ПРИМЕНЕНИЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ СОБСТВЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ОПЕРАТОРА РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В ЛИНЗОПОДОБНОЙ СРЕДЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ

В.С. Павельев
Самарский государственный аэрокосмический университет
Институт систем обработки изображений РАН

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию замечательных свойств собственных подпространств оператора распространения света в линзоподобной среде.

Введение

Под *линзоподобными средами* принято понимать среды, в которых показатель преломления является убывающей функцией расстояния от оптической оси [1]. Одним из наиболее распространенных примеров является среда с параболическим профилем, показатель преломления в которой распределен по закону

$$n^2(r) = n_1^2\left(1 - 2\Delta r^2 / a^2\right),\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \qquad (1)$$

Интерес к средам с параболическим профилем связан с тем, что анализ распространения света в них хорошо аппроксимирует анализ многомодовых волокон с параболическим профилем [2], а также с наличием аналитических решений для мод таких сред [2,3]. Под оператором распространения света будем понимать оператор $\tilde{P} : w(x, y, z) = \tilde{P}w(x, y, 0)$, связывающий комплексную амплитуду света $w(x,y,z)$ в плоскости z с исходным комплексным распределением $w(x,y,0)$.

В [2,3] показано, что собственными функциями оператора распространения света в такой среде будут являться модовые функции Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра. В работах [3,4] рассмотрена задача формирования и селекции мод Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра методами компьютерной оптики. В работах [3,4] задачу формирования гауссовых мод предложено решать как задачу синтеза цифровой голограммы образа, заданного амплитудно-фазовым распределением в сечении гауссовой моды. Такой подход обладает рядом недостатков: в частности отличия амплитудного распределения формируемой моды от амплитудного распределения в сечении освещающего пучка (типично гауссового, либо близкого к равномерному) приводят к невысокой энергетической эффективности голограммы [3]. В [5,6] рассмотрены подходы к решению проблемы формирования мод Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита с большей эффективностью, однако все они основаны на “подмешивании” в формируемую моду паразитных (вспомогательных) мод.

Учитывая актуальность задачи формирования одномодовых распределений в линзоподобных средах, обусловленную, главным образом, потенциальными телекоммуникационными приложениями [3,6], представляется целесообразным рассмотреть возможность поиска собственных функций оператора распространения в линзоподобной среде, отличных от известных аналитических решений Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра.

Предлагается переформулировать задачу - найти собственную функцию $\psi_m(x, y)$, соответствующую определенному собственному числу λ_m оператора распространения света в линзоподобной среде $\tilde{P}$, имеющую амплитудное распределение, максимально близкое к распределению освещающего пучка $\left|\psi_m(x, y)\right| \cong A(x, y)$. В этом случае фаза $\varphi(x, y) = \arg(\psi_m(x, y)$ может быть выбрана в качестве фазовой функции формирующего оптического элемента.

1. Собственные подпространства оператора распространения света в линзоподобной среде

Собственные значения оператора распространения света в линзоподобной среде можно найти, пользуясь соответствующим характеристическим уравнением [2]. Для среды с распределением (1):

$$\lambda_m = \exp(i\beta_m z)\ , \qquad (2)$$

$$\beta_m = \sqrt{k^2 n_1^2 - 4/\sigma^2 (m+1)}\ , \qquad (3)$$

$$\sigma = \left(\lambda a/\pi n_l\right)^{1/2} (1/2\Delta)^{1/4}, \qquad (4)$$

где λ - длина волны излучения, волновое число $k = 2\pi/\lambda$, $m = 0,1,2,3...$.

Для того, чтобы найти собственные функции $\psi_m(x, y) : \tilde{P}\psi_m = \lambda_m\psi_m$, необходимо найти решения уравнение Гельмгольца

$$\nabla_\perp^2\psi_m(x, y) + \left[k^2 n^2(x, y) - \beta_m{}^2\right]\psi_m(x, y) = 0\ , \qquad (5)$$

где $\nabla_\perp = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

В предположении

$$\psi_m(x, y) = \psi_p(x)\psi_l(y) \qquad (6)$$

решениями уравнения (5) будут моды Гаусса-Эрмита [3]

$$\psi m = \psi_{pl}(x, y) = E_{pl} \cdot \psi_p(x)\psi_l(y)\ , \qquad (7)$$

где

$$E_{pl} = \sqrt{2/\left(\pi \cdot 2^{p+l} \cdot p! \cdot l!\right)} / \sigma \qquad (8)$$

- нормировочная константа, $m = p + l$,

$$\tilde{\psi}_n(x) = H_n\left(\sqrt{2}x/\sigma\right)\exp\left(-x^2/\sigma^2\right) \quad . \tag{9}$$

Отметим, что:

1. Моды (7) образуют ортогональный базис в L_2 [3].
2. Предположение (6) вовсе не следует из постановки задачи и сделано для получения аналитических решений (7-9).
3. Любое решение, соответствующее собственному значению λ_m, представимо в виде линейной комбинации решений $\tilde{\psi}_{p(m-p)}(x,y)$. Таким образом, оператор $\tilde{P}$ будет обладать собственными числами (2) с соответствующими линейными собственными подпространствами решений

$$\Psi_m = \left\{\psi_m : \psi_m(x,y) = \sum_{p=0}^{m} \tilde{C}_{p(m-p)} \tilde{\psi}_{p(m-p)}(x,y)\right\}. \tag{10}$$

Пучки, сечения которых описываются элементами подпространств (10) с количеством слагаемых ряда более одного, в [7] названы *инвариантными многомодовыми пучками,* а в [8] - *многомодовыми бездисперсионными пучками.* Выпишем некоторые свойства собственных подпространств оператора $\tilde{P}$:

1. Световые пучки, распределение комплексной амплитуды в сечении которых описывается функциями-элементами собственных подпространств (10) оператора $\tilde{P}$, обладают свойством *самовоспроизведения* в среде с параболическим профилем, т.е. являются ее *модами*.

2. Любые две функции $\psi_n(x,y) \in \Psi_n$, $\psi_m(x,y) \in \Psi_m$ являются ортогональными в L_2.

3. λ_0 является *единственным простым* собственным значением оператора $\tilde{P}$ с соответствующей собственной функцией $\psi_{00}(x,y)$.

4. Собственному числу λ_1 соответствует собственное подпространство $\Psi_1 = \left\{\psi : \psi_1(x,y) = \tilde{C}_{01}\tilde{\psi}_{01}(x,y) + \tilde{C}_{10}\tilde{\psi}_{10}(x,y)\right\}$, однако любая функция $\psi_1(x,y) \in \Psi_1$ совпадает с модовой функцией Гаусса-Эрмита $\tilde{\psi}_{01}(x,y)$ с точностью до поворота вокруг начала координат.

5. Поведение пучков, сечения которых описываются функциями (10), в свободном пространстве и при прохождении Фурье - каскада аналогично поведению отдельных мод Гаусс-Эрмита [3].

Таким образом, задача синтеза ДОЭ, предназначенного для формирования одиночной моды линзоподобной среды, может быть поставлена поразному:

1) формирование конкретной моды, заданной своим амплитудно-фазовым распределением $\psi_m(x,y)$ или фиксированными значениями комплекснозначных коэффициентов $\tilde{C}_{p(m-p)}$. В этом случае применимы методы цифровой голографии, развитые для формирования заданного амплитудно-фазового распределения [3]. Такой подход применим, например, в задаче формирования эталонов мод [3]. Постановка задачи формирования модового пучка, заданного распределением комплексной амплитуды $\psi_m(x,y)$ в его поперечном сечении или фиксированными значениями коэффициентов $\tilde{C}_{p(m-p)}$, в некоторой области выходной плоскости представлена на Рис. 1.

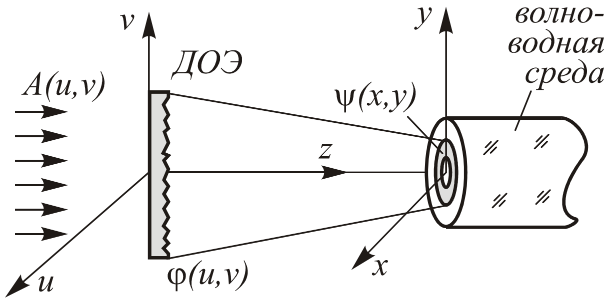

Рис.1. Постановка задачи формирования модового пучка, заданного распределением комплексной амплитуды $\psi(x,y)$ в его поперечном сечении.

2) Поиск собственной функции $\psi_m(x,y)$ над подпространством (10) с амплитудой, максимально близкой к амплитуде освещающего пучка *A(x,y)*. Такой подход представляется перспективным для решения задач телекоммуникаций, а также для передачи световой энергии в волноводной среде с минимальными потерями энергии на межмодовую дисперсию (Рис. 2).

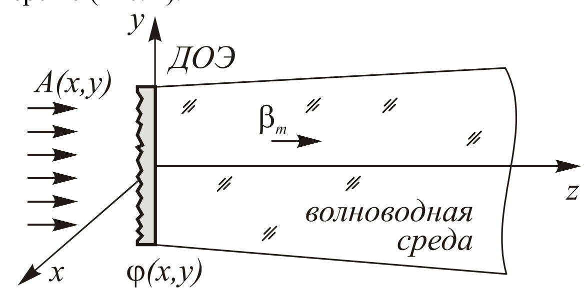

Рис.2. Постановка задачи формирования модового пучка, заданного распределением амплитуды в поперечном сечении освещающего пучка $A(x,y)$ и значением постоянной распространения β_m.

Для эффективного решения задачи *2)* в случае параболического профиля необходимо решить уравнение

$$A(x,y)\exp\left(i\varphi(x,y)\right) - \\ -\sum_{p=0}^{m} \tilde{C}_{p(m-p)} \tilde{\psi}_{p(m-p)}(x,y) = 0, \tag{11}$$

где *A(x,y)* – распределение амплитуды освещающего пучка в плоскости установки ДОЭ, $\varphi(x,y)$ - фазовая функция ДОЭ, относительно коэффициентов $\tilde{\mathbf{C}}_{p(m-p)}$.

Для численного нахождения приближенного решения уравнения (11) можно использовать максимизацию функционала

$$\Phi\left(\varphi\left(x,y\right)\right)=\sum_{p=0}^{m}\tilde{C}^2_{p(m-p)} -> \max\,, \qquad (12)$$

$$\tilde{C}^2_{p(m-p)}=\left|\iint_D A\left(x,y\right)\exp(i\varphi\left(x,y\right))\Psi_{p(m-p)}\left(x,y\right)dxdy\right|^2. \qquad (13)$$

2. Результаты численного эксперимента

В данной работе проводился расчет ДОЭ, осуществляющего эффективное формирование пучка, сечение которого описывается собственной функцией оператора распространения света в среде с параболическим профилем. В качестве освещающего пучка рассматривался гауссов пучок. Вычислительный эксперимент ставился для следующих параметров: апертура ДОЭ D = 6 мм, индекс m выбирался равным 2 и 3, радиус гауссова освещающего пучка $\sigma_0 = 1{,}7$ мм, радиус формируемого пучка $\sigma = 1$мм, число уровней квантования фазовой функции $M = 32$, число отсчетов фазовой функции выбиралось $N = 32$, 64, 128. Оптимизация функционала (12) проводилась с помощью стохастической процедуры, использующей методы целочисленного программирования. Результаты вычислительного эксперимента приведены в Табл. 1-3. На Рис.3 приведены рассчитанные фазовые функции оптических элементов.

Таблица 1. Значение функционала Ф при различных значениях индекса m и числа отсчетов фазовой функции N

Количество пикселов	*Значение функционала (12)* m=2	*Значение функционала (12)* m=3
N=32*32	0,859	0,78
N=64*64	0,867	0,793
N=128*128	0,869	0,795

Таблица 2. Удельная мощность отдельных мод Гаусса-Эрмита в формируемом пучке (m=2)

Номер моды Гаусса-Эрмита	(0,2)	(2,0)	(1,1)
Удельная мощность в пучке, $\tilde{\mathbf{C}}^2_{p(m-p)}$	*0,43*	*0,43*	*0,0*

Таблица 3. Удельная мощность отдельных мод Гаусса-Эрмита в формируемом пучке (m=3)

Номер моды Гаусса-Эрмита	(1,2)	(2,1)	(0,3)	(3,0)
Удельная мощность в пучке, $\tilde{\mathbf{C}}^2_{p(m-p)}$	*0,29*	*0,04*	*0,27*	*0,18*

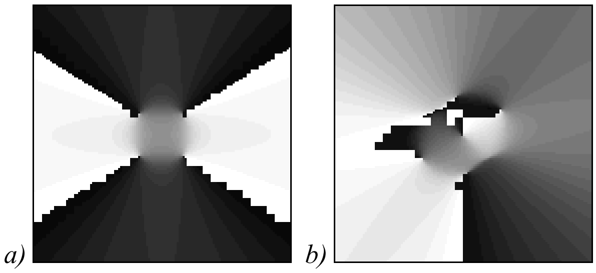

Рис. 3. Рассчитанные фазовые функции ДОЭ (а – для m=2, b - для m=3)

На Рис. 4 представлено распределение амплитуды в сечении освещающего пучка.

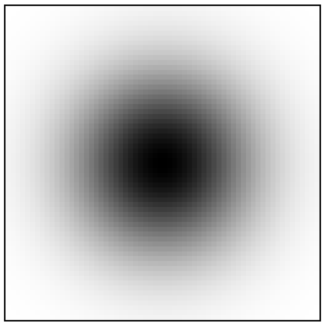

Рис. 4. Распределение амплитуды в сечении гауссова освещающего пучка

На Рис. 5 представлены распределения амплитуды в сечении пучков вида $\sum_{p=0}^{m}\tilde{C}_{p(m-p)}\Psi_{p(m-p)}\left(x,y\right)$, где коэффициенты $\tilde{C}_{p(m-p)}$ найдены оптимизацией функционала (12) для приведенных выше параметров. Таким образом, оптимизируя функционал (12), можно подобрать собственное решение для m=2 и m=3, аппроксимирующее гауссов пучок.

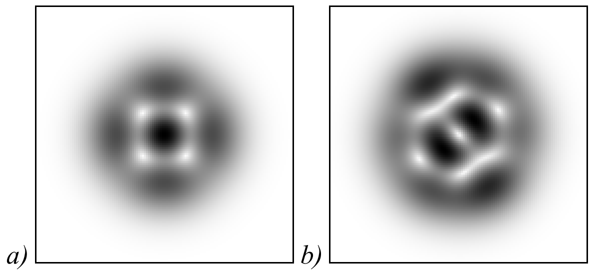

Рис. 5. Распределение амплитуды в сечении пучков (a - m=2, b - m=3)

На Рис.6 представлены распределения амплитуды в дальней зоне в сечении пучков, полученных после прохождения освещающего гауссова пучка через рассчитанные фазовые элементы.

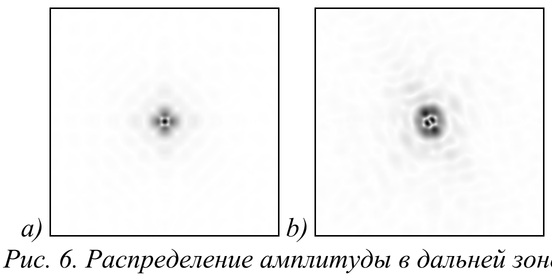

Рис. 6. Распределение амплитуды в дальней зоне

Отметим что структура распределений амплитуды в центре Рис.6*a,b* близка к структуре соответствующих распределений амплитуды, представленных на Рис.5. Это объясняется тем, что погрешность аппроксимации Гауссова распределения амплитуды распределениями, приведенными на Рис.5, соответствует наличию высших мод в сформированном пучке.

Заключение

Наличие непростых собственных значений λ_m оператора распространения $\tilde{P}$ света в линзоподобной среде позволяет поставить задачу поиска в соответствующем собственном подпространстве собственной функции $\psi_m\left(x,y\right)$ с амплитудой, максимально близкой к амплитуде освещающего пучка $A(x,y)$. Задача синтеза ДОЭ, формирующего моду линзоподобной среды, таким образом, может быть решена в два этапа:

- поиск собственной функции с амплитудным распределением, максимально близким к распределению освещающего пучка.
- реализация ДОЭ с фазовой функцией, определяемой фазой найденной собственной функции.

Представляется что такой подход к формированию мод линзоподобных сред (или других волноводных сред) может быть востребован при решении задач оптических телекоммуникаций, а также при передаче световой энергии с минимальными потерями на дисперсию.

Литература

1. Солимено С., Крозиньяни Б., Порто Ди П. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения*, М.: Мир, 1989.
2. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов.* (М.: Мир, 1984)
3. Soifer V.A., Golub M.A. *Laser Beam Mode Selection by Computer Generated Holograms.* (CRC Press. 1994), 250p.
4. Голуб М.А., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. // Квантовая электроника. **9** (9) 1866-1868 (1982).
5. Soifer V.A., Pavelyev V.S., Duparre’ M., Kowarschik R., Luedge B., Kley B. *Forming of selected unimodal complex amplitude distribution by means of novel DOEs of modan-type* // Proceedings SPIE, 1998, vol. 3134 pp. 357-368.
6. Павельев В.С., Сойфер В.А., Глава 6 «*Селекция мод лазерного излучения*» // “Методы компьютерной оптики” под ред. В.А. Сойфера, М. “Физматлит”, 2000, с.395-469.
7. Pavelyev V.S., Duparré M., Luedge B., Soifer V.A., Kowarschik R., Golovashkin D.L. Invariant laser beams - fundamental properties and their investigation by computer simulation and optical experiment. // *Компьютерная оптика*, 1999, №19, с.88-95.
8. Павельев В.С., Карпеев С.В., Дюпарре’ М., Людге Б., Рокштулл К., Шротер З. Исследование поперечно-модового состава бездисперсионных многомодовых пучков с помощью корреляционных фильтров. //*Компьютерная оптика*, 2002, №23, с.10-14.

Application of remarkable properties of eigensubspaces of light propagation operator in a lenslike medium for solving the problems of computer optics

V.S. Pavelyev [1,2]
[1] Image Processing Systems Institute of RAS
[2] Samara State Aerospace University

Abstract

This article is devoted to the investigation of remarkable properties of eigensubspaces of light propagation operator in a lenslike medium.

Keywords: lenslike medium, computer optics, eigensubspaces.

Citation: Pavelyev VS. Application of remarkable properties of eigensubspaces of light propagation operator in a lenslike medium for solving the problems of computer optics. Computer Optics 2002; 24: 58-61.

References

[1] Solimeno S, Crosignani B, Di Porto P. Guiding, diffraction, and confinement of optical radiation. Orlando, FL: Academic Press; 1986.
[2] Adams MJ. An introduction to optical waveguides. New York: John Wiley & Sons Inc; 1981.
[3] Soifer VA, Golub MA. Laser beam mode selection by computer generated holograms. Boca Raton, FL: CRC Press; 1994.
[4] Golub MA, Prokhorov AM, Sisakyan IN, Soifer VA. Synthesis of spatial filters for investigation of the transverse mode composition of coherent radiation. Sov J Quantum Electron 1982; 12(9): 1208-1209.
[5] Duparré MR, Pavelyev VS, Luedge B, Kley E-B, Kowarschik RM, Soifer VA. Forming of selected unimodal complex amplitude distribution by means of novel DOEs of modan-type. Proc SPIE 1998; 3134: 357-368.
[6] Pavelyev VS, Soifer VA. Selection of laser radiation modes [In Russian]. Chap 6. In Book: Soifer VA, ed. Methods of computer optics [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2000: 395-469.
[7] Pavelyev VS, Duparré M, Luedge B, Soifer VA, Kowarschik R, Golovashkin DL. Invariant laser beams – fundamental properties and their investigation by computer simulation and optical experiment. Computer Optics 1999; 19: 88-95.
[8] Pavelyev VS, Karpeev SV, Duparré M, Luedge B, Rokshtul K, Schröter Z. Investigation of the transverse-mode composition of dispersionless multimode beams using correlation filters. Computer Optics 2002; 23: 10-14.