the frame of electromagnetic theory. *Computer Optics* 1998; 18: 82-90.

References

- [1] Vassara A, Taghizaden MR, Tunmen J, et al. Binary surface-relief gratings for array illumination in digital optics. *Appl Opt* 1992; 31(7): 3320-3336.
- [2] Morrison RL, Walker SL, Cloonan TJ. Beam array generation and holographic interconnections in a free-space optical network. *Appl Opt* 1993; 32(14): 2512-2518.
- [3] Mait JN. Design of binary phase and multiphase Fourier gratings for array generation. *J Opt Soc Am A* 1990; 7(8): 1514-1528.
- [4] Petit R, ed. *Electromagnetic theory of gratings: Topics in current physics*. Vol 22. New York: Springer-Verlag; 1980.
- [5] Gerchberg RW, Saxton WO. A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures. *Optik* 1972; 35(2): 237-246.
- [6] Fienup JR. Phase retrieval algorithms: a comparison. *Appl Opt* 1982; 21(15): 2758-2769.
- [7] Doskolovich LL, Soifer VA, Alessandretti G, Perlo P, Repetto P. Analytical initial approximation for multiorder binary gratings design. *Pure Appl Opt* 1994; 3(6): 921-930.
- [8] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Perlo P, Repetto P, Soifer VA. Direct two-dimensional calculation of binary DOEs using a non-binary series expression approach. *Int J Optoelectron* 1995; 10: 243-249.
- [9] Soifer V, Kotlyar V, Doskolovich L. *Iterative methods for diffractive optical elements computation*. London: Taylor & Francis Ltd; 1997.
- [10] Zhou C, Liu L. Numerical study of Dammann array illuminators. *Appl Opt* 1995; 34(26): 5961-5969.
- [11] Doskolovich LL, Kharitonov SI, Petrova OI, Soifer VA. A gradient method for design of multiorder varied-depth binary diffraction gratings. *Opt Lasers Eng* 1998; 29(4-5): 249-259.
- [12] Kok Y-L. Design of a binary chirped grating for near-field operation. *Opt Eng* 1994; 33(11): 3604-609.