# ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ КОНЕЧНОГО РАДИУСА НА СПИРАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛАСТИНКЕ

*В.В. Котляр, С.Н. Хонина, А.А. Ковалев, В.А. Сойфер*

*Институт систем обработки изображений РАН*
*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева*

***Аннотация***

Получены аналитические выражения через гипергеометрическую функцию, описывающие дифракцию Френеля и Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на спиральной фазовой пластинке (СФП) любого целого порядка. Экспериментальные картины дифракции, полученные с помощью СФП, изготовленной на резисте прямой записью электронным лучом, находятся в хорошем согласии с расчетными распределениями интенсивности.

## *Введение*

Спиральная фазовая пластинка (СФП) как оптический элемент, функция пропускания которого пропорциональна $\exp(in\varphi)$, где $\varphi$ – полярный угол, $n$ – целое число (порядок СФП), был изготовлен и проанализирован впервые в [4].

В последнее время интерес к СФП возрос, особенно из-за возможности оптической манипуляции микрочастицами с помощью СФП [3, 5-8, 10, 11]. Поэтому актуальным является продолжение исследований дифракции света на СФП. В [6] теоретически исследован случай дифракции неограниченной плоской волны на СФП с произвольным целым $n$, в [2] теоретически исследована дифракция плоской неограниченной волны на СФП с дробным номером $n$. Дифракция Гауссова пучка на СФП была исследована в [9].

В этой работе приводятся аналитические выражения для дифракции Френеля и Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП произвольного целого порядка. Приводятся также результаты экспериментов по дифракции плоской волны конечного радиуса на СФП с $n = 2,3$. СФП были изготовлены с высокой точностью (около 1,5% для СФП второго порядка и 4,3% для СФП третьего порядка) с помощью прямой записи электронным пучком на резисте и имеют 32 градации рельефа. Показано также, что экспериментальные картины дифракции хорошо согласуются с расчетными.

## *1. Дифракция Фраунгофера ограниченной плоской волны на СФП*

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера плоской волны конечного радиуса на СФП. Плоская волна единичной амплитуды с радиусом R и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$, где $\lambda$ - длина волны, распространяющаяся вдоль оси $z$, описывается комплексной амплитудой при $z = 0$:

$$E_0(r) = circl\left(\frac{r}{R}\right), \tag{1}$$

где

$$circl(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть плоская волна (1) падает на СФП, функция пропускания которой имеет вид:

$$\tau(\varphi) = \exp(in\varphi), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{3}$$

где $(r,\varphi)$ – полярные координаты при $z = 0$. Картина дифракции Фраунгофера плоской волны (1) на СФП (3) формируется в задней фокальной плоскости сферической Фурье-линзы с фокусным расстоянием $f$ и описывается преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} E_n(\rho,\theta) &= \frac{(-i)^{n+1}k}{f}\exp(in\theta)\int_0^R J_n\left(\frac{k}{f}r\rho\right)r\,\mathrm{d}r = \\ &= \frac{(-i)^{n+1}\exp(in\theta)}{(n+2)n!}\frac{kR^2}{f}\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n \times \\ &\times {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2},\frac{n+4}{2},n+1;-\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{4}$$

где $(\rho,\theta)$ – полярные координаты в Фурье-плоскости, $J_n(x)$ – функция Бесселя $n$-го порядка первого рода, ${}_1F_2(a,b,c;x)$ – гипергеометрическая функция:

$${}_1F_2(a,b,c;x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m x^m}{(b)_m (c)_m m!}, \tag{5}$$

где

$(a)_m = a(a+1)(a+2)...(a+m-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера, $(a)_0 = 1$. Уравнение (4) было получено на основе справочного интеграла из [1].

С учетом того, что функция Бесселя представима в виде ряда

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \tag{6}$$

из уравнения (4) при $n = 0$ (СФП отсутствует) следует выражение для дифракции Фраунгофера плоской волны на круглой диафрагме радиуса $R$:

$$E_0(\rho) = \left(\frac{-iR}{\rho}\right)J_1\left(\frac{kR\rho}{f}\right), \tag{7}$$

Из (4) можно видеть также, что при $n \ne 0$ в центре Фурье-плоскости ($\rho = 0$) амплитуда равна нулю:

$E_n(\rho = 0, \theta) = 0$. Из (4) и (5) также следует, что при малых $\rho << 2f/kR$ ${}_1F_2(a,b,c;x) \approx 1$ и $E_n(\rho \to 0, \theta) \sim \frac{kR^2}{f}\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n$, где $\sim$ – знак пропорциональности. Из (4) можно найти радиус $\rho_n$ кольца (радиус максимального значения интенсивности), приравняв дробь в круглых скобках некоторой постоянной $a_n$, зависящей только от номера спиральной пластинки $n$:

$$\rho_n = \frac{\lambda f a_n}{\pi R}. \tag{8}$$

На рис. 1 показаны графики функции интенсивности $I_n(\rho) = |E_n(\rho, \theta)|^2$, вычисленные по формуле (4). В ряду (5) сохранялось 110 слагаемых. Параметры расчета: $\lambda$ =0,633 мкм, $f$ =100 мм, $R$ =1 мм.

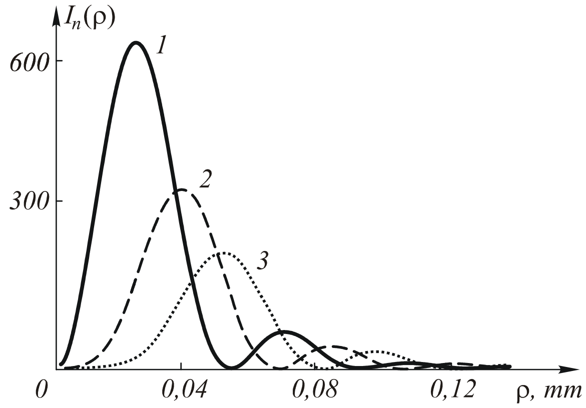



*Рис. 1. Радиальные распределения интенсивности картины дифракции Фраунгофера плоской волны радиуса R=1 мм на СФП с номером n=1 (кривая 1), n=2 (кривая 2) и n=3 (кривая 3)*

Из уравнения (4) следует, что так как амплитуда $E_n(\rho, \theta)$ пропорциональна сомножителю $\rho^n$, то с ростом номера $n$ будет увеличиваться радиус первого кольца картины дифракции (рис. 1). На рис. 2 показаны радиальные распределения интенсивности картины дифракции плоской волны с разными радиусами $R$ на СФП с номером $n = 2$.

Из рис. 2 видно, что с увеличением радиуса плоской волны $R$ радиус и ширина первого кольца картины дифракции уменьшаются, а максимальное значение интенсивности на кольце увеличивается. Из уравнения (4) следует, что интенсивность пропорциональна выражению:

$$I_n(\xi) \sim R^4 \xi^{2n} \times$$
$$\times \left| {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1; -\left(\frac{k\xi}{2f}\right)^2\right]\right|^2, \tag{9}$$

где $\xi = R\rho$. Из уравнений (4) и (8) следует, что с ростом $R$ картина дифракции меняется только масштабно, и радиусы колец уменьшаются во столько раз, во сколько раз увеличивается $R$. Максимальное значение интенсивности на первом кольце растет пропорционально $R^4$. Например, для кривых 1 и 3 на рис. 2 отношение максимальных значений интенсивности равно 34/24≈5.

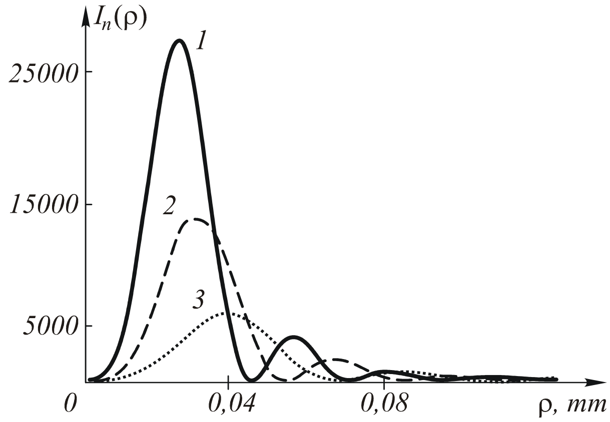



*Рис. 2. Радиальные распределения интенсивности картины дифракции Фраунгофера плоской волны на СФП с номером n=2 при R=3 мм (кривая 1), R=2,5 мм (кривая 2) и R=2 мм (кривая 3)*

### *2. Дифракция Френеля ограниченной плоской волны на СФП*

Рассмотрим дифракцию Френеля ограниченной плоской волны на СФП. Параксиальная дифракция волны (1) на СФП (3) будет описываться преобразованием Френеля:

$$E_n(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times$$
$$\times \int_0^R \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_n\left(\frac{k}{z} r\rho\right) r\, \mathrm{d}r =$$
$$= \exp\left(\frac{iz_0\bar{\rho}^2}{z} + in\theta\right) \cdot \frac{2\left(\frac{-iz_0}{z}\right)^{n+1} \bar{\rho}^n}{n!} \cdot \tag{10}$$
$$\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz_0}{z}\right)^m}{(2m+n+2)!\,m!} \cdot$$
$$\cdot {}_1F_2\left[\frac{2m+n+2}{2}, \frac{2m+n+4}{2}, n+1; -\left(\frac{z_0\bar{\rho}}{z}\right)^2\right],$$

где $z_0 = \frac{kR^2}{2}$ – длина Рэлея, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{R}$. Уравнение (10) отличается от уравнения (4) тем, что гипергеометрические функции (5) появляются как слагаемые ряда. Из уравнения (10) видно, что при $n \neq 0$ в центре пучка при $\rho = 0$ имеет место нулевая амплитуда $E_n(\rho = 0, \theta, z) = 0$ при любом $z$, кроме $z = 0$. Из уравнения (10) также видно, что с ростом $z$ в ряду гипергеометрических функций вклад дают только несколько первых членов ряда, а при $z \to \infty$

($z >> z_0$, дальняя зона) вклад в амплитуду будет давать только первый член при $m = 0$, который совпадает с правой частью уравнения (4). Заметим, что в (10) целая часть отношения $z_0/z$ равна числу Френеля. Заметим также, что выражение (10) при $n = 0$ (СФП отсутствует) описывает дифракцию Френеля плоской волны на круглой диафрагме радиуса $R$:

$$E_0(\rho, z) = (-1)\exp\left(\frac{iz_0\bar{\rho}^2}{z}\right)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{iz_0}{z}\right)^{m+1}}{(m+1)!}\,{}_1F_2\left[m+1, m+2, 1; -\left(\frac{z_0\bar{\rho}}{z}\right)^2\right] \qquad (11)$$

Из (11) можно получить простую зависимость комплексной амплитуды светового поля на оптической оси ($\rho = 0$) от расстояния $z$ до диафрагмы:

$$E_0(\rho = 0, z) = 1 - \exp\left(\frac{iz_0}{z}\right) \qquad (12)$$

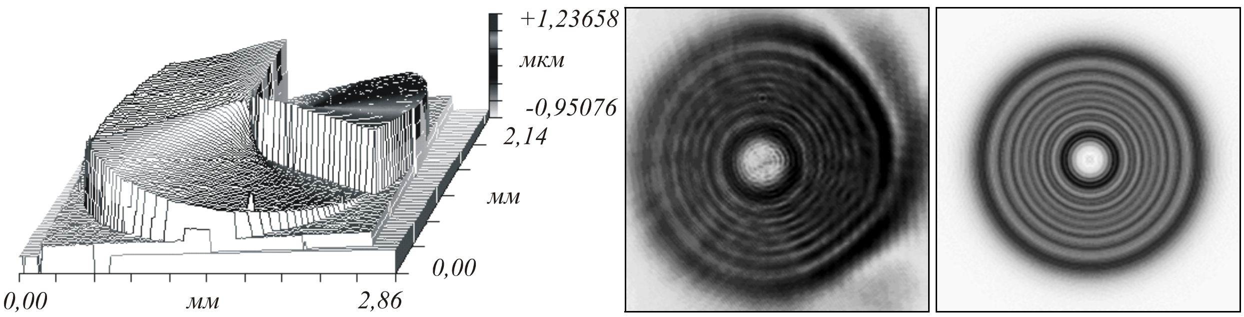
Выражение (12) совпадает с полученным ранее [12].

На рис. 3 показаны результаты сравнения эксперимента и расчета. На рис. 3*а* показан профиль поверхности СФП с номером $n$=3 и диаметром 2,5 мм, визуализированный с помощью интерферометра Newview 5000 Zygo (увеличение в 200 раз). Профиль СФП отличается от идеального на 4,3%, а сама СФП имеет 32 градации рельефа и была изготовлена на низкоконтрастном отрицательном резисте XAR-N7220 путем прямой записи электронным пучком с помощью литографа Leica LION LV1 с разрешением 5 мкм.

На рис. 3*б*, *в* показаны экспериментальная и расчетная картины дифракции на СФП плоской волны с радиусом $R$=1,25 мм и длиной волны $\lambda$=0,633 мкм на расстоянии $z$=80 мм. Обе картины дифракции имеют одинаковое число колец (8 колец).

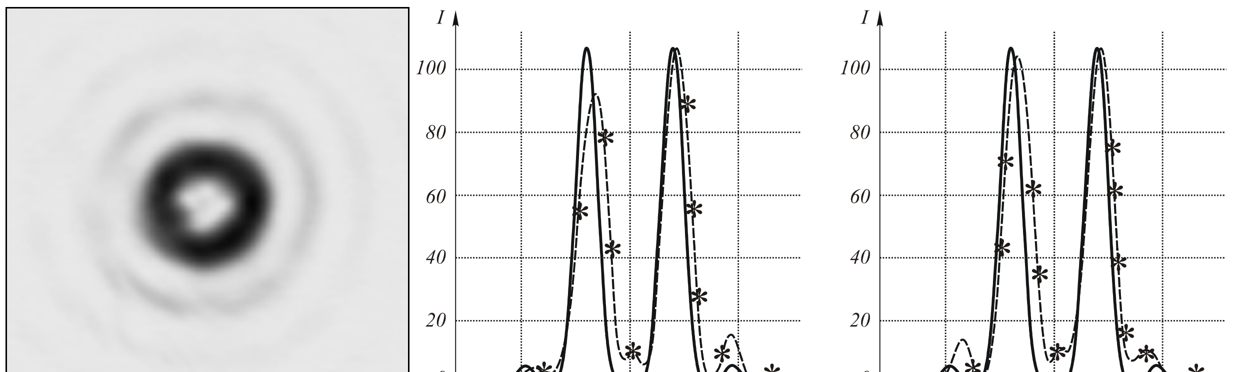
На рис. 4 показан результат регистрации с помощью CCD-камеры картины дифракции Фраунгофера в фокусе линзы ($f$=150 мм), полученной для плоской волны с радиусом 1,25 мм, длиной волны 0,633 мкм и СФП с $n = 3$.

Относительное среднеквадратичное отклонение теоретических и экспериментальных кривых на рис. 4*б*, *в* составило 14,3%.




(а) (б) (в)

*Рис. 3. Профиль поверхности СФП ($n = 3$) (а), картина дифракции Френеля плоской волны с радиусом R=1,25 мм и длиной волны λ=0,633 мкм на расстоянии z=80 мм от СФП: эксперимент (б) и теория (в)*




(а) (б) (в)

*Рис. 4. Картина дифракции Фраунгофера на СФП с номером $n = 3$ плоской волны с радиусом 1,25 мм и длиной волны 0,633 мкм, сформированная в фокальной плоскости Фурье-линзы с фокусным расстоянием 150 мм: распределение интенсивности (негатив) (а), вертикальное (б) и горизонтальное (в) сечения интенсивности (——— теория, --*---*---эксперимент)*

### *Заключение*

Итак, мы получили аналитические выражения, описывающие параксиальную дифракцию ограниченной плоской волны на СФП. С помощью изготовленной с высокой точностью СФП с номером $n$=3 получена экспериментальная картина дифракции Френеля и Фраунгофера. Теория и эксперимент согласуются со средней ошибкой не больше чем 15%.

### *Благодарности*

Авторы выражают благодарность группе профессора Я. Турунена (Университет Йоенсуу, Финляндия) за помощь в изготовлении ДОЭ.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при поддержке грантов Президента РФ МД-209.2003.01 и НШ-1007.2003 (гос. контракт № 02.445. 11.7174), а также грантов РФФИ 05-01-96505 и 05-08-50298.

### *Литература*

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции // М.: Наука, 1983.
2. Berry M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2004. Vol. 6. P. 259-268.
3. Cheong W.G., Lee W.M., Yuan X.-C., Zhang L.-S., Dholakia K., Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation // Appl. Phys. Lett., 2004. Vol. 85. No. 23. P. 5784-5786.
4. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V. The rotor phase filter // J. Mod. Opt., 1992. Vol. 39. No. 5. P. 1147-1154.
5. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Simonen J., Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // J. Mod. Opt., 2004. Vol. 51. No. 14. P. 2167-2184.
6. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A, 2005. Vol. 22. No. 5. P. 849-861.
7. Lee W.M., Ahluwalia , Yuan , Cheong , Dholakia K. Optical steering of high and low index microparticles by manipulating an off-axis optical vortex // J. Opt. A: Pure Appl. Opt., 2005. Vol. 7, P. 1-6.
8. Oemrawsingh S.S.R., van Houwelinger J.A.W., Eliel E.R., Woerdman J.R., Vestegen E.J.K., Kloosterboer , Hooft G.W. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths // Appl. Opt., 2004. Vol. 43. No. 3. P. 688-694.
9. Saks Z.S., Rozes D., Swatzlander G.A. Holographic formation of optical-vortex filaments // J. Opt. Soc. Am. B, 1998. Vol. 15. P. 2226-2234.
10. Sueda K., Miyaji G., Miyanaga N., Nakatsura M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses // Opt. Expr., 2004. Vol. 12. No. 15. P. 3548-3553.
11. Sundbeck S., Gruzberg I., Grier D.G. Structure and scaling of helical modes of light // Opt. Lett., 2005. Vol. 30. No. 5. P. 1-13.
12. Teng S., Liu L., Liu D. Analytical expression of the diffraction of a circular aperture // Optik, 2005. Vol. 116. P. 568-572.

# Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate

*V.V. Kotlyar[1,2], S.N. Khonina[1,2], A.A. Kovalev[1,2], V.A. Soifer[1,2]*
*[1] Image Processing Systems Institute of RAS*
*[1] Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolev*

***Abstract***

Analytical expressions in terms of hypergeometric function are obtained that describe the Fresnel and Fraunhofer diffraction of a plane wave of finite radius by a spiral phase plate (SPP) of any integer order. The experimental diffraction patterns obtained using the SPP made on a resist by direct recording by an electron beam are in good agreement with the estimated intensity distributions.

*Keywords:* hypergeometric function, Fresnel describe, Fraunhofer diffraction, spiral phase plate, SPP

*Citation*: Kotlyar VV, Khonina SN, Kovalev AA, Soifer VA. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate. Computer Optics 2005; 28: 37-40.

***References***

[1] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and series. Volume 2: Special functions. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers; 1998..
[2] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A Pure Appl Opt 2004; 6: 259-268.
[3] Cheong WG, Lee WM, Yuan X-C, Zhang L-S, Dholakia K, Wang H. Direct electron-beam writing of continuous spiral phase plates in negative resist with high power efficiency for optical manipulation. Appl Phys Lett 2004; 85(23): 5784-5786.
[4] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkaryev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The rotor phase filter. J Mod Opt 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
[5] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Jefimos K, Simonen J, Turunen J. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements. J Mod Opt 2004; 51(14): 2167-2184. DOI: 10.1080/09500340408232521.
[6] Koltyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. J Opt Soc Am A 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
[7] Lee WM, Ahluwalia BPS, Yuan X-C, Cheong WC, Dholakia K. Optical steering of high and low index microparticles by manipulating an off-axis optical vortex. J Opt A Pure Appl Opt 2005; 7: 1-6.
[8] Oemrawsingh SSR, van Houwelinger JAW, Eliel ER, Woerdman JR, Vestegen EJK, Kloosterboer JG, Hooft GW. Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths. Appl Opt 2004; 43(3): 688-694.
[9] Saks ZS, Rozes D, Swatzlander GA. Holographic formation of optical-vortex filaments. J Opt Soc Am B 1998; 15: 2226-2234.
[10] Sueda K, Miyaji G, Miyanaga N, Nakatsura M. Laguerre-Gaussian beam generated with a multilevel spiral phase plate for high intensity laser pulses. Opt Expr 2004; 12(15): 3548-3553.
[11] Sundbeck S, Gruzberg I, Grier DG. Structure and scalling of helical modes of light. Opt Lett 2005; 30(5): 1-13.
[12] Teng S, Liu L, Liu D. Analytical expression of the diffraction of a circular aperture. Optik 2005; 116: 568-572.