

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский  
Институт систем обработки изображений РАН,  
Самарский государственный аэрокосмический университет

## Аннотация

Рассмотрены асимптотические методы решения уравнения Гельмгольца. Представлен новый метод решения задачи дифракции на одномерных дифракционных оптических элементах с зонной структурой. Метод использует специальные представления для поля и электрической проницаемости в зоне микрорельефа, позволяющие свести задачу дифракции на зонах микрорельефа к задаче дифракции на системе дифракционных решеток. Метод обобщает приближение Кирхгофа и применим для асимптотического решения уравнений Максвелла.

## Введение

В общем случае решение задач дифракции представляет собой сложную математическую задачу и требует специальных численных методов и больших вычислительных затрат [1, 2]. Асимптотические методы относятся к категории аналитических методов и играют большую роль. В ряде случаев они позволяют быстро и эффективно оценить результат, не прибегая к громоздким численным расчетам. Для развития новых асимптотических подходов для решения уравнений Максвелла (или уравнений акустических волн) целесообразно первоначально рассмотреть более простую задачу решения скалярного волнового уравнения. Асимптотическим методом решения уравнения Гельмгольца и посвящена настоящая работа.

Приближение геометрической оптики основано на асимптотическом методе решения уравнения Гельмгольца. Известные аналитические методы решения задач дифракции на дифракционных оптических элементах (ДОО) используют приближение геометрической оптики для расчета поля непосредственно за дифракционным микрорельефом [1, 2]. Целью данной работы является анализ геометрического подхода и построение новых асимптотических решений уравнения Гельмгольца, основанных на более точной локальной аппроксимации поля в рельефе полем в дифракционной решетке.

## 1. Геометрооптический подход

В дифракционной оптике широко используют два асимптотических метода:

1. лучевой метод или приближение геометрической оптики [3-5];

2. метод перевала или метод стационарной фазы [3, 6].

Рассмотрим подробнее первый метод. Распространение света в скалярной теории описывается волновым уравнением Гельмгольца. В неоднородной среде уравнение имеет вид:

$$\Delta E(x, y, z) + k^2 \varepsilon(x, y, z) E(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны,  $E$  – компонента комплексной амплитуды электрического поля,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала,  $(x, y, z)$  – декартовы координаты.

Представим комплексную амплитуду в показательной форме  $E = A \exp(ik\psi)$ , где  $A$  – амплитуда поля,  $\psi$  – эйконал поля и подставим ее в уравнение (1). В результате получим

$$ik(2\nabla A \nabla \psi + A \Delta \psi) + (\Delta A - k^2 A (\nabla \psi)^2 + k^2 \varepsilon A) = 0. \quad (2)$$

Это комплексное уравнение соответствует системе двух уравнений

$$\operatorname{div}(A^2 \nabla \psi) = 0, \quad (\nabla \psi)^2 = \varepsilon + \frac{\Delta A}{k^2 A}. \quad (3)$$

В случае, когда свойства среды, амплитуда и фаза решения уравнения Гельмгольца изменяются медленно, система уравнений принимает следующий вид [3-5]:

$$\operatorname{div}(A^2 \nabla \psi) = 0, \quad (\nabla \psi)^2 = \varepsilon. \quad (4)$$

В этом случае уравнения перестают быть связанными друг с другом и их можно решать последовательно. Уравнения (4) называются уравнениями переноса и эйконала и описывают геометрикооптический подход [3-5]. Геометрооптический метод является асимптотическим решением уравнения Гельмгольца при  $k \rightarrow \infty$ .

Для того, чтобы найти решение системы уравнений (4), необходимо задать значения амплитуды и эйконала поля на некоторой начальной поверхности. Если начальная поверхность является плоскостью  $z = 0$  и  $\varepsilon = 1$ , то решение уравнений (4) можно записать в виде [5]

$$E(x, y, z) = \sum_n \frac{A(u_n, v_n, 0) \exp(ik(\psi(u_n, v_n, 0) + L_n(u_n, v_n)))}{\sqrt{J(u_n, v_n)}}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} x = x(u_n, v_n) = u_n + \frac{\partial \psi}{\partial u} L_n, \\ y = y(u_n, v_n) = v_n + \frac{\partial \psi}{\partial v} L_n, \\ z = L_n \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \end{vmatrix}$  – якобиан преобразования, индекс  $n$  представляет номера лучей, пришедших в точку  $(x, y, z)$  из точек  $(u_n, v_n)$  плоскости  $z=0$ ,  $L_n$  – расстояние от точки выхода луча до точки прихода луча  $(x, y, z)$ .

Использование формулы (5) на практике приводит к проблеме поиска всех корней системы алгебраических уравнений (6).

В случае, когда корень не единственный, поиск корней становится сложной и неустойчивой задачей. Кроме того, выражения (5), (6) перестают быть справедливыми в области каустик и фокальных точек. Для того, чтобы выражения (5), (6) было удобно ис-

$$\alpha(x, y, z) = \sum_{n \neq m} \frac{A(u_n, v_n, 0) A^*(u_m, v_m, 0) \exp(jk(\psi(u_n, v_n, 0) + L_n(u_n, v_n) - \psi(u_m, v_m, 0) - L_m(u_m, v_m)))}{\sqrt{J(u_n, v_n) J(u_m, v_m)}} \quad (8)$$

Наблюдаемая интенсивность света, которая регистрируется прибором (или глазом), имеет вид:

$$U(x, y, z) = \int G(x - x_1, y - y_1) \times \times E(x_1, y_1, z) E^*(x_1, y_1, z) dx_1 dy_1, \quad (9)$$

где интегрирование производится по апертуре датчика. Функция  $G(x - x_1, y - y_1)$  зависит от устройства регистрации и, например, может иметь вид гауссианы:

$$G(x, y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right)\right)}{2\pi\sigma^2},$$

где  $\sigma$  характеризует размер датчика. При  $\sigma \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$ , выражение (9) можно переписать в виде:

$$U(x, y, z) = \sum_n \frac{A^2(u_n, v_n, 0)}{\left(\frac{\partial x(u_n, v_n)}{\partial u} \frac{\partial y(u_n, v_n)}{\partial v} - \frac{\partial x(u_n, v_n)}{\partial v} \frac{\partial y(u_n, v_n)}{\partial u}\right)},$$

$$U(x, y, z) = \int \delta(x - x(u, v); y - y(u, v)) A^2(u, v, z) du dv. \quad (10)$$

В (10) интегрирование ведется по поверхности, на которой заданы начальные условия.

Практическое использование формулы (10), предполагает замену дельта функции Дирака на ее аппроксимацию, например, на гауссиану

$$\delta(x, y) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right)\right)}{2\pi\sigma^2}, \quad (11)$$

где  $\sigma$  – параметр регуляризации (по порядку величины  $\sigma$  равно размеру датчика). Формулы (10), (11) представляют собой основу целого класса алгоритмов трассировки лучей (ray tracing). Выражение (10) справедливо в окрестности каустик и фокальных точек. В этом случае формула (10) дает значение интенсивности, усредненное по поверхности регистратора. Отметим, что интенсивность, рассчитанная по формуле (5), в окрестности каустик и фокальных точек стремится к бесконечности.

## 2. Модифицированный геометрический метод

Рассмотренный выше геометрический или лучевой подход справедлив, если свойства среды и поля изменяются медленно. Рассмотрим модификацию

пользовать для решения практических задач, необходимо их модифицировать.

Найдем модуль выражения (5)

$$E(x, y, z) E^*(x, y, z) = \sum_n \frac{A^2(u_n, v_n, 0)}{J(u_n, v_n)} + \alpha(x, y, z), \quad (7)$$

данного метода. Пусть решение скалярного волнового уравнения представляется в виде

$$E(x, y, z) = A \exp(ik\psi) = \sum_j A_j(x, y, z) \exp[ik\psi_j(x, y, z)], \quad (12)$$

где  $A_j, \psi_j$  – медленно меняющиеся функции. В этом случае функции  $A, \psi$  можно не считать медленно меняющимися. Подставим (12) в уравнение Гельмгольца и получим

$$\sum_j \left( ik(2\nabla A_j \nabla \psi_j + A_j \Delta \psi_j) + \left( \Delta A_j - k^2 A_j (\nabla \psi_j)^2 + k^2 \varepsilon A_j \right) \right) \times \exp(ik\psi_j) = 0. \quad (13)$$

Умножим (13) на  $f(x, y, z) \exp(-ik\psi_m)$ , где  $f(x, y, z)$  – произвольная гладкая функция, и проинтегрируем по области пространства, содержащей точку, в которой требуется вычислить поле:

$$\int \sum_j \left( ik(2\nabla A_j \nabla \psi_j + A_j \Delta \psi_j) + \left( \Delta A_j - k^2 A_j (\nabla \psi_j)^2 + k^2 \varepsilon A_j \right) \right) \times \exp(ik\psi_j) \exp(-ik\psi_m) \times f(x, y, z) dx dy dz = 0. \quad (14)$$

Пренебрегая величинами более высокого порядка малости, будем иметь

$$\int \left( ik(2\nabla A_m \nabla \psi_m + A_m \Delta \psi_m) + \left( \Delta A_m - k^2 A_m (\nabla \psi_m)^2 + k^2 \varepsilon A_m \right) \right) \times f(x, y, z) dx dy dz = 0. \quad (15)$$

Учитывая произвольность функции  $f(x, y, z)$  в (15), получим уравнения для главных членов асимптотического разложения

$$\text{div}(A_m^2 \nabla \psi_m) = 0, \quad (\nabla \psi_m)^2 = \varepsilon. \quad (16)$$

Для решения полученной системы дифференциальных уравнений (16) необходимо задать на начальной поверхности значения функций  $A_j, \psi_j$ .

### 3. Асимптотические разложения при использовании дифракционных оптических элементов

Рассмотрим асимптотическое решение уравнения Гельмгольца (1) для случая дифракции на одномерном (цилиндрическом) дифракционном оптическом элементе (ДОЭ).

ДОЭ предполагаем расположенным в области  $0 \leq z \leq a$ , где  $0$  и  $a$  – минимальная и максимальная высоты дифракционного микрорельефа. Распределение диэлектрической проницаемости в области ДОЭ предлагается описать выражением

$$\varepsilon(x, z) = \sum_n \varepsilon_n(x, z) \exp[ikn\psi(x)], \quad (17)$$

где  $\psi(x)$  – эйконал ДОЭ. Под эйконалом ДОЭ будем понимать функцию, определяющую границы зон на оптическом элементе. Границы зон определяются из уравнения

$$\psi(x_m) = m\lambda.$$

В области за ДОЭ ( $z > a$ ) и в области перед ДОЭ ( $z < 0$ ) диэлектрическую проницаемость считаем постоянной.

Решение уравнения Гельмгольца в области ДОЭ ( $0 \leq z \leq a$ ), в области за ДОЭ и в области перед ДОЭ представим в виде:

$$E(x, z) = \sum_n C^n(x, z) \exp[ikn\psi(x)], \quad (18)$$

$$E_{z>a}(x, z) = \sum_n T^n(x, z) \exp[ikn\psi(x)], \quad (19)$$

$$E_{z<0}(x, z) = \sum_n (I^n(x, z) + R^n(x, z)) \exp(ikn\psi(x)), \quad (20)$$

где функции  $C^n(x, z)$ ,  $T^n(x, z)$ ,  $R^n(x, z)$  подлежат дальнейшему определению. Функции  $I^n$  в (20) определяют подающую волну.

Для решения задачи дифракции достаточно определить функции  $T^n(x, z)$ ,  $R^n(x, z)$  на границах области ДОЭ при  $z=0$  и  $z=a$ . Знание поля на границах области рельефа позволяет найти поле в любой области пространства, используя, например, интеграл Кирхгофа.

Производные поля (18) имеют вид:

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial z^2} = \sum_n \frac{\partial C^n(x, z)}{\partial z^2} \exp[ikn\psi(x)], \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 E(x, z)}{\partial x^2} = -\sum_n \exp[ikn\psi(x)] C^n(x, z) k^2 n^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial z} \right)^2. \quad (22)$$

В (22) оставлены только главные члены разложения. Подставляя (17), (21), (22) в уравнение Гельмгольца, получим

$$\sum_n \exp[ikn\psi(x)] \left[ \frac{\partial^2 C^n(x, z)}{\partial z^2} - C^n(x, z) k^2 n^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 + \right. \quad (23)$$

$$\left. + k^2 C^n(x, z) \sum_m \varepsilon_m(x, z) \exp[ikm\psi(x)] \right] = 0.$$

Умножим (23) на  $\exp[-ikp\psi(x)] f(x)$  и проинтегрируем по  $x$  по апертуре  $D$ . Оставляя только главные члены порядка  $k^2$ , получим уравнение:

$$\int_D \left[ \frac{\partial^2 C^p(x, z)}{\partial z^2} - C^p(x, z) k^2 p^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 + \sum_n k^2 \varepsilon_{n-p}(x, z) C^n(x, z) \right] f(x) dx = 0. \quad (24)$$

Учитывая, что уравнение (24) должно выполняться при любой функции  $f(x)$ , получим для определения функций  $C^n(x, z)$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 C^p(x, z)}{\partial z^2} - C^p(x, z) k^2 p^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 + \sum_n k^2 \varepsilon_{n-p}(x, z) C^n(x, z) = 0, \quad p = -\infty, +\infty. \quad (25)$$

Введем понятие локального периода или локальной ширины зоны ДОЭ

$$d(x) = \lambda / \frac{d\psi}{dx}, \quad (26)$$

В этом случае уравнения (25) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 C^p(x, z)}{\partial z^2} - C^p(x, z) \left( \frac{2\pi p}{d} \right)^2 + \sum_n k^2 \varepsilon_{n-p}(x, z) C^n(x, z) = 0, \quad p = -\infty, +\infty. \quad (27)$$

Уравнения (27) при каждом фиксированном  $x = x_0$  совпадают с уравнениями для поля внутри дифракционной решетки с периодом  $d$  и распределением диэлектрической проницаемости [7, 8]

$$\varepsilon(x_0, z) = \sum_n \varepsilon_n(x_0, z) \exp\left(i \frac{2\pi n}{d} x\right).$$

Полученный результат позволяет локально описывать ДОЭ дифракционной решеткой.

Решение уравнений (25) представим в виде

$$C^p(x, z) = U_n^p(x, z) A^n(x) + V_n^p(x, z) B^n(x), \quad (28)$$

где  $A^n(x) = C^n(x, 0)$ ,  $B^n(x) = \frac{dC^n(x, 0)}{dz}$ . В (28) и

ниже предполагается суммирование по повторяющимся индексам (правило Эйнштейна). Функции  $U_n^p(x, z)$  и  $V_n^p(x, z)$  в (28) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 U_p^l}{dz^2} = H_q^l U_p^q, \quad \frac{d^2 V_p^l}{dz^2} = H_q^l V_p^q, \quad (29)$$

$$H_n^p = -\left(\frac{2\pi p}{d}\right)^2 \delta_n^p + k^2 \varepsilon_{n-p}, \quad n, p = -\infty, +\infty \quad (30)$$

с начальными условиями

$$U_m^p(x, 0) = \frac{dV_m^p(x, 0)}{dz} = \delta_m^p, \quad (31)$$

$$V_m^p(x, 0) = \frac{dU_m^p(x, 0)}{dz} = 0, \quad (32)$$

$\delta_m^p$  – символ Кронекера.

Подставляем (28) в (18) и получаем поле в области ДОЭ:

$$E(x, z) = (U_n^p(x, z) A^n(x) + V_n^p(x, z) B^n(x)) \exp(ikp\psi(x)).$$

Производная поля равна

$$\frac{dE(x, z)}{dz} = \left( \frac{dU_n^p(x, z)}{dz} A^n(x) + \frac{dV_n^p(x, z)}{dz} B^n(x) \right) \exp(ikp\psi(x)).$$

На границах области ДОЭ (при  $z = +0$  и при  $z = a - 0$ ) поле и производная имеют вид:

$$E(x, z) = A^p(x) \exp(ikp\psi(x)), \quad (33)$$

$$\frac{dE(x, z)}{dz} = B^p(x) \exp(ikp\psi(x)),$$

$$E(x, a) = (U_n^p(x, a) A^n(x) + V_n^p(x, a) B^n(x)) \exp(ikp\psi(x)), \quad (34)$$

$$\frac{dE(x, z)}{dz} = \left( \frac{dU_n^p(x, a)}{dz} A^n(x) + \frac{dV_n^p(x, a)}{dz} B^n(x) \right) \exp(ikp\psi(x)).$$

Поле и производная поля перед ДОЭ (при  $z = -0$ ) и сразу после ДОЭ (при  $z = a + 0$ ) могут быть получены из (19), (20) в виде:

$$E(x, -0) = (I^n(x, -0) \exp(ikn\psi(x)) + R^n(x, -0) \exp(ikn\psi(x))), \quad (35)$$

$$\begin{cases} T^m(x, a + 0) = (U_n^m(x, a) A^n(x) + V_n^m(x, a) B^n(x)) \\ ik \sqrt{\varepsilon - m^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2} T^m(x, a + 0) = \left( \frac{dU_n^m(x, a)}{dz} A^n(x) + \frac{dV_n^m(x, a)}{dz} B^n(x) \right) \\ A^p(x, 0) = (I^p(x, -0) + R^p(x, -0)) \\ B^p(x, 0) = ik \sqrt{\varepsilon - p^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2} (I^p(x, -0) + R^p(x, -0)). \end{cases} \quad (43)$$

Система уравнений (43) при любом фиксированном  $x$  совпадает с системой линейных уравнений для определения коэффициентов дифракции на периодической дифракционной решетке с периодом (26) [7, 8].

Поле на выходе ДОЭ имеет вид:

$$\frac{dE(x, 0)}{dz} = ik \sqrt{\varepsilon - n^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2} \times \quad (36)$$

$$\times (I^n(x, -0) - R^n(x, -0)) \exp(ikn\psi(x)),$$

$$E(x, a + 0) = T^n(x, a + 0) \exp(ikn\psi(x)), \quad (37)$$

$$\frac{dE(x, a + 0)}{dz} = ik \sqrt{\varepsilon - n^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2} \times \quad (38)$$

$$\times T^n(x, a + 0) \exp(ikn\psi(x)).$$

Запишем условия непрерывности полей и производных (33)-(38) на границах области ДОЭ

$$T^n(x, a + 0) \exp(ikn\psi(x)) = (U_n^p(x, a) A^n(x) + V_n^p(x, a) B^n(x)) \exp(ikp\psi(x)). \quad (39)$$

$$ik \sqrt{\varepsilon - n^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2} T^n(x, a + 0) \times \exp(ikn\psi(x)) = \left( \frac{dU_n^p(x, a)}{dz} A^n(x) + \frac{dV_n^p(x, a)}{dz} B^n(x) \right) \exp(ikp\psi(x)), \quad (40)$$

$$A^p(x) \exp(ikp\psi(x)) = (I^n(x, -0) + R^n(x, -0)) \exp(ikn\psi(x)), \quad (41)$$

$$B^p(x) \exp(ikp\psi(x)) = ik \sqrt{\varepsilon - n^2 \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2} \times (I^n(x, -0) + R^n(x, -0)) \exp(ikn\psi(x)). \quad (42)$$

Умножая уравнения (39)-(42) на  $\exp[-ikp\psi(x)] f(x)$  и интегрируя по  $x$  по апертуре ДОЭ, получим систему уравнений для определения функций  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $R(x, -0)$ ,  $T(x, a + 0)$

$$E(x, a) = \sum_n T^n(x, a + 0) \exp[ikn\psi(x)]. \quad (44)$$

Для того, чтобы найти поле в области за ДОЭ, будем использовать интеграл Кирхгофа

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, a) \frac{-ikz}{2\sqrt{(x-u)^2 + (z-a)^2}} \times H_1^1 \left( k\sqrt{(x-u)^2 + (z-a)^2} \right) du \quad (45)$$

Предложенный метод расчета поля (43), (45) целесообразно использовать для расчета полей от ДОО с зонной структурой. Зонная структура характерна для ДОО, рассчитанных в приближении геометрической оптики. Метод (43), (45) позволяет моделировать ДОО с большим размером апертуры в тысячи длин волн. Данный подход является обобщением метода нелинейного предсказания, изложенного в работах [1, 2, 9]. Метод также обобщает приближение Кирхгофа [3, 4].

#### Пример расчета

В качестве примера рассмотрим ДОО, выполненный в виде града с двумя возможными значениями показателя преломления  $\eta_1, \eta_2$ . Распределение диэлектрической проницаемости в этом случае описывается следующим выражением:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|\varepsilon_n| \cos(kn\psi(x) + \arg(\varepsilon_n)),$$

$$\varepsilon_n = \frac{\eta_1}{2\pi in} (1 - \exp(-2\pi in t)) +$$

$$+ \frac{\eta_2}{2\pi in} (1 - \exp(-2\pi in t)),$$

$$\varepsilon_0 = \eta_1 t + \eta_2 (1 - t),$$

где  $t$  – коэффициент заполнения диэлектриком с показателем преломления  $\eta_1$ . Пусть коэффициент  $t$  не меняется от зоны к зоне. В этом случае коэффициенты  $T^n$  в (44) зависят от следующих переменных

$$T^n(x, a + 0) = T^n(\eta_1, \eta_2, t, a, d(x)),$$

где  $d(x)$  – локальная ширина зоны ДОО,  $a$  – высота области ДОО. Подставляя выражения для коэффициентов  $T^n$  в (44) и используя интеграл Кирхгофа (45), получим следующее выражение для поля в произвольной точке полупространства  $z > a$

$$E(x, z) = \sum \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ik(z-a)}{2\sqrt{(x-u)^2 + (z-a)^2}} \times T^n \left( \eta_1, \eta_2, t, a, \lambda \left( \frac{d\psi(u)}{du} \right)^{-1} \right) \exp[ikn\psi(u)] \times H_1^1 \left( k\sqrt{(x-u)^2 + (z-a)^2} \right) du. \quad (46)$$

В качестве примера оценим значение интенсивности поля в фокусе одномерной линзы  $\psi = -k\sqrt{u^2 + (f-a)^2}$ , где  $(f-a)$  – фокусное расстояние. В этом случае основной вклад в поле в фокусе будет вносить одно слагаемое в (46) при  $n=1$ . Заменяем в (46) функцию Ханкеля ее асимптотикой

$$H_m^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left(i\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

и получим

$$I(0, f) = \left| \int_{-R/2}^{R/2} T^1 \left( \eta_1, \eta_2, t, a, \frac{\lambda\sqrt{u^2 + (f-a)^2}}{u} \right) \times \right. \quad (47)$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{(f-a)^2}{\lambda(\sqrt{u^2 + (f-a)^2})^3}} du \right|^2.$$

В параксиальном приближении функция  $T^1(\eta_1, \eta_2, t, a) = C$  и не зависит от размера зоны. В этом случае значение интенсивности в фокусе

$$I(0, f) = \frac{R^2 C^2}{\lambda f}$$

совпадает с результатом, полученным по методу нелинейного предсказания [1, 2, 9].

#### Заключение

Рассмотрены асимптотические методы решения скалярного волнового уравнения. Разработан новый метод решения задачи дифракции на цилиндрических ДОО. Специальные представления для поля и диэлектрической проницаемости в области микрорельефа ДОО позволили локально свести задачи дифракции на ДОО к задаче дифракции на дифракционной решетке. Данный подход является обобщением методов, основанных на представлении поля в виде системы дифракционных порядков. Предложенный подход можно использовать для получения асимптотических решений системы уравнений Максвелла.

#### Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ № МД -210.2003.01 и № НШ-1007.2003.1, гранта РФФИ № 01-01-00097 и российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» («BRNE»).

#### Литература

1. Методы Компьютерной Оптике. Под редакцией В.А.Сойфера // М.: «Физматлит», 2000, 688 с.
2. Methods For Computer Design of Diffractive Optical Elements. Edited by Victor A. Soifer. // A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 2002. 765 p.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // Pergamon Press, 1986.
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухорыков А.П. Теория волн // М.: Наука, 1979.
5. Кравцов В.В., Орлов А.А. Геометрическая оптика неоднородных сред // М.: Наука, 1979.
6. Федорюк М.В. Асимптотики Интегралы и ряды // М.: Наука 1987.
7. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A, 1995. V. 12. №5. P. 1068-1076.
8. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A. Gaylord T.K. Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach // J. Opt. Soc. Am. A, 1995. V. 12. №5. P. 1077-1086.
9. Computer generated diffractive multi-focal lens / Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A. // Journal of Modern Optics. - 1992. - Vol.39, №6. - P.1245-1251.

# The asymptotic solution of the scalar wave equation

S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University

## Abstract

The paper considers asymptotic methods for solving the Helmholtz equation. It presents a new method for solving the problem of diffraction by one-dimensional diffractive optical elements with a band structure. The method uses special representations for the field and for the dielectric permittivity in the microrelief zone, which allows to reduce the problem of diffraction by the microrelief zones to the problem of diffraction by a system of diffraction gratings. The method generalizes the Kirchhoff approximation and is applicable for the asymptotic solution of Maxwell's equations.

**Keywords:** scalar wave equation, Helmholtz equation, one-dimensional diffractive optical element, diffraction grating, Kirchhoff approximation, Maxwell's equation.

**Citation:** Kharitonov SI, Doskolovich LL, Kazanskiy NL. The asymptotic solution of the scalar wave equation. *Computer Optics* 2003; 25: 49-53.

## References

- [1] Soifer VA, ed. *Methods of computer optics*. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2000.
- [2] Soifer VA, ed. *Methods for computer design of diffractive optical elements*. New York: John Wiley & Sons Inc; 2002.
- [3] Born M, Wolf E. *Basics of optics*. 4th ed. New York, London: Pergamon Press; 1965.
- [4] Vinogradova MB, Rudenko OV, Sukhorukov AP. *The waves theory*. Moscow: "Nauka" Publisher; 1979.
- [5] Kravtsov YuA, Orlov YuI. *Geometrical optics of inhomogeneous media*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1990.
- [6] Fedoryuk MV. *Asymptotics: integrals and series*. Moscow: "Nauka" Publisher; 1987.
- [7] Moharam MG, Grann EB, Pommet DA. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J Opt Soc Am A* 1995; 12(5): 1068-1076.
- [8] Moharam MG, Grann EB, Pommet DA, Gaylord TK. Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach. *J Opt Soc Am A* 1995; 12(5): 1077-1086.
- [9] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Computer generated diffractive multi-focal lens. *J Mod Opt* 1992; 39(6): 1245-1251.