

БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ МНОГОМЕРНОГО ДПФ ВЕЩЕСТВЕННОГО СИГНАЛА С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ДАННЫХ В КОММУТАТИВНО-АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

М.В. Алиев

Самарский государственный аэрокосмический университет,
Институт систем обработки изображений РАН

Введение

Целью настоящей работы является разработка быстрых алгоритмов вычисления так называемых «гиперкомплексных» дискретных преобразований Фурье (ДПФ) и анализ их вычислительных характеристик.

Интерес к многомерному преобразованию

$$F(m_1, \dots, m_d) = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{N-1} f(n_1, \dots, n_d) W^{\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle} \quad (1)$$

– аналогу классического ДПФ, где

$$W^{\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle} = \prod_{k=1}^d w_k^{m_k n_k}, \quad w_k^N = 1,$$

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = m_1 n_1 + \dots + m_d n_d,$$

а корни w_k N -й степени лежат в различных подалгебрах, изоморфных \mathbb{C} , некоторой многомерной алгебры, намечился в последнее десятилетие.

Впервые такие преобразования в алгебре кватернионов были введены в [1], [2], как вспомогательные преобразования, способствующие снижению вычислительной сложности некоторых алгоритмов двумерного ДПФ. Различные версии алгоритмов этого класса рассмотрены в [3], [4].

Как самостоятельное преобразование, полезное при решении «анизотропных» задач обработки изображений, преобразование (1) для $d = 2$ рассматривалось в [5].

К настоящему времени различным теоретическим аспектам гиперкомплексных ДПФ и их практическим приложениям посвящено значительное число работ [6]-[15].

Настоящая работа посвящена, в основном, оптимизации выбора гиперкомплексной алгебры и структуры алгоритмов с точки зрения минимизации их мультипликативной сложности.

1. Коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные алгебры

Так как коммутативно-ассоциативные гиперкомплексные алгебры не относятся к часто используемым в информатике алгебраическим структурам, то в настоящем разделе работы рассмотрим их основные свойства.

Пусть \mathbf{V} есть d -мерное пространство над \mathbb{R} с базисом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d$.

Определение 1. Коммутативно-ассоциативной алгеброй \mathbb{B}_d будем называть 2^d -мерную алгебру над \mathbb{R} с базисом:

$$\Lambda = \left\{ \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i = 0, 1; \quad I = \{1, \dots, d\} \right\}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_i^0 = 1, \quad \varepsilon_i^1 = \varepsilon_i$. Определим умножения базисных элементов пространства \mathbf{V} :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = \beta_i, \quad i, j \in I. \quad (3)$$

Связывая с двоичными наборами индексов $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ целые числа $t \in T$, где $T = \{0, 1, \dots, 2^d - 1\}$

$$t = \alpha_1 + \alpha_2 2 + \dots + \alpha_d 2^{d-1}, \quad \alpha_j \in \{0, 1\} \quad (4)$$

можем занумеровать элементы множества Λ :

$$E_t = \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_d^{\alpha_d}. \quad (5)$$

Произвольный элемент $g \in \mathbb{B}_d$ записывается в виде

$$g = \xi_0 E_0 + \dots + \xi_{2^d-1} E_{2^d-1} = \sum_{t \in T} \xi_t E_t. \quad (6)$$

Операция сложения в алгебре \mathbb{B}_d осуществляется покомпонентно. Пусть

$$g = \sum_{t \in T} \xi_t E_t, \quad h = \sum_{t \in T} \eta_t E_t, \quad g, h \in \mathbb{B}_d, \quad (7)$$

тогда

$$(g + h) = \sum_{t \in T} (\xi_t + \eta_t) E_t. \quad (8)$$

Нетрудно проверить, что алгебра \mathbb{B}_d является коммутативной группой относительно операции сложения.

Операция умножения элементов \mathbb{B}_d , представленных в форме (6), определяется правилом умножения базисных элементов пространства \mathbf{V} . Утверждение следующей леммы позволяет указать явную связь между номерами (4) сомножителей и номером элемента, являющегося произведением

Лемма 1. Пусть \oplus – поразрядное сложение по модулю 2:

$$\oplus : T \times T \rightarrow T, t \oplus \tau = \sum_{i \in I} \left((\alpha_i + \alpha'_i) \bmod 2 \right) 2^{i-1}, \quad (9)$$

где

$$t = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), \quad \tau = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d); \\ t, \tau \in T; \quad \alpha_i, \alpha'_i = 0, 1; \quad i \in I, \quad (10)$$

функция $h_i : T \times T \rightarrow \{0, 1\}$ (битовая конъюнкция) определена равенством:

$$h_i(t, \tau) = \alpha_i \cdot \alpha'_i; \quad i \in I, \quad (11)$$

а функция $\Psi : T \times T \rightarrow \{-1, 1\}$ равенством:

$$\Psi(t, \tau) = \prod_{i \in I} \beta_i^{h_i(t, \tau)}, \beta_i = \{-1, 1\}. \quad (12)$$

Тогда правила умножения базисных элементов Λ можно записать в следующем виде:

$$E_t E_\tau = \Psi(t, \tau) E_{t \oplus \tau}, \quad \forall t, \tau \in T. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть, согласно (4),

$$E_t = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i}, \quad E_\tau = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha'_i},$$

тогда

$$E_t \cdot E_\tau = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i} \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha'_i} = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{\alpha_i + \alpha'_i \pm 2h_i(\alpha_i, \alpha'_i)}.$$

Учитывая, что $\alpha_i + \alpha'_i - 2h_i(\alpha_i, \alpha'_i) \equiv \alpha_i + \alpha'_i \pmod{2}$, получаем

$$\prod_{i \in I} \varepsilon_i^{2h_i(\alpha_i, \alpha'_i)} E_{t \oplus \tau} = \Psi(t, \tau) E_{t \oplus \tau}.$$

Таким образом, умножение произвольных элементов $g, h \in \mathbb{B}_d$ можно записать в виде матричного произведения:

$$h \cdot g = \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}, \quad (14)$$

где $\mathbf{3}$ – матрица размера $2^d \times 2^d$

$$\mathbf{H} = \left\| \eta_{i \oplus t} \Psi(t, t \oplus i) \right\|_{2^d \times 2^d},$$

а \mathbf{G} – вектор-столбец

$$\mathbf{G} = (\xi_0, \dots, \xi_{2^d-1})^T.$$

Так как $\Psi(t, t \oplus i) = \pm 1$, то умножения на $\Psi(t, t \oplus i)$ можно не учитывать. Поэтому вычисление произведения (14) требует не более 2^{2d} вещественных умножений и $2^d(2^d - 1)$ вещественных сложений.

Из определения 1 непосредственно не следует единственность алгебры \mathbb{B}_d , с базисом Λ и умножением, порожденным соотношением (3).

Лемма 2. Если для некоторого $l \in I$ справедливо равенство $\beta_l = -1$, то $\sum_{t \in T} E_t^2 = 0$.

Доказательство. Разобьем сумму $\sum_{t \in T} E_t^2$ на две суммы, таким образом, что в одну будут входить элемент ε_l^2 , а в другую нет, тогда получим:

$$\sum_{t \in T} E_t^2 = \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) \neq 0}} E_t^2 + \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) = 0}} E_t^2 = (1 + \beta_l) \sum_{\substack{t \in T \\ h_l(t, t) = 0}} E_t^2 = 0$$

Следствие 1. Если существует $t \in T$ такое, что $E_t^2 = -1$, тогда в алгебре \mathbb{B}_d содержится ровно 2^{d-1} элементов, квадрат которых равен (-1) .

Коммутативно-ассоциативную алгебру \mathbb{B}_d , в которой $\beta_i = 1$ для каждого $i \in I$, будем обозначать \mathbb{B}_d^+ .

Покажем, что на самом деле структура гиперкомплексной алгебры зависит не от количества базисных элементов, квадраты которых равны (-1) , а только от существования таких элементов.

Теорема 1. Для любого $d \geq 1$ существует только две неизоморфных 2^d -мерных алгебры с операциями, определенными соотношениями (8), (13):

$$\mathbb{B}_d^+ \cong \underbrace{\mathbb{R} \dot{+} \mathbb{R} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{R}}_{2d}, \quad (15)$$

$$\mathbb{B}_d^- \cong \underbrace{\mathbb{C} \dot{+} \mathbb{C} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{C}}_d, \quad (16)$$

где знак $\dot{+}$ означает прямую сумму алгебр.

Доказательство. Из Леммы 2 следует, что существует, по крайней мере, один базисный элемент $\varepsilon_l^2 = -1$, где $l \in I$, пространства \mathbf{V} (без ограничения общности можно считать, что $l = 1$). В базисе Λ ему соответствует элемент E_l . Выберем еще один элемент E_t , такой что $E_t^2 = 1$ и $h_l(t, 1) = 0$. Такой элемент существует, т.к. либо существует $\beta_l = 1$, либо можно взять комбинацию $\varepsilon_l \varepsilon_k = E_{l \oplus k}$, где $\beta_l = -1, \beta_k = -1, l \neq 1, k \neq 1$. Пусть $h_k(t, k) = 1$, тогда любой элемент $h \in \mathbb{B}_d^-$ можно представить в следующем виде:

$$h = \sum_{i \in T} \eta_i E_i = \sum_{\substack{i \in T \\ h_l(i, k) \neq 0}} \eta_i E_i + \left(\sum_{\substack{i \in T \\ h_l(i, k) = 0}} \Psi(t, i) \eta_i E_i E_t \right) E_t = a + b E_t,$$

где $a, b \in \mathbb{B}_{d-1}$.

Таким образом, непосредственно проверяется, что отображение $\Theta : \mathbb{B}_d \rightarrow \mathbb{B}_{d-1} \dot{+} (\mathbb{R} \dot{+} \mathbb{R})$, задаваемое следующим правилом

$$h = \alpha + \gamma E_t \mapsto (\alpha + \gamma, \alpha + \Psi(t, t) \gamma) \in \mathbb{B}_{d-1} \dot{+} (\mathbb{R} \dot{+} \mathbb{R}),$$

является изоморфизмом. Применяя последовательно Θ к \mathbb{B}_{d-1}^- и так далее, несложной индукцией получаем

$$\mathbb{B}_d^+ \cong \mathbb{B}_1^- + \underbrace{\mathbb{R} \dot{+} \mathbb{R} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{R}}_{2(d-1)},$$

а так как

$$\mathbb{B}_1^- \cong \mathbb{C},$$

то, следовательно:

$$\mathbb{B}_d^- \cong \underbrace{\mathbb{C} \dot{+} \mathbb{C} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{C}}_d.$$

Соотношение (15) доказывается аналогично. Таким образом, утверждения теоремы доказаны.

Поэтому везде далее под алгеброй \mathbb{B}_d^- будем понимать алгебру со следующим соотношением для умножений базисных элементов \mathbf{V} :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i^2 = -1, \quad \varepsilon_i^2 = 1 \quad i = \overline{2, d}. \quad (17)$$

Легко проверить, что для произвольного номера l , где $l \in T$, и операция \oplus есть поразрядное сложение по модулю 2, верны равенства:

$$0 \oplus 0 = l \oplus l, \quad l \oplus 0 = 0 \oplus l, \quad (18)$$

а для функции Ψ и произвольного номера $l \in T$, справедливы равенства:

$$\Psi(0, 0) = \Psi(0, l) = \Psi(l, 0) = \beta_l \Psi(l, l), \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi(0, 0 \oplus 0) &= \beta_l \Psi(l, l \oplus 0) = \\ &= \Psi(0, l \oplus 0) = \Psi(l, 0 \oplus 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Лемма 3. Пусть \mathbb{B} есть одномерная подалгебра алгебры \mathbb{B}_d , порожденная подпространством $\mathbf{V}_1 \subseteq \mathbf{V}$, с базисом $\{\varepsilon_l\}$ для любого $l \in I$, тогда матрица умножения элементов $g, h \in \mathbb{B}$ примет следующий вид:

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} \xi_0 (\eta_0 - \eta_1) + \eta_1 (\xi_0 + \beta_l \xi_1) \\ \xi_0 (\eta_1 - \eta_0) + \eta_0 (\xi_0 + \xi_1) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Доказательство. С учетом соотношения (20) матрица умножения элементов g, h примет следующий вид:

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} \eta_0 & \beta_l \eta_1 \\ \eta_1 & \eta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix};$$

после очевидных преобразований получим:

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} \xi_0 (\eta_0 - \eta_1) + \eta_1 (\xi_0 + \beta_l \xi_1) \\ \xi_0 (\eta_1 - \eta_0) + \eta_0 (\xi_0 + \xi_1) \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (18),(19),(20) и Леммы 3 следует теорема.

Теорема 2. Пусть

$$g = \xi_0 + \xi_1 E_1, \quad h = \eta_0 + \eta_1 E_1, \quad g, h \in \mathbb{B},$$

где

$$\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1 \in \mathbb{B}_{d-1},$$

тогда операцию умножения $h \cdot g$ можно осуществить за 3 умножения и 3 сложения матриц размерности 2^{d-1} , если считать, что $(\xi_0 + \xi_1)$ и $(\xi_0 + \beta_l \xi_1)$ выполнены заранее.

Следствие 2. Пусть $g, h \in \mathbb{B}_d$, $g = \xi_0 + \xi_1 E_1$, $h = \eta_0 + \eta_1 E_1$, где $\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1 \in \mathbb{B}_{d-1}$ и $E_1^2 = 1$, тогда операцию умножение элементов h и g

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} (\xi_0 + \xi_1)(\eta_0 + \eta_1) + (\eta_1 - \eta_0)(\xi_0 - \xi_1) \\ (\xi_0 + \xi_1)(\eta_0 + \eta_1) - (\eta_1 - \eta_0)(\xi_0 - \xi_1) \end{pmatrix}$$

можно осуществить за 2 умножения и за 4 сложения матриц размерности 2^{d-1} , если считать, что $(\xi_0 + \xi_1)$ и $(\xi_0 - \xi_1)$ выполнены заранее.

Следствие 3. Умножение в алгебре \mathbb{B}_d^+ можно реализовать за 2^d вещественных умножений и 4^d вещественных сложений.

Следствие 4. Умножение в алгебре \mathbb{B}_d^- можно реализовать за $3 \cdot 2^{d-1}$ вещественных умножений и $3 \cdot 4^{d-1}$ вещественных сложений.

Следствие 5. Пусть $g \in \mathbb{B}_k^-, h \in \mathbb{B}_d^-$ $k < d$. Тогда умножение элементов g и h реализуется за $3 \cdot 2^{d-1}$ вещественных умножений и $3 \cdot 4^{d-1}$ вещественных сложений.

Следствие 6. Пусть $g \in \mathbb{B}_k^-, h \in \mathbb{B}_d^-$ $k < d$. Тогда умножение элементов g и h реализуется за 2^d вещественных умножений и $3 \cdot 4^{d-1}$ вещественных сложений.

Теорема 3. Пусть $\psi : T \times T \rightarrow \{-1, 1\}$:

$$\psi(j, t) = \prod_{i \in T} (-1)^{h(j, t)}, \quad (22)$$

тогда множество из 2^d отображений σ_j :

$$\sigma_j : \mathbb{B}_d \rightarrow \mathbb{B}_d,$$

таких, что

$$\sigma_j(\chi) = \sum_{i \in T} c_i \psi(j, i) E_i, \quad (23)$$

где $\chi \in \mathbb{B}_d$, $c_i \in \mathbb{R}$, $j \in T$, является множеством автоморфизмов алгебры \mathbb{B}_d .

Доказательство. Для доказательства изоморфности необходимо проверить, что отображение биективно и сохраняет операции сложения и умножения.

Базисные элементы Λ не являются делителями нуля, и отображения σ_j – линейно. Таким образом, отображения σ_j является биекцией.

Проверим, сохраняют ли отображения σ_j операции сложения и умножение. Пусть $g, h \in \mathbb{B}$ представлены в форме (6), тогда должно выполняться:

$$\sigma_j(g + h) = \sigma_j(g) + \sigma_j(h), \quad (24)$$

$$\sigma_j(gh) = \sigma_j(g) \cdot \sigma_j(h). \quad (25)$$

Справедливость соотношения (24) очевидна:

$$\begin{aligned} \sigma_j(g + h) &= \sum_{i \in T} (\xi_i + \eta_i) \psi(j, i) E_i = \\ &= \sum_{i \in T} \xi_i \psi(j, i) E_i + \sum_{i \in T} \eta_i \psi(j, i) E_i = \sigma_j(g) + \sigma_j(h). \end{aligned}$$

Для доказательства соотношения (25) преобразуем правую часть этого равенства:

$$\sigma_j(gh) = \sum_{i \in T} \sum_{t \in T} \Psi(t, t \oplus i) \xi_{i \oplus t} \eta_t \psi(j, i) E_i =$$

$$\sum_{i \in T} \eta_i \sum_{t \in T} \Psi(t, t \oplus i) \xi_{i \oplus t} \psi(j, i) E_i.$$

Далее, используя соотношения (13), (18) и учитывая что $i = t \oplus i \oplus t$, получим:

$$\sum_{i \in T} \eta_i \psi(j, t) \Psi(t, t) E_t \sum_{i \in T} \xi_{i \oplus t} \psi(j, i \oplus t) \Psi(t, t \oplus i) E_{i \oplus t}$$

Так как i принимает все значения множества T , то и $i \oplus t$ принимает все значения множества T . Поэтому, полагая $\tau = t \oplus i$, получаем:

$$\sum_{i \in T} \eta_i \psi(j, t) E_t \sum_{\tau \in T} \xi_\tau \psi(j, \tau) E_\tau = \sigma_j(g) \cdot \sigma_j(h).$$

Предположим $\sigma_j(\chi) = \sigma_p(\chi)$ для $j \neq p$, тогда последовательно получаем цепочку равенств:

$$\sigma_j(\chi) = \sigma_p(\chi),$$

$$\prod_{i \in T} (-1)^{h_i(j, l)} = \prod_{i \in T} (-1)^{h_i(p, l)}, \quad l = \overline{0, 2^d - 1},$$

$$\sum_{i \in T} h_i(j, l) = \sum_{i \in T} h_i(p, l), \quad l = \overline{0, 2^d - 1},$$

которая приводит к противоречию: $j = p$. Из этого следует, что если $j \neq p$, тогда и $\sigma_j(\chi) \neq \sigma_p(\chi)$.

Так как $\text{card } T = 2^d$, то и различных автоморфизмов будет 2^d .

Лемма 4. Пусть Ω множество автоморфизмов (23) алгебры \mathbb{B}_d . Пусть далее элемент χ определен равенством (4). Тогда система уравнений относительно c_t :

$$\sigma_j(\chi) = \eta_j, \quad \sigma_j \in \Omega, \quad (26)$$

имеет единственное решение при любых $h = (\eta_0, \dots, \eta_{2^d-1}) \in \mathbb{B}_d$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A = \|\psi(j, i)\|_{2^d \times 2^d}.$$

Заметим, что $\psi(j, i) = \Psi(j, i)$ при $\beta_i = -1$, для любого $i \in I$. Используя соотношение (19) матрицу A можно преобразовать к следующему виду:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \|\psi(j, i)\|_{2^{d-1} \times 2^{d-1}}.$$

Поэтому

$$\det \|\psi(j, i)\|_{2^d \times 2^d} = -2 \cdot \det \|\psi(j, i)\|_{2^{d-1} \times 2^{d-1}}.$$

Применяя аналогичные рассуждения далее, получим

$$\det \|\psi(j, i)\|_{2^d \times 2^d} = (-1)^d 2^d \neq 0.$$

Отсюда следует существование и единственность решения.

Решение в общем виде выглядит следующим образом:

$$2^d c_t E_t = \sum_{i \in T} \psi(t, i) \sigma_i(h), \quad t \in T.$$

2. Алгоритм 2^d -мерного ГДПФ в алгебре \mathbb{B}_d с декомпозицией по основанию 2

Пусть $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_d)$, $F(\nu)$ – гиперкомплексное ДПФ:

$$\tilde{F}(\mathbf{m}) = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{N-1} f(\mathbf{n}) W(\mathbf{m}, \mathbf{n}), \quad (27)$$

где

$$W(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \prod_{i \in I} \omega_i^{m_i n_i}, \quad \omega_i = e^{2\pi \epsilon_i / N}.$$

Тогда

$$\tilde{F}(\mathbf{m}) = \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^1 \tilde{F}_c(\mathbf{m}) W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) =$$

$$= \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^1 W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{N/2-1} f(\mathbf{n} + \mathbf{c}) W(\mathbf{m}, 2\mathbf{n}), \quad (28)$$

где

$$\tilde{F}_c(\mathbf{m}) = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{N/2-1} f(\mathbf{n} + \mathbf{c}) W(\mathbf{m}, 2\mathbf{n}),$$

$$0 \leq m_1, \dots, m_d \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Вычисление спектра для остальных значений вектора \mathbf{m} производится без дополнительных умножений, а именно:

$$\tilde{F}(\mathbf{m} + N/2 \Phi) = \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^1 \Psi(\mathbf{c}, \Phi) \tilde{F}_c(\mathbf{m}) W(\mathbf{m}, \mathbf{c}), \quad (29)$$

где

$$\Phi = (t_1, \dots, t_d), \quad 0 \leq t_1, \dots, t_d \leq 1.$$

Кроме того, умножения на фазовые множители $W(\mathbf{m}, \mathbf{c})$ достаточно выполнять только для фундаментальной области

$$\Omega_0 = \{0 \leq m_1, \dots, m_d < N/4\},$$

остальные значения определяются с использованием автоморфизмов алгебры \mathbb{B}_d без дополнительных умножений. Действительно, пусть вычислены значения

$$W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \tilde{F}_c(\mathbf{m}), \quad \text{для } \mathbf{m} \in \Omega_0 \text{ и } \mathbf{m}_1 = N/2 \Phi - \mathbf{m},$$

тогда

$$W(\mathbf{m}_1, \mathbf{c}) \tilde{F}_c(\mathbf{m}_1) = \Psi(\mathbf{c}, \Phi) \sigma_\Phi(W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \tilde{F}_c(\mathbf{m})). \quad (30)$$

Таким образом, вычисление значений полного спектра в алгебре \mathbb{B}_d производится в следующем порядке.

Шаг 1. Находятся значения суммы в (29) для $\mathbf{m} \in \Omega_0$.

Шаг 2. По формуле (30) вычисляются элементы спектра в областях, отличающихся от Ω_0 сдвигом на $N/2$ по каждой из координат.

Шаг 3. Остальные области заполняются на основании следующих свойств ДПФ вещественного сигнала в алгебре \mathbb{B}_d :

$$\tilde{F}(N - \Phi \mathbf{m}) = \sigma_{\Phi}(\tilde{F}(N - \Phi \mathbf{m})). \quad (31)$$

Из сказанного выше с учётом сложности умножения (теорема 2 и следствия 3-6) следует, что для оценки мультипликативной сложности ГДПФ по модулю 2 в алгебре \mathbb{B}_d^- справедливо соотношение:

$$M(N^d) = 2^d M\left(\left(\frac{N}{2}\right)^d\right) + \left(\sum_{i=1}^d 3 \cdot 2^{d-1} C_d^i\right) \frac{N^d}{2^{2d}}.$$

Упрощая, получаем

$$M(N^d) = 2^d M\left(\left(\frac{N}{2}\right)^d\right) + \frac{3}{2^{d+1}} \cdot (2^d - 1) N^d. \quad (32)$$

Суммируя, получаем

$$\begin{aligned} M(N^d) &= \frac{3 \cdot (2^d - 1)}{2^{d+1}} N^d \log_2 N + O(N^d) = \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2^d}\right) N^d \log_2 N + O(N^d). \end{aligned} \quad (33)$$

3. Алгоритм 2^d -мерного Г ДПФ в алгебре \mathbb{B}_d с декомпозицией по основанию 4

Пусть, как и выше,

$$\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d), \quad \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d), \quad \mathbf{c} = (r_1, \dots, r_d),$$

$\tilde{F}(\nu)$ – гиперкомплексное ДПФ (27). Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mathbf{m}) &= \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^3 \tilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{m}) W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) = \\ &= \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^3 W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{N/4-1} f(\mathbf{n} + \mathbf{c}) W(\mathbf{m}, 4\mathbf{n}), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{m}) = \sum_{n_1, \dots, n_d=0}^{N/4-1} f(\mathbf{n} + \mathbf{c}) W(\mathbf{m}, 4\mathbf{n}), \quad (34)$$

$$0 \leq m_1, \dots, m_d \leq \frac{N}{4} - 1.$$

Вычисление спектра для остальных значений вектора \mathbf{m} производится без дополнительных умножений, а именно:

$$\tilde{F}(\mathbf{m} + N/4 \Phi) = \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^3 \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{r_i} \cdot \tilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{m}) W(\mathbf{m}, \mathbf{c}), \quad (35)$$

где

$$\Phi = (t_1, \dots, t_d), \quad 0 \leq t_1, \dots, t_d \leq \frac{N}{4}.$$

Кроме того, умножения на фазовые множители $W(\mathbf{m}, \mathbf{c})$ достаточно выполнять только для фундаментальной области

$$\Omega_1 = \{0 \leq m_1, \dots, m_d < N/8\},$$

остальные значения определяются с использованием автоморфизмов алгебры \mathbb{B}_d без дополнительных умножений. Действительно, пусть вычислены значения

$$W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \tilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{m}), \quad \text{для } \mathbf{m} \in \Omega_1 \text{ и } \mathbf{m}_1 = N/4 \Phi - \mathbf{m},$$

тогда

$$W(\mathbf{m}_1, \mathbf{c}) \tilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{m}_1) = \prod_{i \in I} \varepsilon_i^{r_i} \cdot \sigma_{\Phi}(W(\mathbf{m}, \mathbf{c}) \tilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{m})). \quad (36)$$

Окончательное вычисление значений спектра в алгебре \mathbb{B}_d производится в следующем порядке.

Шаг 1. Находятся значения суммы в (35) для $\mathbf{m} \in \Omega_1$.

Шаг 2. По формуле (36) вычисляются элементы спектра в областях, отличающихся от Ω_1 сдвигом на $N/4$ по каждой из координат.

Шаг 3. Остальные области заполняются на основании свойств (31) ГДПФ вещественного сигнала в алгебре \mathbb{B}_d .

Из выше сказанного с учётом сложности умножение (теорема 2 и следствия 3-6) следует, что для оценки мультипликативной сложности ГДПФ по модулю 4 в алгебре \mathbb{B}_d^- справедливо соотношение:

$$M(N^d) = 4^d M\left(\left(\frac{N}{4}\right)^d\right) + 3 \cdot 2^{d-1} (2^{2d} - 1) \frac{N^d}{2^{3d}}.$$

Упрощая, получаем

$$M(N^d) = 4^d M\left(\left(\frac{N}{4}\right)^d\right) + \frac{3}{2^{2d+1}} \cdot (2^{2d} - 1) N^d. \quad (37)$$

Суммируя, получаем

$$\begin{aligned} M(N^d) &= \frac{3(4^d - 1)}{4^{d+1}} N^d \log_2 N + O(N^d) = \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4^d}\right) N^d \log_2 N + O(N^d). \end{aligned} \quad (38)$$

Заключение

Рассмотренные в работе быстрые алгоритмы гиперкомплексных ДПФ обладают уменьшенной вычислительной сложностью по сравнению с описанными в [9], [11], [12]. Снижение вычислительной

сложности обеспечивается одновременным применением двух взаимосвязанных идей:

- использования принципа совмещенного вычисления частей спектра, что, в свою очередь, представляет собой одну из форм учета «избыточности» представления вещественного числа как элемента 2^d -мерной гиперкомплексной алгебры.
- выбора в качестве гиперкомплексной алгебры той коммутативно-ассоциативной алгебры, в которой операция умножения реализуется посредством минимального числа вещественных умножений.

Литература

1. Chernov V.M. Discrete orthogonal transforms with data representation in composition algebras // Proc. of the 9th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'95). - Uppsala, Sweden, 1995. V. 1. P.357-364.
2. Chernov V.M. Arithmetic method in the theory of discrete orthogonal transforms // Proc. SPIE, 1995. V. 2363. P.134-141.
3. Chichyeva M.A., Pershina M.V. On various schemes of 2D-DFT decomposition with data representation in the quaternion algebra // Image Processing and Communications, Institute of Telecommunications Bydgoszcz, Poland, 1996. Vol. 2. No 1. P. 13-20.
4. Чернов В.М. Алгоритмы дискретных ортогональных преобразований, реализуемые в кодах Гамильтона-Эйзенштейна // Проблемы передачи информации, 1995. Т.31 N 3. С.38-46.
5. Bülow Th. and Sommer G. Multi-Dimensional Signal Processing Using an Algebraically Extended Signal Representation // Algebraic Frames of Perception-Action Cycle, AFPAC'97, Kiel, Germany, 1997. P. 148-163.
6. Bülow Th. and Sommer G. Hypercomplex Signals - A Novel Extension of the Analytic Signal to the Multidimensional Case // IEEE Transactions On Signal Processing, 2001. Vol. 49. No. 11. P. 2844-2852.
7. Bülow Th., Felsberg M. and Sommer G. Non-commutative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
8. Felsberg M., Bülow Th. and Sommer G. Commutative Hypercomplex Fourier Transforms of Multidimensional Signals // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag Berlin, 2001.
9. Felsberg M., Bülow Th., Sommer G. and Vladimir M. Chernov. Fast Algorithms of Hypercomplex Fourier Transforms // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag Berlin, 2001.
10. Bülow Th. and Sommer G. Local Hypercomplex Signalrepresentations and Applications // G. Sommer (Ed.), Geometric Computing with Clifford Algebra, Springer Series in Information Sciences, Springer-Verlag Berlin, 2001. Part I, Part II.
11. Felsberg M. and Sommer G. Optimized Fast Algorithms for the Quaternionic Fourier Transform // CAIP'99, Ljubljana, Slovenia, 1999. p. 25-32
12. Felsberg M. and Sommer G. Fast Algorithms for the Hypercomplex Fourier Transforms // WTFB'99, Brandenburg, 1999.
13. Chernov V.M., Bülow Th. and Felsberg M. Synthesis of fast algorithms for discrete Fourier-Clifford transform // Pattern Recognition and Image Analysis, January 1998.
14. Bülow Th. und Sommer G. Das Konzept einer zweidimensionalen Phase unter Verwendung einer algebraisch erweiterten Signalrepräsentation // 19. DAGM Symposium Mustererkennung, Braunschweig, 1997. p. 351-358.
15. Bülow Th. and Sommer G. Algebraically Extended Representations of Multi-Dimensional Signals // Proc. of the 10th Scandinavian Conference on Image alysis, SCIA'97, Lappeenranta, 1997. p. 559-566.

Fast algorithms of d-dimensional DFT of real signal in commutative-associative algebras

M.V. Aliev^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute of RAS;

² Samara State Aerospace University

Abstract

The aim of this work is to develop fast algorithms for computing the so-called "hypercomplex" discrete Fourier transforms (DFT) and analyze their computational characteristics.

Keywords: d-dimensional DFT, commutative-associative algebra, fast algorithm, discrete Fourier transforms.

Citation: Aliev MV. Fast algorithms of d-dimensional DFT of real signal in commutative-associative algebras. Computer optics 2002; 24: 130-135.

References

- [1] Chernov VM. Discrete orthogonal transforms with data representation in composition algebras. Proc 9th Scandinavian Conference on Image Analysis (SCIA'95) 1995; 1: 357-364.
- [2] Chernov VM. Arithmetic method in the theory of discrete orthogonal transforms. Proc SPIE 1995; 2363: 134-141.
- [3] Chichyeva MA, Pershina MV. On various schemes of 2D-DFT decomposition with data representation in the quaternion algebra // Image Processing and Communications 1996; 2(1): 13-20.
- [4] Chernov VM. Algorithms of two-dimensional discrete orthogonal transforms realized in Hamilton-Eisenstein code [In Russian]. Problemy Peredachi Informacii 1995; 31(3): 38-46.
- [5] Bülow Th, Sommer G. Multi-dimensional signal processing using an algebraically extended signal representation // Algebraic Frames of Perception-Action Cycle (AFPAC'97) 1997: 148-163.
- [6] Bülow Th, Sommer G. Hypercomplex signals – A novel extension of the analytic signal to the multidimensional case // IEEE Trans Signal Process 2001; 49(11): 2844-2852.
- [7] Bülow Th., Felsberg M. and Sommer G. Non-commutative hypercomplex Fourier transforms of multidimensional signals. In Book: Sommer G, ed. Geometric computing with clifford algebras: Theoretical foundations and applications in computer vision and robotics. Berlin: Springer-Verlag; 2001: 187-207.
- [8] Felsberg M, Bülow Th, Sommer G. Commutative hypercomplex Fourier transforms of multidimensional signals. In Book: Sommer G, ed. Geometric computing with clifford algebras: Theoretical foundations and applications in computer vision and robotics. Berlin: Springer-Verlag; 2001: 209-229.
- [9] Felsberg M, Bülow Th, Sommer G, Chernov VM. Fast algorithms of hypercomplex Fourier transforms. In Book: Sommer G, ed. Geometric computing with clifford algebras: Theoretical foundations and applications in computer vision and robotics. Berlin: Springer-Verlag; 2001: 231-254.
- [10] Bülow Th, Sommer G. Local hypercomplex signal representations and applications. In Book: Sommer G, ed. Geometric computing with clifford algebras: Theoretical foundations and applications in computer vision and robotics. Berlin: Springer-Verlag; 2001: 255-289.
- [11] Felsberg M, Sommer G. Optimized fast algorithms for the quaternionic Fourier transform. Proc CAIP'99 1999: 25-32.
- [12] Felsberg M, Sommer G. Fast algorithms for the hypercomplex Fourier transforms. Proc 2nd WITFB 2000: 295-302.
- [13] Chernov VM, Bülow Th, Felsberg M. Synthesis of fast algorithms for discrete Fourier-Clifford transform. Pattern Recognition and Image Analysis 1998; 8(2): 274-275.
- [14] Bülow Th, Sommer G. Das Konzept einer zweidimensionalen Phase unter Verwendung einer algebraisch erweiterten Signalrepräsentation. 19 DAGM Symposium Mustererkennung, Braunschweig 1997: 351-358.
- [15] Bülow Th, Sommer G. Algebraically extended representations of multi-dimensional signals. Proc 10th Scandinavian Conference on Image analysis (SCIA'97) 1997: 559-566.