

# ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

## КОЛЬЦЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

*В.В. Котляр, А.А. Ковалев*

*Институт систем обработки изображений РАН,  
Самарский государственный аэрокосмический университет*

### *Аннотация*

Рассмотрено интегральное преобразование, названное кольцевым преобразованием Радона (КПР) и являющееся обобщением преобразования Радона на случай, когда интегрирование происходит не по прямой линии, а по окружности определенного радиуса. Радиус окружности является параметром преобразования. Получены выражения для КПР некоторых конкретных функций. Выведены соотношения для получения образа объекта при его сдвиге и масштабировании. Приведена оптическая схема для выполнения КПР.

### *Введение*

Преобразование Радона (иногда его называют преобразованием Хоу (Hough)) широко используется в обработке изображений, геодезии, медицине, компьютерной томографии [1-4]. Двумерное преобразование Радона (ПР) определяется следующим образом:

$$R[f](c, \varphi) = \iint_{R^2} f(x, y) \delta(c - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy, \quad (1)$$

где  $\rho, \varphi$  – полярные координаты, описывающие прямую:  $\rho$  – расстояние от начала координат до прямой,  $\varphi$  – угол наклона прямой к оси  $Ox$ .

Обратное преобразование Радона можно получить в виде:

$$f(x, y) = \frac{1}{2p^2} \int_0^{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial c} R[f](c, \varphi) dc d\varphi. \quad (2)$$

Преобразование Радона во многом аналогично преобразованию Фурье (ПФ). Если ПФ раскладывает комплексную амплитуду света (двумерную функцию) по плоским волнам (по Фурье-гармоникам), то ПР «раскладывает» функцию по прямым линиям. Оба преобразования не являются сверткой и выполняются с помощью сферической линзы (для ПФ) и сферической линзы и фазового пространственного фильтра (для ПР) [5-7]. Поэтому для ПФ и ПР выполняется теорема Парсеваля, физически означающая выполнение закона сохранения световой энергии при распространении через сферическую линзу и фазовый фильтр. Как ПФ преобразует плоскую волну в фокальную точку, так и ПР преобразует прямую линию на изображении в точку. Но есть и отличия, например, ПФ переводит точку в плоскую волну, но ПР переводит точку в один период синусоиды [5].

В скалярной оптике наряду с ПФ известны и другие интегральные преобразования – преобразования Кирхгофа и Френеля. Их физический смысл заключается в разложении функции комплексной амплитуды, описывающей распространение света, по сферическим (преобразование Кирхгофа) и параболическим (преобразование Френеля) волнам. Можно по аналогии между ПФ и ПР определить кольцевое преобразование Ра-

дона (КПР), которое будет свертывать изображение с окружностями определенного радиуса и параболическое преобразование Радона (ППР), которое свертывает изображение с параболой. Эти преобразования КПР и ППР, как и преобразование Кирхгофа (ПК) и преобразование Френеля (ПФР), должны быть интегралами свертки. При стремлении радиуса окружности КПР к нулю, преобразование стремится к тождественному, а при стремлении радиуса окружности к бесконечности КПР переходит в обычное ПР.

Преобразование свертки можно оптически выполнить с помощью Фурье-коррелятора с пространственным фильтром, функция пропускания которого равна Фурье-образу от функции ядра свертки. Для случая КПР функцией ядра свертки является функция, описывающая окружность или бесконечно узкое кольцо (поэтому и преобразование называется кольцевым). Фурье-образ функции кольца – это функция Бесселя нулевого порядка. Поэтому функция пропускания пространственного фильтра Фурье-коррелятора для выполнения КПР должна быть пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка. Так как функция пропускания фильтра – амплитудная, то закон сохранения энергии для проходящего света не выполняется.

В данной работе рассмотрены основные свойства КПР; получены выражения для КПР некоторых простых функций; приводятся результаты численного моделирования обработки изображений с помощью КПР.

Так как КПР от функции точечного источника есть функция бесконечно узкого кольца, то можно считать, что КПР описывает оптическую систему с кольцевым импульсным откликом. Это обстоятельство указывает на тесную связь между КПР и мезооптикой, так как мезооптический объектив – это объектив с кольцевым импульсным откликом [8]. Отличие состоит в том, что в мезооптике в Фурье-корреляторе в качестве пространственного фильтра используется конический аксикон.

## **1. Основные свойства КПР**

### *1.1. Определение*

Введем в рассмотрение линейное интегральное преобразование комплексной двумерной функции, являющейся сверткой с обобщенной  $\delta$ -функцией Дирака:

$$R_z(a, z) = \iint_{R^2} f(x, y) \delta\left(z - \sqrt{(x-a)^2 + (y-z)^2}\right) dx dy, \quad (3)$$

где  $\gamma$  – радиус окружности.

В полярных координатах вместо (3) можно записать:

$$R_z(c, u) = \int_0^{2p} \int_0^\infty \delta(z-r) \times \quad (4)$$

$$\times f(r \cos \varphi + c \cos u, r \sin \varphi + c \sin u) \cdot r dr d\varphi$$

$$R_z(c, u) = z \int_0^{2p} f(z \cos \varphi + c \cos u, z \sin \varphi + c \sin u) d\varphi. \quad (5)$$

### 1.2. Вычисление КПП через БПФ

Так как КПП является сверткой, то его можно выразить через преобразования Фурье и вычислять с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Выразим преобразуемую функцию через ее Фурье-образ:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2p)^2} \iint_{R^2} F(o, z) \exp(i(xo + yz)) do dz, \quad (6)$$

где  $F(\xi, \eta)$  – Фурье-образ функции  $f(x, y)$ .

Фурье-образ радиальной  $\delta$ -функции из уравнения (3) пропорционален функции Бесселя нулевого порядка:

$$\begin{aligned} D(o, z) &= \iint_{R^2} \delta\left(z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \exp[-i(xo + yz)] do dz = \\ &= \int_0^{2p} \int_0^\infty \delta(z-r) \exp[-irc \cos(\varphi - u)] r dr d\varphi = \\ &= z \int_0^{2p} \exp[-izc \cos(\varphi - u)] d\varphi = 2pz J_0(zc), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя.

Из уравнения (7) следует, что преобразование Фурье-Бесселя (или преобразование Ханкеля нулевого порядка) от функции Бесселя нулевого порядка пропорционально радиальной  $\delta$ -функции:

$$\delta(z - c) = z \int_0^\infty J_0(zc) J_0(rc) c dc. \quad (8)$$

Тогда из уравнения (3) с учетом (6) и (7) получим представление КПП в виде обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} R(a, z) &= \frac{1}{(2p)^2} \iint_{R^2} F(x, y) \times \\ &\times 2pz J_0\left(z\sqrt{x^2 + y^2}\right) \exp[i(xo + yz)] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы вычислить КПП через БПФ по формуле (9) требуется вычислить Фурье-образ  $F(x, y)$  исходной функции  $f(\xi, \eta)$ , умножить его на функцию Бесселя  $J_0\left(\gamma\sqrt{x^2 + y^2}\right)$  и вычислить обратное ПФ.

В полярных координатах уравнение (9) имеет вид:

$$R(c, u) = \frac{z}{2p} \iint_{R^2} F(r, \varphi) \times \quad (10)$$

$$\times J_0(zr) \exp[irc \cos(\varphi - u)] r dr d\varphi$$

Если исходная функция радиально-симметричная, т.е.  $f(\xi, \eta) = f(\rho)$ , то уравнение (10) примет вид:

$$R(c) = z \int_0^\infty F(r) J_0(zr) J_0(rc) r dr. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что КПП-образ радиальной функции – радиальная функция.

### 1.3. Обратное кольцевое преобразование Радона

Из уравнения (9) можно получить обратное преобразование КПП.

Обозначим Фурье-образ от двумерной функции кольцевого преобразования Радона:

$$\tilde{K}(x, y) = \iint_{R^2} R(o, z) \times \quad (12)$$

$$\times \exp[-i(xo + yz)] do dz$$

Тогда из уравнения (9) следует связь Фурье-образов исходной функции и КПП

$$F(x, y) = \frac{\tilde{K}(x, y)}{2pz J_0\left(z\sqrt{x^2 + y^2}\right)}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) получается обратное КПП:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2p)^2} \iint_{R^2} \frac{\tilde{K}(o, z) \exp[i(xo + yz)]}{2pz J_0\left(z\sqrt{o^2 + z^2}\right)} do dz. \quad (14)$$

Из уравнения (14) следует, что обратное преобразование КПП есть преобразование Фурье от сингулярной функции, которая обращается в бесконечность в нулях функции Бесселя. Для корректного вычисления интеграла в уравнении (14) следует применять метод регуляризации Тихонова.

### 1.4. Смещение объекта

Пусть  $R_\gamma(\xi, \eta)$  – КПП-образ функции  $f(x, y)$ . Тогда КПП-образ от той же функции, но сдвинутой на вектор с координатами  $(a, b)$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}_z(a, z) &= \iint_{R^2} f(x-a, y-b) \times \\ &\times \delta\left(z - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right) dx dy = \iint_{R^2} f(b, v) \times \\ &\times \delta\left(z - \sqrt{[b-(o-a)]^2 + [v-(z-b)]^2}\right) db dv = \\ &= R_z(o-a, z-b). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что смещение функции приводит к аналогичному смещению КПП-образа.

### 1.5. Масштабирование объекта

Пусть  $R_\gamma(\xi, \eta)$  – КПП-образ функции  $f(x, y)$ . Тогда КПП-образ от той же функции, но масштабной измененной с коэффициентом  $\alpha$ , будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_z(o, z) &= \iint_{R^2} f(\bar{o}x, \bar{o}y) \delta\left(z - \sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}\right) dx dy = \\
&= \iint_{R^2} f(A, B) \delta\left(z - \frac{\sqrt{(A-\bar{o}o)^2 + (B-\bar{o}z)^2}}{\bar{o}}\right) \frac{dAdB}{\bar{o}^2} = \\
&= \iint_{R^2} f(A, B) \delta\left(\bar{o}z - \sqrt{(A-\bar{o}o)^2 + (B-\bar{o}z)^2}\right) \frac{dAdB}{\bar{o}} = \\
&= \frac{1}{\bar{o}} R_{\bar{o}z}(\bar{o}o, \bar{o}z)
\end{aligned} \tag{16}$$

Из уравнения (16) следует, что изменение масштаба объекта (сжатие или расширение) приводит к аналогичному изменению масштаба и параметра  $\gamma$  КПР-образа.

## 2. КПР некоторых функций

### 2.1. Преобразование точки

Пусть исходная функция представляет собой точечный импульс в начале координат, описывающий точечный источник света,  $f(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ . Тогда из уравнения (3) следует, что КПР-образ этой функции есть бесконечно узкое кольцо:

$$\begin{aligned}
R(o, z) &= \iint_{R^2} \delta(x)\delta(y) \delta\left(z - \sqrt{(x-o)^2 + (y-z)^2}\right) dx dy = \\
&= \delta\left(z - \sqrt{o^2 + z^2}\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

На рис. 1 показана оптическая схема для выполнения КПР. Показан Фурье-коррелятор, состоящий из двух сферических линз и амплитудного пространственного фильтра, функция пропускания которого есть функция Бесселя нулевого порядка, расстояния от плоскости объекта до линзы, от линзы до фильтра, от фильтра до второй линзы и от второй линзы до плоскости КПР-образа равны фокусному расстоянию обеих линз.

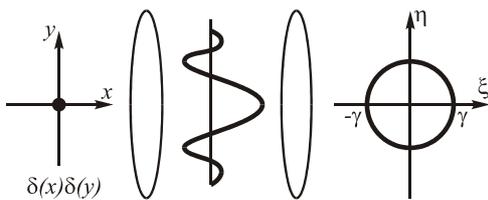


Рис. 1. КПР-образ точки есть кольцо

### 2.2. Преобразование линии

Пусть исходная функция описывает прямую линию, совпадающую с осью  $x$ , то есть  $f(x, y) = \delta(y)$ , тогда ее Фурье-образ также будет прямой линией, совпадающей с осью  $\eta$ :  $F(\xi, \eta) = \delta(\xi)$ . Далее с учетом уравнения (9) получим:

$$\begin{aligned}
R(x, y) &= \frac{z}{2p} \iint_{R^2} \delta(o) J_0\left(z\sqrt{o^2 + z^2}\right) \exp[i(x\xi + y\eta)] d\odot dz = \\
&= \frac{z}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(z|z|) \exp(iy\eta) dz \stackrel{м.к. J_0 - \text{четная}}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(zz) \exp(iy\eta) dz = \\
&= \frac{\gamma}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp[-i\gamma\eta \cos\phi] \exp(iy\eta) d\phi d\eta = \\
&= \frac{\gamma}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \delta(\gamma \cos\phi - y) d\phi = \\
&= \frac{2z}{2p} \int_0^p \delta(z \cos\phi - y) d\phi \stackrel{\cos\phi=t}{=} \frac{z}{p} \int_{-1}^1 \frac{\delta(zt - y) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\
&= \frac{1}{p} \int_{-1}^1 \frac{\delta\left(t - \frac{y}{z}\right) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}}, \gamma > y. \tag{18}
\end{aligned}$$

Если  $\gamma < y$ , то интеграл равен нулю.

Из уравнения (18) следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{z}{2p} \iint_{R^2} \delta(o) J_0\left(z\sqrt{o^2 + z^2}\right) \exp[i(xo + yz)] d\odot dz = \\
= \frac{1}{p} \frac{1}{\sqrt{z^2 - y^2}}
\end{aligned} \tag{19}$$

Из уравнения (19) следует, что прямая линия переходит в две параллельные линии, параллельные также исходной линии, лежащей на оси  $x$  (рис. 2).

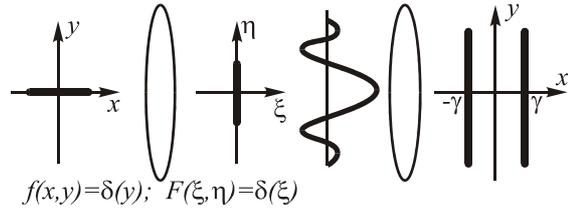


Рис. 2. КПР-образ линии есть две параллельные линии

### 2.3. Преобразование наклонной плоской волны

Пусть исходной функцией является плоская волна (или Фурье-гармоника):

$$f(x, y) = \exp(i\alpha x), \tag{20}$$

которая наклонена только к одной оси  $x$ .

Тогда КПР-образ такой функции будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
R(c, u) &= z \int_0^{2p} f(z \cos\phi + c \cos u) d\phi = \\
&= \gamma \int_0^{2\pi} \exp(i\alpha\gamma \cos\phi) \exp(i\alpha\rho \cos\theta) d\phi = \\
&= 2p\gamma \exp(i\bar{o}c \cos u) J_0(\bar{o}z) = 2p\gamma J_0(\bar{o}z) \exp(i\alpha\xi). \tag{21}
\end{aligned}$$

Из уравнения (21) следует, что плоская волна  $e^{i\alpha x}$  переходит в плоскую волну  $(2p\gamma J_0(\alpha\gamma)) \exp(i\alpha\xi)$ , также наклоненную только к одной оси  $\xi$ , которая параллельна оси  $x$ , то есть КПР сохраняет величину и направление наклона плоской волны, изменяя только

амплитуду. Если  $\alpha\gamma$  – корень функции Бесселя, то плоская волна не проходит через оптическую систему на рис. 1, так как ее амплитуда на выходе равна нулю.

#### 2.4. Преобразование периодической функции

Пусть на входе в оптическую систему на рис. 1 имеется световое поле, комплексная амплитуда которого есть периодическая функция:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp[i(\bar{\theta}_n x + \bar{\epsilon}_n y)], \quad (22)$$

тогда на выходе оптической системы на рис. 1 появится световое поле, комплексная амплитуда которого есть КПП-образ от функции (22):

$$\begin{aligned} R(c, u) &= z \int_0^{2p} f(z \cos \varphi + c \cos u, z \sin \varphi + c \sin u) d\varphi = \\ &= z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_0^{2p} \exp[i\bar{\theta}_n (z \cos \varphi + c \cos u)] \times \\ &\times \exp[i\bar{\epsilon}_n (z \sin \varphi + c \sin u)] d\varphi = \\ &= z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp[i(\bar{\theta}_n c \cos u + \bar{\epsilon}_n c \sin u)] \times \\ &\times \int_0^{2p} \exp[i(\bar{\theta}_n z \cos \varphi + \bar{\epsilon}_n z \sin \varphi)] d\varphi = \\ &= 2p z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_0 \left( z \sqrt{\bar{\theta}_n^2 + \bar{\epsilon}_n^2} \right) \exp[i(\bar{\theta}_n c \cos u + \bar{\epsilon}_n c \sin u)] = \\ &= 2p z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n \exp[i(\bar{\theta}_n c \cos u + \bar{\epsilon}_n c \sin u)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнения (23) следует, что КПП переводит периодическую функцию в другую периодическую функцию с тем же периодом.

В частности, КПП сохраняет косинус (или синус):

$$f(x) = \cos ux = \frac{\exp(i\omega x) + \exp(-i\omega x)}{2}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} R(\omega, z) &= 2p z J_0(z\omega) \frac{\exp(i\omega z) + \exp(-i\omega z)}{2} = \\ &= 2p z J_0(z\omega) \cos \omega z. \end{aligned} \quad (25)$$

Заметим, что если  $\gamma\omega$  – корень функции Бесселя, то  $R \equiv 0$ .

#### 2.5. Преобразование окружности

Пусть исходной функцией является бесконечно узкое кольцо или окружность:

$$f(x, y) = \delta \left( R - \sqrt{x^2 + y^2} \right), \quad (26)$$

$R$  – радиус кольца.

Фурье-образ функции (26) есть функция Бесселя:

$$F(c) = 2p \int_0^{\infty} \delta(R-r) J_0(rc) r dr = 2p R J_0(Rc), \quad (27)$$

а КПП-образ радиальной функции можно вычислить с помощью уравнения (11):

$$R(c) = \frac{z}{2p} 2p R \int_0^{\infty} J_0(Rr) J_0(zr) J_0(rc) r dr \quad (28)$$

Интеграл (28) можно найти в справочнике [9]:

$$\int_0^{\infty} J_0(ax) J_0(bx) J_0(cx) x dx = \begin{cases} 0, c < |a-b|, \\ 0, c > a+b, \\ \frac{1}{pab} (1-r^2)^{-1/2} |a-b| < c < a+b; \end{cases} \quad (29)$$

$$\text{где } r = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

В нашем случае из формулы (29) следует:

$$R(c) = \begin{cases} 0, c < |z-R|, \\ 0, c > z+R, \\ \frac{2}{p\sqrt{4R^2 z^2 - (R^2 + z^2 - c^2)}} |z-R| < c < z+R; \end{cases} \quad (30)$$

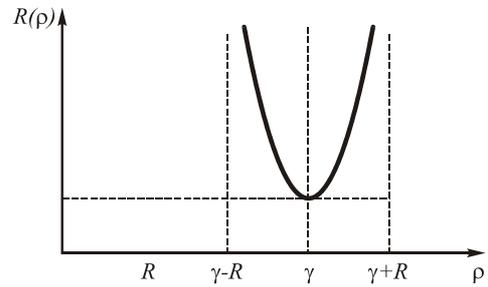


Рис. 3. График КПП-образа узкого кольца (формулы (30))

Из уравнения (30) следует, что при  $\rho = \lambda + R$  и  $\rho = \lambda - R$  КПП-образ стремится к бесконечности  $R(\rho) = +\infty$ , а при  $\rho = \gamma$  КПП-образ имеет минимум

$$R(\gamma) = \frac{2}{\pi R \sqrt{4\gamma^2 - R^2}}. \text{ При } \gamma \gg R \text{ из уравнения (30)}$$

следует, что КПП-образ бесконечно узкого кольца радиусом  $R$  есть два близких кольца с радиусами  $R-\gamma$  и  $R+\gamma$ .

#### 2.6. Преобразование круга

Если исходной функцией является функция, описывающая круг радиуса  $R$ :

$$f(x, y) = \text{circ}l \left( \frac{r}{R} \right), \quad (31)$$

Фурье-образ которой пропорционален функции Эйри:

$$F(c) = 2p \frac{R J_1(Rc)}{c}, \quad (32)$$

то КПП-образ радиальной функции можно вычислить по формуле (11):

$$R(c, u) = \frac{z}{2p} 2p R \int_0^{\infty} \frac{J_1(Rr)}{r} J_0(zr) J_0(rc) r dr. \quad (33)$$

Интеграл (33) вычисляется с помощью справочного интеграла [9]:

$$\int_0^{\infty} J_0(ax)J_0(bx)J_1(cx)xdx = \begin{cases} 0, c < |a-b|, \\ \frac{1}{c}, c > a+b, \\ \frac{1}{pc} \arccos \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, |a-b| < c < a+b; \end{cases} \quad (34)$$

С учетом (34) КПП-образ (33) имеет вид

$$R(c) = \begin{cases} 0, |c-z| > R, \\ z, R > c+z, \\ \frac{z}{p} \arccos \frac{c^2+z^2-R^2}{2cz}, |c-z| < R < c+z; \end{cases} \quad (35)$$

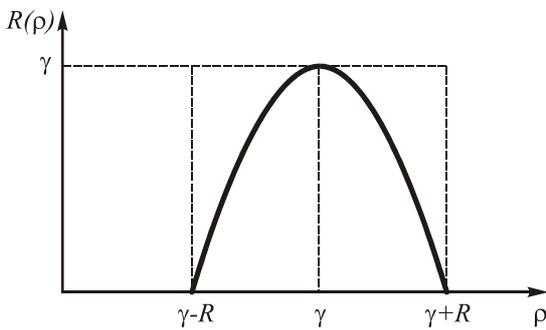


Рис. 4. График КПП-образа круга (формулы (35))

Из уравнения (35) следует, что КПП-образ функции круга есть кольцо с радиусом  $\gamma$  и шириной  $2R$  ( $R < \gamma$ ) (рис. 4). При других соотношениях параметров  $\gamma$  и  $R$  КПП-образ имеет другой вид.

КПП – образ функции широкого кольца можно получить с помощью уравнения (35), примененного к функции

$$f(r) = \text{circl} \frac{r}{R_1} - \text{circl} \frac{r}{R_2}. \quad (36)$$

### 2.7. Преобразование прямоугольника

Пусть исходной функцией является функция прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ :

$$f(x,y) = \text{rect} \left( \frac{x}{a} \right) \text{rect} \left( \frac{y}{b} \right), \quad (37)$$

Фурье-образ которой пропорционален произведению sinc-функций:

$$F(o,z) = 4ab \cdot \sin c(ao) \cdot \sin c(bz). \quad (38)$$

Тогда КПП-образ функции (37) можно вычислить с помощью уравнения (9):

$$R(x,y) = \frac{z}{2p} 4 \iint_{R^2} \frac{\sin(ao)}{o} \frac{\sin(bz)}{z} \times \quad (39)$$

$$\times J_0(z\sqrt{o^2+z^2}) \exp[i(xo+yz)] d\phi dz$$

Так как

$$4\sin(ao)\sin(bz) = -[\exp(ia\xi) - \exp(-ia\xi)] \cdot [\exp(ib\eta) - \exp(-ib\eta)],$$

то достаточно рассмотреть только одно слагаемое из четырех в уравнении (39):

$$I_1 = -\frac{z}{2p} \iint_{R^2} \frac{J_0(z\sqrt{o^2+z^2})}{oz} \times \exp\{i[o(x+a)+z(y+b)]\} d\phi dz \quad (40)$$

Интеграл (40) нельзя вычислить с помощью аналитических функций, но вторая смешанная производная от интеграла (40) может быть выражена с помощью  $\delta$ -функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} &= \frac{z}{2p} \iint_{R^2} J_0(z\sqrt{o^2+z^2}) \exp\{i[o(x+a)+z(y+b)]\} d\phi dz = \\ &= \frac{z}{2p} \iint_{R^2} J_0(zr) \exp[irc \cos(\phi-u)] r dr d\phi = \\ &= z \iint_{R^2} J_0(zr) J_0(rc) r dr = \\ &= \delta(z-c) = \delta\left(z - \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

С учетом уравнения (41) и четырех слагаемых в уравнении (39) получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R(x,y)}{\partial x \partial y} &= \delta\left(z - \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}\right) - \\ &- \delta\left(z - \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}\right) - \\ &- \delta\left(z - \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}\right) + \\ &+ \delta\left(z - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right). \end{aligned} \quad (42)$$

Из уравнения (42) следует, что КПП-образ функции прямоугольника имеет такой вид, что его контурами являются окружности радиуса  $\gamma$  с центрами в точках с координатами  $(-a, -b)$ ,  $(-a, b)$ ,  $(a, -b)$  и  $(a, b)$ .

### 2.8. Преобразование функции Гаусса

Пусть на входе в оптическую систему на рис.1 имеется световое поле, комплексная амплитуда которого описывается функцией Гаусса:

$$f(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{u^2}\right), \quad (43)$$

Фурье-образом которой также является гауссовая функция:

$$F(c) = pu^2 \exp\left(-\frac{c^2 u^2}{4}\right). \quad (44)$$

Тогда КПП-образ функции (43), вычисленный с помощью формулы (5), имеет вид:

$$R(c,u) = z \int_0^{2p} f(z \cos \phi + c \cos u, z \sin \phi + c \sin u) d\phi =$$

$$= \int_0^{2p} f(z^2 + c^2 - 2zc \cos \phi) d\phi =$$

$$\begin{aligned}
&= z \int_0^{2p} \exp\left(-\frac{z^2}{u^2}\right) \exp\left(-\frac{c^2}{u^2}\right) \exp\left(\frac{2zc}{u^2} \cos \varphi\right) d\varphi = \\
&= z \exp\left(-\frac{z^2 + c^2}{u^2}\right) \int_0^{2p} \exp\left(\frac{2zc}{u^2} \cos \varphi\right) d\varphi = \\
&= z \exp\left(-\frac{z^2 + c^2}{u^2}\right) \int_0^{2p} \exp\left[-i \frac{2(izc)}{u^2} \cos \varphi\right] d\varphi = \\
&= 2pz \exp\left(-\frac{z^2 + c^2}{u^2}\right) J_0\left(\frac{2izc}{u^2}\right) = \\
&= 2pz \exp\left(-\frac{z^2}{u^2}\right) \exp\left(-\frac{c^2}{u^2}\right) I_0\left(\frac{2zc}{u^2}\right), \quad (45)
\end{aligned}$$

где  $I_0(x)$  – модифицированная функция Бесселя.

Из уравнения (45) следует, что КПР сохраняет функцию Гаусса, но умножает ее на модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка:

$$I_m(x) = (-i)^m J_m(ix)$$

и на постоянную величину.

### 2.9. Преобразование моды Бесселя $n$ -го порядка

Пусть исходной функцией является функция Бесселя произвольного порядка, умноженная на угловую гармонику:

$$f(x, y) = f(r, \varphi) = J_n(\bar{\sigma}r) \exp(in\varphi). \quad (46)$$

Фурье-образом функции (46) является функция бесконечно узкого кольца:

$$\begin{aligned}
F(\alpha, z) &= \iint_{R^2} J_n(\bar{\sigma}r) \exp(in\varphi) \exp[-irc \cos(\varphi - u)] r dr d\varphi = \\
&= \exp(in\theta) \int_0^\infty J_n(\bar{\sigma}r) \int_0^{2p} \exp[in(\varphi - u)] \exp[-irc \cos(\varphi - u)] d\varphi r dr = \\
&= 2p(-i)^n \exp(in\theta) \int_0^\infty J_n(\bar{\sigma}r) J_n(rc) r dr = \\
2p(-i)^n \exp(in\theta) \frac{\partial(\bar{\sigma} - c)}{\bar{\sigma}} &= F(c, u), \quad (47)
\end{aligned}$$

а КПР-образ можно вычислить с помощью уравнения (10):

$$\begin{aligned}
R(r, \varphi) &= \frac{z}{2p} \iint_{R^2} F(c, u) \cdot J_0(zc) \exp[irc \cos(\varphi - u)] c dc du = \\
&= \frac{z}{\bar{\sigma}} (-i)^n \iint_{R^2} \partial(\bar{\sigma} - c) \cdot J_0(zc) \exp(in\theta) \exp[irc \cos(\varphi - u)] c dc du = \\
&= \frac{z}{\bar{\sigma}} (-i)^n \int_0^\infty \partial(\bar{\sigma} - c) J_0(zc) \exp(in\varphi) \cdot 2pi^n J_n(rc) c dc = \\
&= \frac{2pz}{\bar{\sigma}} J_0(\bar{\sigma}z) J_n(\bar{\sigma}r) \exp(in\varphi). \quad (48)
\end{aligned}$$

При получении выражения (48) было использовано интегральное представление функции Бесселя:

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2p} \int_0^{2p} \exp(ix \cos t) \exp(int) dt. \quad (49)$$

Из уравнения (48) следует, что КПР сохраняет функцию Бесселя  $n$ -го порядка, умноженную на

угловую гармонику, домножая ее на константу. Если  $\bar{\sigma}z$  – корень функции Бесселя нулевого порядка  $J_0(\alpha\gamma)=0$ , то функция Бесселя  $n$ -го порядка не пропускается через оптическую систему на рис. 1.

### 3. Численное моделирование

Моделирование кольцевого преобразования Радона осуществлялось с помощью вычисления двух дискретных преобразований Фурье (прямого и обратного) и умножения на функцию Бесселя:

$$F(x', y') = \mathfrak{F}^{-1}[J \cdot \mathfrak{F}[f(x, y)]] \quad (50)$$

$\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}^{-1}$  – символ прямого и обратного преобразования Фурье,  $J$  – функция Бесселя. В дискретном варианте преобразование Фурье вычисляется в виде двойной суммы:

$$F_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \exp\left[-i \frac{2p}{N} (mk + nl)\right], \quad (51)$$

а функцию пропускания выберем в виде:

$$J_{mn} = J_0\left(nz\left(m - \frac{N}{2}\right)^2 + \left(n - \frac{N}{2}\right)^2\right), \quad (52)$$

где  $n$  – разрешение в частотной плоскости.

В таблице 1 приведены исходные изображения на входе Фурье-коррелятора  $|f(x, y)|^2$  (первый и второй столбец): точка, квадрат, круг, а также изображения на выходе Фурье-коррелятора  $|F(x', y')|^2$  (столбцы 3-5) для соответствующих значений параметра  $\gamma$  (радиуса окружности).

Из таблицы 1 видно, что с ростом параметра  $\gamma$  происходят следующие преобразования. Когда  $\gamma$  существенно меньше размеров объекта, объект изменяется незначительно, происходит лишь размытие контура. Когда  $\gamma$  сопоставимо с размером объекта, происходит существенное размытие. Когда же  $\gamma$  становится больше размеров объекта, по центру объекта возникает пустота, а интенсивность появляется по краям объекта.

Очевидно, что КПР-образ в некоторой точке максимален, если на исходном изображении на кольце радиуса  $u$  с центром в этой точке интенсивность также максимальна. Поэтому предположим, что КПР-преобразование можно использовать для обнаружения колец на изображении.

Для примера рассмотрим изображение с цифрами (рис. 5).

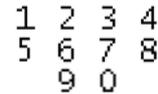


Рис. 5. Арабские цифры

Цифры состоят из отрезков прямых линий и дуг окружностей. Окружности могут быть разных диаметров. В цифрах встречаются дуги окружностей с диаметром, равным приблизительно половине высоты всей цифры (такие дуги характерны для цифр «2», «3», «5», «6», «8», «9» и «0», рис. 6a) и с диаметром, равным приблизительно высоте всей цифры (такие дуги характерны для цифр «3», «6», «8», «9» и «0», рис. 6b).

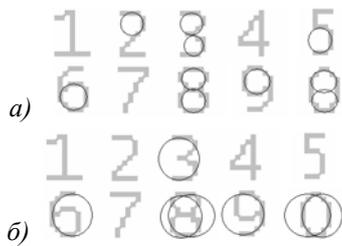


Рис. 6. Приближение арабских цифр дугами окружностей:

- а) дуги окружностей с диаметром, равным приблизительно половине высоты всей цифры,  
 б) дуги окружностей с диаметром, равным приблизительно высоте всей цифры

При проведении эксперимента изображение с цифрами (рис. 5) подавалось на вход КПП-преобразования, однако наибольший контраст наблюдались при нескольких значениях параметра  $\gamma$  (рис. 7).

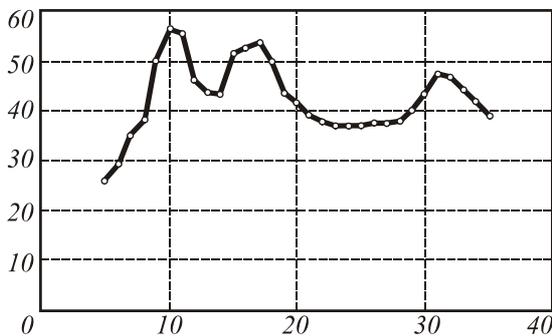


Рис. 7. Зависимость контраста от параметра  $\gamma$  для изображения цифр

КПП-образы при  $\gamma$ , соответствующих максимальному контрасту, показаны на рис. 8.

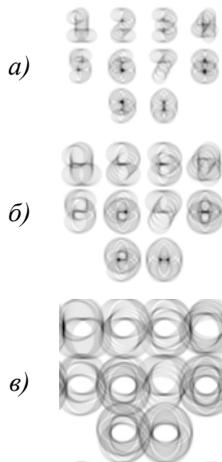


Рис. 8. КПП-образы изображения цифр при значениях параметра  $\gamma$ , для которых контраст максимален:

- а) КПП-образ изображения цифр при  $\gamma = 10$  ;  
 б) КПП-образ изображения цифр при  $\gamma = 17$  ;  
 в) КПП-образ изображения цифр при  $\gamma = 31$

На них видно, что при  $\gamma = 10$  наибольшую интенсивность на КПП-образе имеют отсчеты, соответ-

ствующие центрам окружностей с диаметром, равным приблизительно половине высоты всей цифры. При  $\gamma = 17$ , наибольшую интенсивность на КПП-образе имеют отсчеты, соответствующие центрам окружностей с диаметром, равным приблизительно высоте всей цифры. При  $\gamma = 31$  КПП-преобразование дало размытие всех цифр, не позволяющее выделить центры окружностей, из дуг которых эти цифры состоят.

На реальном изображении также происходит размытие контуров (рис. 9).

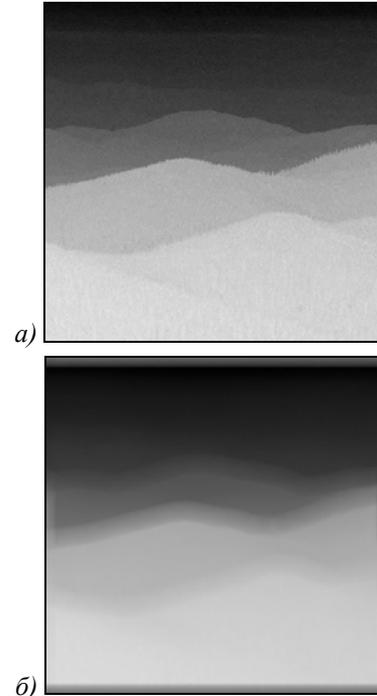


Рис. 9. Результат КПП-преобразования на реальном изображении при  $\gamma = 10$  :

- а) входное изображение;  
 б) выходящее изображение

### Заключение

- В работе получены следующие результаты.
- Введено в рассмотрение некоторое обобщение двумерного интегрального преобразования Радона, названное кольцевым преобразованием Радона (КПП), которое отличается от обычного преобразования Радона тем, что свертывает функцию не с прямой линией, а с окружностью.
  - Получены основные свойства линейного интегрального КПП: связь с преобразованием Фурье; обратное кольцевое преобразование Радона; смещение КПП-образа при смещении функции; масштабирование КПП-образа при масштабировании функции.
  - Вычислены КПП-образы от некоторых функций: точки, круга, кольца, синусоиды, прямоугольника, Гаусса, Бесселя  $n$ -го порядка.

С помощью численного моделирования показана возможность использования Фурье-коррелятора, моделирующего КПП, для обнаружения дуг окружностей на изображении, например, частей цифр или букв.

Таблица 1. Результаты прохождения изображений некоторых геометрических объектов через Фурье-коррелятор, моделирующий КПП, при различных параметрах  $\gamma$

Входное изображение	Выходное изображение		
	$\gamma = 10$	$\gamma = 30$	$\gamma = 50$
Точка			
Квадрат (120x120)			
Круг ( $R=60$ px)			

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1007.2003.01, а также российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» («BRHE»).

#### Литература

1. Helgason S. The Radon Transform // Boston, MA: Birkhauser, 1980.
2. Deans S.R. The Radon Transform and some of its Application // New York, Willey, 1982.
3. Anger B., Portenier C. Radon Integrals // Boston, MA: Birkhauser, 1992.
4. Rann A.G., Katsevich A.I. The Radon Transform and Local Tomography // Boca Raton, CRC Press, 1996.
5. Ambs P., Lee S.H., Tain Q., Fainmann Y. Optical implementation of the Hough transform by a matrix of holograms // Appl. Opt., 1986. V. 25, N. 22. P. 4035-4045.
6. Woodford P., Casasent D. High accuracy and fast new format optical Hough-transform // Opt. Mem. and Neur. Net., 1997. V. 1. P. 1-16.
7. Сойфер В.А., Котляр В.В., Скиданов Р.В. Оптическое выполнение преобразования Хоу-Радона // Компьютерная оптика, 1997. Вып. 17. С. 143-144.
8. Soroko L.M. Mesooptics. Foundations and Applications, World Scientific, Singapore, 1996.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции // М.: Наука, 1983.

# Circular Radon transform

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Image Processing Systems Institute of RAS

<sup>2</sup> Samara State Aerospace University

## Abstract

The paper considers an integral transformation called the Circular Radon Transform (CRT), which is a generalization of the Radon transform for the case when the integration is performed along a circle of a certain radius, not a straight line. The radius of the circle is the transform parameter. Expressions for the CRT of several specific functions are obtained. Formulae are derived for generating an object image when the object is shifted and scaled. An optical scheme for performing the CRT is provided.

Keywords: circular transform, radon, CRT, radius circle.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA. Circular Radon transform. Computer Optics 2003; 25: 126-133.

## References

- [1] Helgason S. The Radon transform. Boston, MA: Birkhauser; 1980.
- [2] Deans SR. The Radon transform and some of its application. New York: Willey; 1982.
- [3] Anger B, Portenier C. Radon integrals. Boston, MA: Birkhauser; 1992.
- [4] Rann AG, Katsevich AI. The Radon transform and local tomography. Boca Raton: CRC Press; 1996.
- [5] Ambs P, Lee SH, Tain Q, Fainmann Y. Optical implementation of the Hough transform by a matrix of holograms. Appl Opt 1986; 25(22): 4035-4045.
- [6] Woodford P., Casasent D. High accuracy and fast new format optical Hough-transform. Optical Memory and Neural Networks 1997; 1: 1-16.
- [7] Soifer VA, Kotlyar VV, Skidanov RV. Optical implementation of the Hough-Radon transform. Computer Optics 1997; 17: 143-144.
- [8] Soroko LM. Mesooptics. Foundations and applications. Singapore: World Scientific; 1996.
- [9] Prudnikov AP, Brychkov IA, Marichev OI. Integrals and series. Vol 2: Special functions. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers; 1986.