

# РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ И КОНЦЕНТРАЦИИ ЭНЕРГИИ В ДИФРАКЦИОННОМ ИЗОБРАЖЕНИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Г. И. Грейсух, Е. Г. Ежов, С. А. Степанов

Пензенская государственная архитектурно-строительная академия

## Аннотация

Приведена методика оценки качества изображения, формируемого оптической системой, при неустранимых абберациях в ее зрачках. Оценка производится по интегральным характеристикам точечного изображения.

## Введение

На этапе аттестации расчетных моделей высоко разрешающих оптических систем наиболее достоверная оценка полученной схемы может быть сделана по функции распределения интенсивности в дифракционном изображении точечного источника и, в частности, по доле энергии в этом изображении, приходящейся на площадку заданной формы и размера. При выборе параметров площадки определяющими являются такие факторы как требования к оптическому устройству в целом и вид используемого приемника излучения. Например, если изображение предполагается регистрировать ПЗС-матрицей, то площадку принимают квадратной и равной пикселю этой матрицы [1]. Если же оценивается качество собственно оптической системы без учета разрешающей способности фотоприемника, и система при этом должна формировать изображение близкое к дифракционно-ограниченному, то за площадку, как правило, принимают диск Эйри, т.е. круговую площадку, радиус которой равен релеевскому разрешению оптической системы [2-4]

$$\delta_R = 0,61\lambda/\sin u', \quad (1)$$

где  $\lambda$  - длина волны используемого света;  $u'$  - апертурный угол оптической системы в пространстве изображений, т.е. угол между осью системы и лучом, соединяющим осевую точку плоскости изображения с крайней точкой выходного зрачка.

Здесь напомним, что при отсутствии аббераций доля энергии, приходящаяся на центральный кружок дифракционного изображения с радиусом  $\delta_R$ ,  $E(\delta_R)=0,84$ . Минимально же допустимое значение  $E(\delta_R)$ , при котором изображение еще можно считать практически не отличающимся от дифракционно-ограниченного, установленное, опираясь на общепринятую оценку качества изображения, ограниченного только сферической абберацией третьего порядка, равно 0,73 [2-4].

Доля энергии, приходящаяся на выбранную площадку  $S$ , находится путем интегрирования:

$$E(S) = \frac{1}{E_0} \iint_S I(x, y) dx dy, \quad (2)$$

где  $E_0$  - полная энергия в изображении;  $x, y$  - отклонения исследуемой точки от центра площадки вдоль соответствующих осей;  $I(x, y)$  - интенсивность дифракционного изображения, вычисляемая в

рамках теории дифракции Кирхгофа и в приближении Фраунгофера [5] по формуле

$$I(x, y) = \frac{1}{(\pi \rho_m^2)^2} \left| \int_0^{\rho_m} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \Psi(\rho, \theta) - \frac{\rho(x \sin \theta + y \cos \theta)}{z'_p} \right] \right\} \rho d\rho d\theta \right|^2. \quad (3)$$

Здесь  $\Psi(\rho, \theta)$  - волновая абберация системы в выходном зрачке, вычисленная относительно некоторой выделенной точки плоскости изображения, в которой лежит площадка интегрирования в выражении (2);  $\rho_m$  - радиус выходного зрачка;  $\rho$  и  $\theta$  - полярные координаты в выходном зрачке;  $z'_p$  - расстояние от выходного зрачка до плоскости изображения.

Площадка, в пределах которой вычисляется интеграл в (2), может быть совмещена с плоскостью наилучшей установки или с гауссовой плоскостью. В зависимости от требований, предъявляемых к изображению, центр площадки интегрирования может выбираться в различных точках. Если изображение проецируется на гауссову плоскость и должно быть с большой точностью подобно предмету, то за центр площадки следует выбрать гауссово изображение и относительно его же вычислять волновую абберацию. Если же нарушение подобия допустимо, то волновую абберацию целесообразно вычислять относительно точки пересечения главного луча с плоскостью изображения, а центр площадки интегрирования - поместить в точку дифракционного фокуса, в которой интенсивность, называемая интенсивностью Штреля, максимальна.

## 1. Волновая абберация системы, содержащей элементы различных типов

Волновая абберация оптической системы в выходном зрачке  $\Psi(\rho, \theta)$  может быть найдена как разность эйконала волнового поля, формируемого оптической системой в плоскости выходного зрачка, и эйконала волнового поля, которое должно быть сформировано в этой же плоскости для получения идеального изображения [3, 4, 6]. Она может быть вычислена следующим образом. Луч из заданной предметной точки прогоняется через оптическую систему до его пересечения с плоскостью выходного зрачка, а точка пересечения соединяется с выделенной точкой плоскости изображения.

Последняя, как уже отмечалось, может быть точкой гауссова изображения или точкой пересечения с плоскостью изображения главного луча, т.е. луча, проходящего через центры входного и выходного зрачков. В результате точка предмета и выделенная точка плоскости изображения оказываются соединенными ломаным лучом. Разность оптических длин ломаного и главного лучей и есть волновая aberrация, вычисленная в данной точке выходного зрачка.

Вычисление оптических длин лучей в системах, состоящих из преломляющих или отражающих поверхностей, разделенных однородными средами, не вызывает сложностей. Поэтому ниже остановимся лишь на вычислении оптических длин лучей, проходящих через дифракционные линзы (ДЛ) и неоднородные среды.

Эйконал записи ДЛ с аксиально симметричной структурой, размещенной на поверхности вращения вида

$$z = f(\rho), \quad (4)$$

может быть представлен, например, в виде разности эйконалов сферической и асферической волн:

$$\begin{aligned} G_0 = & s' \left[ \sqrt{(\rho/s')^2 + (1-z/s')^2} - 1 \right] - \\ & - s \left[ \sqrt{(\rho/s)^2 + (1-z/s)^2} - 1 \right] - \\ & - \frac{1}{8} b_3 \rho^4 - \frac{1}{16} b_5 \rho^6 - \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\rho$  – расстояние до оптической оси;  $-s$  и  $s'$  – отрезки записи;  $b_3, b_5, \dots$  – коэффициенты асферической деформации третьего, пятого и т.д. порядков.

Как показано в [3,4], оптическая длина луча в результате его дифракции на структуре ДЛ увеличивается на величину, пропорциональную эйконалу записи:

$$L = m\mu G_0, \quad (6)$$

где  $m$  – порядок дифракции,  $\mu = \lambda/\lambda_0$ ,  $\lambda$  – длина волны света, падающего на ДЛ,  $\lambda_0$  – длина волны записи.

Полагая в уравнении (6)  $m = -1$  и  $\mu = 1$ , и учитывая, что фокусное расстояние  $f'$  и отрезки записи ДЛ связаны соотношением

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}, \quad (7)$$

получаем, что ДЛ с положительной оптической силой вносит в оптическую длину луча отрицательную добавку, а ДЛ с отрицательной оптической силой – положительную. В случае ДЛ с нулевой оптической силой, т.е. в случае дифракционного корректора волнового фронта, знак добавки зависит от знаков и соотношения абсолютных величин коэффициентов асферической деформации эйконала записи.

Оптическая длина луча в неоднородной среде определяется как

$$L = \int n dl, \quad (8)$$

где  $n = n(\mathbf{r})$  – показатель преломления среды в точке, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ,  $dl$  – элемент геометрической длины луча [5].

Аналитически интеграл (8) может быть вычислен лишь в ряде частных случаев распределений показателя преломления и входных параметров луча [7]. Поэтому на практике обычно используются различные численные методы, обзор и сравнительный анализ которых приведен, в частности, в [8]. Этот анализ и наши собственные исследования показали, что метод, предложенный в [8], дает наилучшее соотношение между точностью вычислений и затратами компьютерного времени. Поэтому ниже рассмотрим его более подробно. В этом методе в качестве независимой переменной используется параметр

$$\vartheta = \int dl/n. \quad (9)$$

В качестве вектора, определяющего направление луча, используется оптический направляющий вектор

$$\boldsymbol{\beta} = n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{d\vartheta}, \quad (10)$$

а траектория луча аппроксимируется ломаной параболой с элементами, определяемыми длиной шага  $\Delta\vartheta$ . Оптическая длина луча, прошедшего через неоднородную среду, рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} L = & (\Delta\vartheta) \left[ \sum_{i=0}^{I-1} N_i + \frac{1}{2}(N_I - N_0) \right] - \\ & - \frac{(\Delta\vartheta)^2}{12} (W_I - W_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $i$  – номер шага,  $N_i = n^2(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}$  и  $W_i = \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla N \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}$ , значения величин  $N_i$  и  $W_i$  при  $i=0$  относятся к точке входа луча в среду (после его преломления на поверхности входа), а при  $i=I$  – к точке выхода луча из среды (до его преломления на поверхности выхода).

Длина шага  $\Delta\vartheta$  выбирается исходя из требуемой точности вычисления волновой aberrации. Опираясь на опыт расчета оптических систем, выполненных из радиально-градиентных линз, можно заключить, что при вычислении волновой aberrации длина шага должна быть примерно на порядок меньше, чем при вычислении функций, оценивающих качество оптического изображения по диаграмме рассеяния лучей.

Типичная картина волновой aberrации гибридной дифракционно-градиентной оптической системы (несвободной от aberrаций высших порядков широких и узких наклонных пучков), полученная вышеописанным способом, приведена на рис. 1.



Рис. 1. Волновая абберация оптической системы

## 2. Интегральные характеристики дифракционного изображения точки

В простейшем случае функция распределения интенсивности в дифракционном изображении  $I(x, y)$  и концентрация энергии  $E(S)$  могут быть получены следующим образом. На входной зрачок оптической системы накладывается прямоугольная сетка, и через ее равноотстоящие друг от друга узлы из заданной предметной точки прогоняются лучи до пересечения с плоскостью выходного зрачка. Оптические длины этих лучей используются для получения набора значений волновой абберации, вычисляемых в равноотстоящих точках выходного зрачка. Очевидно, что последнее выполняется строго только при отсутствии аббераций в зрачках. В противном случае ячейки сетки в выходном зрачке могут стать непрямоугольными, а узлы, через которые проходят лучи – неравноотстоящими.

Ориентировочно, относительную ошибку, которая возникнет, если абберации в узлах искаженной сетки будут приписаны соответствующим узлам прямоугольной равномерной сетки, можно оценить следующим образом. Превалирующую волновую абберацию в некоторой точке зрачка, лежащей в меридиональной плоскости, запишем в виде

$$\psi = c\rho^k, \quad (12)$$

где коэффициент  $c$  – произведение собственно абберационного коэффициента на полевую координату в соответствующей степени.

В точке  $\rho_i$  волновая абберация

$$\psi_i = c\rho_i^k. \quad (13)$$

Однако это значение волновой абберации из-за аббераций в зрачках приписывается другой точке  $\rho_i + \Delta\rho$ , в которой волновая абберация на самом деле должно быть

$$\psi'_i = c(\rho_i + \Delta\rho_i)^k. \quad (14)$$

Разность  $\psi'_i - \psi_i = \Delta\psi_i$  – абсолютная ошибка вычисления абберации в  $i$ -ой точке, обусловленная абберациями в зрачках:

$$\Delta\psi_i = c[(\rho_i + \Delta\rho_i)^k - \rho_i^k]. \quad (15)$$

Полагая, что  $\Delta\rho_i \ll \rho_i$ , можно записать

$$(\rho_i + \Delta\rho_i)^k \approx \rho_i^k + k\rho_i^{k-1}\Delta\rho_i. \quad (16)$$

Тогда абсолютная ошибка

$$\Delta\psi_i \approx ck\rho_i^{k-1}\Delta\rho_i \quad (17)$$

и соответственно относительная ошибка

$$\frac{\Delta\psi_i}{\psi_i} \approx k \frac{\Delta\rho_i}{\rho_i}. \quad (18)$$

Как наиболее рационально производить расчет, если возникающие по вышеописанной причине ошибки вычисления волновой абберации могут ощутимо повлиять на интегральные характеристики (относительные ошибки в тех областях зрачка, где абберации значительны, превышают 10%), рассмотрим ниже.

Набор значений волновой абберации в узлах равномерной прямоугольной сетки используется для получения функции распределения интенсивности  $I(x, y)$ . В табулированном виде ее можно легко получить с помощью стандартной процедуры быстрого преобразования Фурье (БПФ) MathCADa. Также используя MathCAD, можно выделить максимальное значение  $I(x, y)$  и найти координаты дифракционного фокуса, принимаемого за центр площадки, внутри которой будет осуществляться суммирование интенсивностей. Разделив сумму интенсивностей внутри этой площадки на полную энергию, найденную сложением интенсивностей в пределах круговой площадки, радиус которой превышает радиус десятого-пятнадцатого кольца безабберационной дифракционной картины, получим значение  $E(S)$ . Здесь же заметим, что точность выполнения преобразования Фурье MathCADом такова, что, используя набор значений волновой абберации, вычисленных в  $32 \times 32$  узлах равномерной прямоугольной сетки, в которую вписан выходной зрачок, можно получить значения интенсивности Штреля и  $E(\delta_R)$ , отличающиеся от теоретических менее, чем на 1%.

Вышеописанная процедура получения функции распределения интенсивности предполагает, что ошибки вычисления волновой абберации, обусловленные искажением сетки в выходном зрачке, незначительны, амплитуда напряженности электрического поля одинакова во всех точках выходного зрачка, а его контуром является окружность с центром на оптической оси системы. При больших абберациях в зрачках ни одно из этих предположений не выполняется. В этом случае для повышения точности вычисления  $I(x, y)$ , прежде всего, следует вышеописанную процедуру трансформировать так, чтобы из совокупности лучей, пересекающих плоскость выходного зрачка, были исключены лучи, не

попавшие в отверстие материальной диафрагмы. Затем по картине заполнения лучами выходного зрачка зафиксировать его реальный контур и получить функцию распределения плотности лучей по площади выходного зрачка. Фиксация реального контура выходного зрачка сразу же позволяет оценить влияние полевого угла на числовые апертуры объектива в двух взаимно перпендикулярных направлениях, т.е. оценить изменения разрешения в меридиональном и сагиттальном направлениях за счет абберационного виньетирования.

После прогона лучей на выходной зрачок следует наложить прямоугольную сетку, размеры и шаг которой в меридиональном и сагиттальном направлениях могут существенно отличаться. Размеры сетки в двух, взаимно перпендикулярных направлениях, выбираются равными соответствующим расстояниям между точками пересечения с выходным зрачком крайних меридиональных и сагиттальных лучей. Шаг же выбирается таким образом, чтобы число узлов сетки в меридиональном и сагиттальном направлениях совпадало с числом лучей в соответствующих направлениях (см. рис. 2).

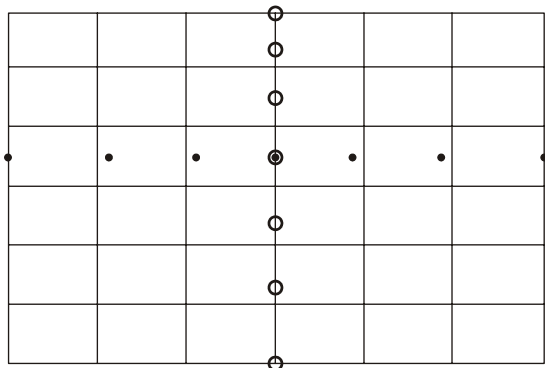


Рис. 2. К выбору размеров и шага прямоугольной сетки, накладываемой на выходной зрачок:

○ ○ ○ ○ и . . . . - точки пересечения с выходным зрачком меридиональных и сагиттальных лучей, соответственно

Далее, итерируя по координатам во входном зрачке, все лучи, чьи точки пересечения с выходным зрачком не совпадают с узлами наложенной прямоугольной сетки, загоняются в узлы с соответствующими номерами, а оптические длины лучей фиксируются для вычисления волновой абберации. Набор значений волновой абберации в узлах прямоугольной сетки на выходном зрачке совместно с весовыми коэффициентами, учитывающими распределения амплитуды напряженности электрического поля по выходному зрачку, используются в БПФ процедуре для получения функции распределения интенсивности  $I(x, y)$ . Весовые коэффициенты формируют на основе ранее полученной функции распределения плотности лучей по площади выходного зрачка.

Проведенное исследование влияния различных факторов на точность вычисления  $I(x, y)$  и  $E(\delta_R)$  показало, что даже у объективов с очень низким

уровнем остаточных аббераций, меридиональное и сагиттальное увеличения в выходном зрачке могут существенно зависеть от полевого угла и ощутимо отличаться друг от друга. Соответственно, от полевого угла могут существенно зависеть и числовые апертуры в меридиональном и сагиттальном направлениях.

Действительно, подавление сферической абберации объектива в целом еще не гарантирует ее отсутствия в той части объектива, которая следует за материальной диафрагмой. Эта абберация приводит к зависимости от полевого угла положения точки пересечения луча, проходящего через центр материальной диафрагмы, с оптической осью и, следовательно, к зависимости от полевого угла положения выходного зрачка. Невыполнение же условия изопланатизма приводит к зависимости от полевого угла и увеличений в выходном зрачке [6]. Типичная картина заполнения выходного зрачка объектива и деформации его контура при предельном полевым угле, качество изображения, при котором еще не отличается от дифракционно-ограниченного [ $E(\delta_R)=0,73$ ], представлена на рис. 3.

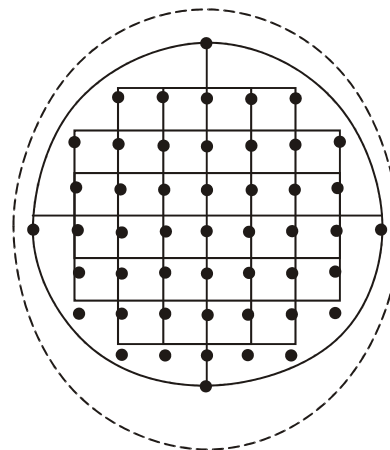


Рис. 3. Типичная картина заполнения выходного зрачка объектива и деформации его контура при предельном полевым угле:

. . . . - точки пересечения лучей с выходным зрачком,

— - прямоугольная сетка и контур заполненной лучами зоны зрачка,

---- - контур зрачка при нулевом полевым угле

В то же время исследование показало, что неравномерность распределения амплитуды напряженности электрического поля по выходному зрачку у высоко-разрешающих объективов столь незначительна, что практически не влияет на точность вычисления  $I(x, y)$  и может просто не учитываться. Наконец, упрощенная БПФ процедура, при которой абберации в узлах искаженной сетки на выходном зрачке (при надлежащем контроле за заполнением лучами материальной диафрагмы) просто приписываются соответствующим узлам прямоугольной сетки, дает результаты,

отличающиеся не более чем на 2-3% от тех, которые могут быть получены с помощью процедуры, включающей итерационный процесс.

Столь незначительная разница в результатах обусловлена тем, что при предложенном выборе размеров и шага прямоугольной сетки, накладываемой на выходной зрачок, ошибки вычисления волновой aberrации [см. формулы (18) и (19)] минимальны на краю зрачка, т.е. как раз там, где сами aberrации максимальны.

На рис. 4 представлена полученная с использованием упрощенной БПФ-процедуры картина распределения интенсивности в изображении точки, формируемом оптической системой, волновая aberrация которой приведена на рис. 1.

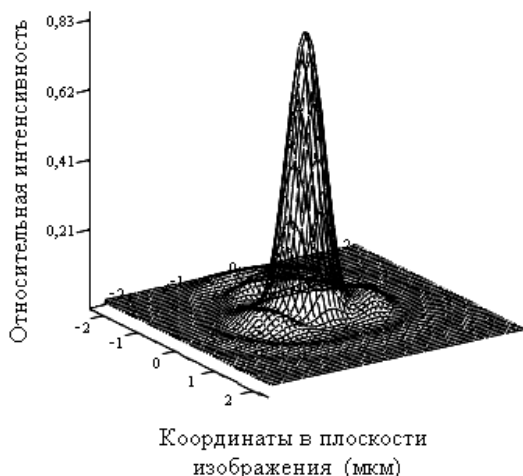


Рис. 4. Распределение интенсивности в дифракционном изображении точки.

В заключение отметим, что при вышеописанном подходе к вычислению волновой aberrации и интегральных характеристик использование плоскости выходного зрачка совсем не обязательно, так как не дает никаких принципиальных преимуществ по сравнению с любой другой плоскостью, нормальной к оси системы и расположенной на достаточном удалении от плоскости изображения. Поэтому при выполнении расчетов для оптической системы с те-

лелцентрическим ходом лучей в пространстве изображений и с удаленным в бесконечность выходным зрачком, следует лишь заменить его плоскостью, расположенной вблизи последней поверхности оптической системы. Затем точно также зафиксировать контур, ограничивающий площадку на этой плоскости, заполненную лучами, на которую и наложить прямоугольную сетку. Поперечное смещение заполненной площадки и сетки при изменении пологого угла, влечет за собой некоторые неудобства, но никакого воздействия на точность вычисления  $I(x, y)$ , а, следовательно, и  $E(S)$  или  $E(\delta_R)$  не оказывает.

### Литература

1. Грамматин А.П. Зависимость концентрации энергии в изображении точки от aberrаций, расфокусировки и экранирования на квадратных площадках // Оптический Журнал. - 2000. - Т.67, № 9. - С. 46-48.
2. Бобров С.Т., Грейсух Г.И. Взаимная корреляция числовых критериев оценки качества изображения // Опт. и спектр. - 1985. - Т.58, № 5. - С. 1068-1073.
3. Бобров С.Т., Грейсух Г.И., Туркевич Ю.Г. Оптика дифракционных элементов и систем // Л.: Машиностроение, 1986. - 223 с.
4. Greisukh G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A. Optics of Diffractive and Gradient-Index Elements and Systems // Bellingham, WA: SPIE Press, 1997. - 414 p.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // М.: Наука, 1973. - 720 с.
6. Родионов С. А. Об изопланатизме в произвольных оптических системах // Опт. и спектр. - 1979. - Т.46. Вып.3. - С.566-573.
7. Stavroudis O. N. The optics of rays, wavefronts and caustics. - New York: Academic Press, 1972. - 313 p.
8. Sharma A. Computing optical path length in gradient-index media: a fast and accurate method // Appl. Opt. - 1985. - V.24, No.24. - P. 4367-4370.

# Calculation of the intensity distribution and energy concentration in the diffraction image of a point source

G.I. Greisukh<sup>1</sup>, E.G. Ezhov<sup>1</sup>, S.A. Stepanov<sup>1</sup>  
<sup>1</sup> Penza State Academy of Architecture and Civil Engineering

## Abstract

The article presents a technique for assessing the quality of an image generated by an optical system under unremovable aberrations in its pupils. The assessment is performed according to the integral characteristics of the dot image.

*Keywords:* diffraction image, image generated, optical system.

*Citation:* Greisukh GI, Ezhov EG, Stepanov SA. Calculation of the intensity distribution and energy concentration in the diffraction image of a point source. *Computer Optics* 2002; 24: 43-47.

## References

- [1] Grammatin AP. Dependence of the energy concentration in a point image on aberrations, defocusing, and screening on square areas. *J Opt Technol* 2000; 67(9): 816-817.
- [2] Bobrov ST, Greisukh GI. Cross-correlation of numerical criteria for assessing the image quality. *Optika i Spektroskopiya*; 1985; 58(5): 1068-1073.
- [3] Bobrov ST, Greisukh GI, Turkevich YG. Optics of diffractive elements and systems [In Russian]. Leningrad: "Mashinostroenie" Publisher; 1986.
- [4] Greisukh GI, Bobrov ST, Stepanov SA. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems. Bellingham, WA: SPIE Press; 1997.
- [5] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.
- [6] Rodionov SA. About isoplanatism in arbitrary optical systems [In Russian]. *Optika i Spektroskopiya* 1979; 46(3): 566-573.
- [7] Stavroudis ON. The optics of rays, wavefronts and caustics. New York: Academic Press; 1972.
- [8] Sharma A. Computing optical path length in gradient-index media: a fast and accurate method. *Appl Opt* 1985; 24(24): 4367-4370.