

# ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

И.В. Алимиков

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

## Аннотация

Получены точные трехмерные решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих в различных приближениях прохождение линейно-поляризованного оптического излучения в нелинейном изотропном диэлектрике. Показано, что найденные трехмерные решения содержат в себе, как частный случай, известные двумерные решения.

## Введение

Многие математические модели физических, технических, биологических задач могут быть описаны с помощью нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее доступными для анализа являются решения в виде уединенных волн, не испытывающих дисперсионного уширения, и сохраняющих свою форму и скорость. Прогресс в изучении нелинейных уравнений в частных производных, достигнутый в последние десятилетия, представляется одним из самых важных и интересных достижений современной науки. Перечень практических приложений нелинейных уравнений и их решений в виде уединенных волн в настоящее время чрезвычайно обширен. Так, например, нелинейное уравнение Шредингера и связанные с ним уравнения описывают многие явления в нелинейной оптике, теории волн на глубокой воде, физике плазмы, физике низких температур, а комплексные уравнения типа Гинзбурга-Ландау находят применение в теории нелинейных волн, описывают на качественном, а иногда и на количественном уровне, такие явления, как фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, сверхтекучесть, конденсацию Бозе-Эйнштейна, жидкие кристаллы, зарождение турбулентности в гидродинамике и так далее. В одном пространственном и одном временном измерениях теория таких уравнений детально разработана. Известны также стационарные решения в двух пространственных измерениях. Большинство реальных систем требуют описания в трех пространственных измерениях, но на сегодняшний день не существует ни одного систематического метода нахождения трехмерных решений.

Единичные точные трехмерные решения некоторых сложных систем получены лишь благодаря изощренным приемам, приводящим к упрощению полевых уравнений, только для данных систем. Для подавляющего большинства реальных моделей приходится изучать общие свойства решений, не решая полевых уравнений.

Объектом исследования в данной статье являются нелинейные уравнения, описывающие комплексное скалярное поле в трехмерном пространстве на примере уравнений нелинейной оптики.

Целью работы является разработка прямого метода нахождения точных аналитических решений некоторых модельных эволюционных уравнений

для комплексного скалярного поля типа нелинейного уравнения Шредингера и волнового уравнения типа Гинзбурга-Ландау, когда естественной постановкой задачи является получение решений в виде модулированной периодической волны.

В данной работе рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие в различных приближениях распространение оптического излучения в нелинейных изотропных средах. Получены точные трехмерные аналитические решения таких уравнений в виде уединенных волн. Для некоторых из рассматриваемых уравнений такие решения известны, однако они зависят всего от двух пространственных переменных, т.е. исходные уравнения, записанные в реальном трехмерном пространстве, редуцируются на пространство меньшей размерности, где разработаны методы решения таких уравнений.

Рассмотрим прохождение вдоль оси  $x$  линейно поляризованного оптического излучения через изотропный диэлектрик. Электрическое поле  $\mathbf{E}$  представим в виде произведения медленно меняющейся функции  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  и быстро осциллирующей функции  $e^{i(k_0 x - \omega t)}$ , где  $k_0$  – модуль волнового вектора  $\mathbf{k}_0$ , направленного вдоль оси  $x$ ,  $\omega$  – циклическая частота, т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i(k_0 x - \omega t)}.$$

Медленная изменяемость функции  $E_0(\mathbf{r}, t)$  означает, что мало ее относительное изменение на интервалах времени  $\sim 1/\omega$  и расстояниях  $\sim 1/k_0$ . Входящие в Фурье-разложение этого поля волновые векторы распределены в небольшом интервале значений вокруг вектора  $\mathbf{k}_0$ , направленного вдоль оси  $x$ .

Для поля  $\mathbf{E}_0 = (0, 0, E_0)$  линейно поляризованного вдоль оси  $z$  получено [1] приближенное уравнение:

$$ik_0 \left( \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla_{y,z}^2 E_0 + \eta(\omega) |E_0|^2 E_0 = 0, (1)$$

где  $\eta(\omega)$  – коэффициент нелинейности,  $u$  – групповая скорость  $1/u = dk_0/d\omega$ , причем принято  $k_0^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon(\omega)$  согласно линейной теории,  $\varepsilon(\omega)$  – линейная проницаемость среды.

Следуя [1], рассмотрим стационарную задачу о пространственном развитии возмущений вдоль направления распространения волны, т.е. рассмотрим уравнение

$$i2k_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} + \nabla_{y,z}^2 E_0 + 2\eta |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (2)$$

Приведем вкратце некоторые известные результаты.

Если считать, что поле  $E$  зависит только от одной поперечной координаты  $y$ , то (2) упрощается:

$$i2k_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 E_0}{\partial y^2} + 2\eta |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения в виде

$$E_0 = F(y)e^{i\gamma x}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – малая поправка к волновому вектору  $k_0$ ,  $F(y)$  – вещественная функция, найдено в [1]:

$$F(y) = \frac{\sqrt{2\gamma k_0 / \eta}}{\text{ch}(\sqrt{2\gamma k_0} y)}.$$

Решение имеет смысл при положительных значениях  $\gamma$ . Тогда (4) принимает вид:

$$E_0 = \frac{\sqrt{2\gamma k_0 / \eta}}{\text{ch}(\sqrt{2\gamma k_0} y)} \exp\{i\gamma x\}. \quad (5)$$

Таким образом, уравнение (3) допускает решение в виде стационарного нерасширяющегося пучка (отвлекаясь от того обстоятельства, что пучок имеет бесконечную ширину в направлении оси  $z$ ). Такое самоканалирование или самофокусировка – специфический нелинейный эффект, возникающий на частоте  $\omega$  первичной волны, проходящей через нелинейную среду. В линейной среде всякий ограниченный по сечению пучок расходится из-за дифракции. В нелинейной же среде дифракция может точно скомпенсироваться фокусирующими свойствами среды. Этот эффект возникает от кубичной нелинейности по полю  $E$ , так как квадратичные члены содержат [1] частоты  $2\omega$  и  $0$ .

Обратим внимание на то, что уравнение (3) является *нелинейным одномерным уравнением Шредингера*, в котором роль времени играет  $x/2k_0$ . Теория нелинейного одномерного уравнения Шредингера детально разработана [2]-[4]. Если записать его в форме [4]

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \beta \varphi |\varphi|^2 = 0, \quad (6)$$

то решение, представляющее собой уединенную волну, имеет вид [4]:

$$\varphi = \frac{a \sqrt{\frac{2}{\beta}} \exp\left\{i \left[ \frac{1}{2} b x - \left( \frac{1}{4} b^2 - a^2 \right) t \right] \right\}}{\text{ch} a(x - bt)}, \quad (7)$$

где  $a$  и  $b$  – произвольные константы.

Осциллирующая часть имеет огибающую

$$1 / \text{ch} a(x - bt).$$

Если в (6) положить

$$\varphi = E_0, t = x/2k_0, x = y, \beta = 2\eta,$$

то получим уравнение (3). Проделав то же с (7), находим:

$$E_0 = \frac{\frac{a}{\sqrt{\eta}} \exp\left\{i \left[ \frac{1}{2} b y - \left( \frac{1}{4} b^2 - a^2 \right) \frac{x}{2k_0} \right] \right\}}{\text{ch} a \left( y - \frac{b x}{2k_0} \right)}. \quad (8)$$

Прямой подстановкой в уравнение (3) легко убедиться, что найденная функция (8) является его решением.

### 1. Точные трехмерные решения исходной математической модели

В этой главе будут найдены точные решения уравнений (1) и (2) в аналитической форме, как функции трех пространственных переменных.

Начнем с более простого уравнения (2):

$$i2k_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} + \nabla_{y,z}^2 E_0 + 2\eta |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (1.1)$$

Его решение ищем в виде

$$E_0 = \varphi(y, z)e^{i\gamma x}, \quad (1.2)$$

где  $\varphi(y, z)$  – вещественная функция,  $\gamma$  – малая поправка к волновому вектору  $k_0$ . Подстановка (1.2) в (1.1) дает

$$\nabla_{y,z}^2 \varphi = 2k_0 \gamma \varphi - 2\eta \varphi^3. \quad (1.3)$$

Будем искать решение уравнения (1.3) в виде сложной функции

$$\varphi = \varphi(u(y, z)),$$

где

$$u(y, z) = \frac{b_y(y - y_0) + b_z(z - z_0)}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}. \quad (1.4)$$

Здесь  $b_y, b_z, y_0, z_0$  – произвольные постоянные.

Подставляя  $\varphi = \varphi(u(y, z))$ , где  $u(y, z)$  определяется формулой (1.4), в (1.3), получим

$$\varphi''(u) = 2k_0 \gamma \varphi(u) - 2\eta \varphi^3(u). \quad (1.5)$$

Перепишем уравнение (1.5) в виде

$$\varphi''(u) = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (1.6)$$

где

$$V(\varphi) = k_0 \gamma \varphi^2 - \eta \varphi^4 / 2 = \varphi^2 (k_0 \gamma - \eta \varphi^2 / 2). \quad (1.7)$$

«Потенциал»  $V(\varphi)$  положителен при  $|\varphi| < \sqrt{2k_0 \gamma / \eta}$  и имеет нули  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \sqrt{2k_0 \gamma / \eta}$ ,  $\varphi_3 = -\sqrt{2k_0 \gamma / \eta}$ , поэтому [5] граничными условиями для уравнения (1.3) примем

$\varphi(y, z) = \varphi_i, i = 1, 2, 3; \partial\varphi/\partial y = \partial\varphi/\partial z = 0$   
при  $|y|=\infty, |z|=\infty$ .

Так как

$$\partial\varphi/\partial y = \varphi'(u)a/\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\partial\varphi/\partial z = \varphi'(u)b/\sqrt{a^2 + b^2},$$

то из граничных условий следует, что  $\varphi'(u) = 0$  при  $|u|=\infty$ .

Умножим (1.6) на  $\varphi'(u)$  и проинтегрируем. Получим

$$\frac{\varphi'^2(u)}{2} = V(\varphi) + C.$$

Из граничных условий следует, что  $C=0$ .

Интегрируя еще раз, находим

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}} = u,$$

или с учетом (1.4) и (1.7)

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{2k_0\gamma - \eta\varphi^2}} = \frac{b_y(y - y_0) + b_z(z - z_0)}{\sqrt{b_y^2 + b_z^2}}.$$

Вычисляя интеграл [6] и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi(y, z) = \frac{\sqrt{2k_0\gamma/\eta}}{ch\left[\sqrt{2k_0\gamma}\left(b_y(y - y_0) + b_z(z - z_0)\right)/\sqrt{b_y^2 + b_z^2}\right]}.$$

В силу симметрии уравнений (1.3) и (1.5) относительно преобразования  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ , решением будет также  $\varphi_a = -\varphi$ . Очевидно, что

$$|\varphi| \leq \sqrt{2k_0\gamma/\eta}.$$

Итак, окончательно решение (1.2) имеет вид:

$$E_0(x, y, z) = \frac{\pm\sqrt{2k_0\gamma/\eta} \exp\{i\gamma x\}}{ch\left[\sqrt{\frac{2k_0\gamma}{b_y^2 + b_z^2}}\left(b_y(y - y_0) + b_z(z - z_0)\right)\right]}. \quad (1.8)$$

Полагая здесь  $b_z=0, y_0=0$ , получим известное решение (5), модуль которого зависит только от одной поперечной координаты  $y$ .

В решении (1.8), как и в (5), учтена только продольная поправка  $\gamma$  к волновому вектору  $\mathbf{k}_0$ . Решение, учитывающее поперечные поправки  $q_y$  и  $q_z$ , запишем в виде:

$$E_0 = \varphi(y, z) \exp\{i(\gamma x + q_y y + q_z z)\}, \quad (1.9)$$

где  $\varphi(y, z)$  – вещественная функция.

Подстановка (1.9) в (1.1) дает

$$-2k_0\gamma\varphi + \nabla_{y,z}^2\varphi + i2\left(q_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - (q_y^2 + q_z^2)\varphi + 2\eta\varphi^3 = 0.$$

Приравнивая к нулю мнимую и вещественную части этого уравнения, получим:

$$q_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad (1.10)$$

$$\nabla_{y,z}^2\varphi = (2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)\varphi - 2\eta\varphi^3. \quad (1.11)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) совместны, так как (1.10) является линейным однородным уравнением первого порядка, теория которых хорошо разработана [7]. Как известно из теории таких уравнений, решением уравнения (1.10) является любая дифференцируемая функция  $\varphi = \varphi(s(y, z))$ , где  $s(y, z)$  – полный интеграл уравнения

$$q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (1.12)$$

Для нахождения полного интеграла этого уравнения применим метод уравнений характеристик (метод Коши) [7]:

$$\frac{dy}{q_y} = \frac{dz}{q_z} \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{q_z}{q_y}.$$

Решение последнего уравнения при начальном условии  $z(y_0) = z_0$  имеет вид:

$$z = \frac{q_z}{q_y}(y - y_0) + z_0.$$

Выражаем отсюда  $z_0 = \psi(y, y_0, z)$ :

$$z_0 = z - \frac{q_z}{q_y}(y - y_0).$$

Искомый полный интеграл имеет вид:

$$s(y, z) = b\psi(y, y_0, z) + b_0$$

или

$$s(y, z) = b\left(z - (y - y_0)q_z/q_y\right) + b_0,$$

где  $b$  и  $b_0$  – произвольные постоянные.

Аддитивную произвольную постоянную  $b_0$  выберем в виде  $b_0 = -bz_0$ . Тогда

$$s(y, z) = b\left(z - z_0 - (y - y_0)q_z/q_y\right),$$

или, приводя к общему знаменателю и обозначая  $b/q_y = c$ , окончательно находим

$$s(y, z) = c\left[q_y(z - z_0) - q_z(y - y_0)\right]. \quad (1.13)$$

Прямой подстановкой (1.13) в (1.12) легко убедиться, что (1.13) является решением уравнения (1.12).

Теперь подставим  $\varphi = \varphi(s(y, z))$ , где  $s(y, z)$  выражается формулой (1.13), в уравнение (1.11)

$$\begin{aligned} \varphi''(s)c^2(q_y^2 + q_z^2) = \\ = (2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Положим

$$c = \frac{1}{\sqrt{q_y^2 + q_z^2}},$$

тогда (1.13) и (1.14) примут вид:

$$s(y, z) = \frac{q_y(z - z_0) - q_z(y - y_0)}{\sqrt{q_y^2 + q_z^2}}, \quad (1.15)$$

$$\varphi''(s) = (2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \quad (1.16)$$

Перепишем (1.16) в виде:

$$\varphi''(s) = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (1.17)$$

где

$$V(\varphi) = (2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)\varphi^2/2 - \eta\varphi^4/2.$$

Для краткости введем обозначение

$$a^2 = 2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2. \quad (1.18)$$

Тогда

$$V(\varphi) = (a^2 - \eta\varphi^2)\varphi^2/2. \quad (1.19)$$

«Потенциал»  $V(\varphi)$  положителен при  $|\varphi| < a/\sqrt{\eta}$  и имеет нули  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = a/\sqrt{\eta}$ ,  $\varphi_3 = -a/\sqrt{\eta}$ , поэтому граничными условиями для (1.11) примем

$$\varphi(y, z) = \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \partial\varphi/\partial y = \partial\varphi/\partial z = 0$$

при  $|y| = \infty$ ,  $|z| = \infty$ .

Умножим (1.17) на  $\varphi'(s)$  и проинтегрируем, получим:

$$\varphi'^2/2 = V(\varphi) + C.$$

Из граничных условий следует, что  $C=0$ .

Интегрируя еще раз, находим

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}} = s,$$

или с учетом (1.19)

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{a^2 - \eta\varphi^2}} = s.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch} as}. \quad (1.20)$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что (1.20) является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\varphi''(s) = a^2\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \quad (1.21)$$

В силу симметрии уравнений (1.11) и (1.21) относительно преобразования  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ , решением будет также  $\varphi_a = -\varphi$ .

Итак, с учетом (1.15) и (1.18) решение (1.9) принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned} E_0 = \\ = \frac{\pm\sqrt{(2k_0\gamma + q_y^2 + q_z^2)/\eta} \exp\{i(\gamma x + q_y y + q_z z)\}}{\operatorname{ch}\left\{\left[q_y(z - z_0) - q_z(y - y_0)\right] \sqrt{\frac{2k_0\gamma + q_y y + q_z z}{(q_y^2 + q_z^2)}}\right\}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Отметим тот факт, что решение в форме (1.22) не содержит в себе решения (1.8), имеющего две произвольные постоянные  $b_y$  и  $b_z$ .

Найдем теперь решение, в котором  $|E_0|$  зависит от всех трех пространственных координат, т.е.

$$E_0 = f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (1.23)$$

Подставляя (1.23) в (1.1) и приравнявая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, имеем

$$k_0 \frac{\partial f}{\partial x} + q_y \frac{\partial f}{\partial y} + q_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (1.24)$$

$$\nabla_{y,z}^2 f = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f - 2\eta f^3. \quad (1.25)$$

Так как ось  $x$  является направлением распространения волны, то запишем (1.24) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q_y}{k_0} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{q_z}{k_0} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Это линейное однородное уравнение первого порядка имеет своим решением любую дифференцируемую функцию  $f = f(s(\mathbf{r}))$ , где  $s(\mathbf{r})$  – полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{q_y}{k_0} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_z}{k_0} \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (1.26)$$

Его уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{q_y/k_0} = \frac{dz}{q_z/k_0} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{q_y}{k_0}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{q_z}{k_0}.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях  $y(x_0) = y_0$ ,  $z(x_0) = z_0$  имеет решения

$$y = \frac{q_y}{k_0}(x - x_0) + y_0; \quad z = \frac{q_z}{k_0}(x - x_0) + z_0,$$

откуда

$$y_0 = y - \frac{q_y}{k_0}(x - x_0); \quad z_0 = z - \frac{q_z}{k_0}(x - x_0).$$

Полный интеграл уравнения (1.26)

$$s(\mathbf{r}) = b_y y_0 + b_z z_0 + b_0$$

или

$$s(\mathbf{r}) = b_y \left( y - \frac{q_y}{k_0} (x - x_0) \right) + b_z \left( z - \frac{q_z}{k_0} (x - x_0) \right) + b_0,$$

где  $b_y, b_z, b_0$  – произвольные постоянные.

Положим  $b_0 = -b_y y_0 - b_z z_0$ . Тогда

$$s(\mathbf{r}) = b_y \left( y - y_0 - \frac{q_y}{k_0} (x - x_0) \right) + b_z \left( z - z_0 - \frac{q_z}{k_0} (x - x_0) \right)$$

или

$$s(\mathbf{r}) = \frac{b_y \left( y - y_0 - \frac{q_y}{k_0} (x - x_0) \right)}{B} + \frac{b_z \left( z - z_0 - \frac{q_z}{k_0} (x - x_0) \right)}{B}, \quad (1.27)$$

где, в силу линейности уравнения (1.26), постоянная  $B$  введена для удобства.

Подставляя  $f = f(s)$ , где  $s(\mathbf{r})$  определяется формулой (1.27) в (1.25), находим

$$f''(s) (b_y^2 + b_z^2) / B^2 = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Выберем  $B = \sqrt{b_y^2 + b_z^2}$ , тогда

$$f''(s) = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Вводя обозначение

$$a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2},$$

последнее уравнение приводим к виду

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s),$$

совпадающему с (1.21) и, следовательно, имеющему решение, согласно (1.20)

$$f(\mathbf{r}) = \frac{a}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch} a s(\mathbf{r})},$$

где из (1.27)

$$s(\mathbf{r}) = \frac{b_y [k_0 (y - y_0) - q_y (x - x_0)]}{k_0 \sqrt{b_y^2 + b_z^2}} + \frac{b_z [k_0 (z - z_0) - q_z (x - x_0)]}{k_0 \sqrt{b_y^2 + b_z^2}}.$$

В силу симметрии (1.25) относительно преобразования  $f \leftrightarrow -f$ , решением будет также  $f_a = -f$ .

Окончательно решение (1.23) принимает вид:

$$E_0 = \frac{\pm \sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) / \eta} \exp\{i \mathbf{q} \mathbf{r}\}}{\operatorname{ch} \left\{ s(\mathbf{r}) \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2} \right\}}. \quad (1.28)$$

Заметим, что решение (1.28) содержит в себе решение (1.8). Если в (1.28) положить  $q_y = q_z = 0$ , а  $q_x = \gamma$ , то получим (1.8). Покажем, что (1.28) содержит и известное решение (8). Полагая в (1.28)  $b_z = 0, y_0 = x_0 = 0, q_z = 0$ , имеем

$$E_0 = \frac{\sqrt{2k_0 q_x + q_y^2} \exp\{i(q_x x + q_y y)\}}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch} \left[ \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2} \left( u - \frac{q_y x}{k_0} \right) \right]}.$$

Введем обозначение  $a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2}$ , откуда  $q_x = (a^2 - q_y^2) / 2k_0$ . Тогда

$$E_0 = \frac{a \exp\left\{ i \left[ (a^2 - q_y^2) \frac{x}{2k_0} + q_y y \right] \right\}}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch} a \left( y - \frac{q_y x}{k_0} \right)}.$$

Полагая здесь  $q_y = b/2$ , получим (8).

Итак, для уравнения (1.1) мы нашли три точных решения, выражающихся формулами (1.8), (1.22) и (1.28), причем, при переходе к нижшим размерностям (1.28) трансформируется в известные решения (5) и (8).

Представляет также интерес особый интеграл [7] уравнения (1.26), имеющий вид

$$s(\mathbf{r}) \sqrt{\left( y - y_0 - \frac{q_y}{k_0} (x - x_0) \right)^2 + \left( z - z_0 - \frac{q_z}{k_0} (x - x_0) \right)^2}$$

нелинейной функции от пространственных переменных.

Подстановка  $f = f(s)$  в (1.25) дает:

$$f''(s) + \frac{f'(s)}{s} = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s).$$

Точные аналитические решения этого обыкновенного дифференциального уравнения автору неизвестны, однако легко найти приближенное решение при больших значениях  $s$ , выраженных в единицах длин волн. Тогда вторым слагаемым в левой части последнего уравнения можно пренебречь, и мы получим уже известное уравнение:

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s),$$

имеющее решение  $f(s(r)) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{\operatorname{ch} a s(\mathbf{r})}$  с нелинейной

функцией  $s(\mathbf{r})$ .

Займемся теперь нестационарным решением уравнения (1):

$$ik_0 \left( \frac{\partial E_0}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla_{yz}^2 E_0 + \quad (1.29)$$

$$+ \eta(\omega) |E_0|^2 E_0 = 0,$$

Функцию  $E_0(r, t)$  будем искать в виде

$$E_0(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (1.30)$$

где  $f(\mathbf{r}, t)$  – вещественная функция,  $\mathbf{q}$  – малая поправка к волновому вектору  $\mathbf{k}_0$ . Подстановка (1.30) в (1.29) дает:

$$i2k_0 \left( \frac{\partial f}{\partial x} + iq_x f + \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \nabla_{yz}^2 f + \\ + i2 \left( q_y \frac{\partial f}{\partial y} + q_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - (q_y^2 + q_z^2) f + 2\eta f^3 = 0.$$

Приравнявая к нулю мнимую и вещественную части этого уравнения, получим

$$k_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{k_0}{u} \frac{\partial f}{\partial t} + q_y \frac{\partial f}{\partial y} + q_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla_{yz}^2 f - 2k_0 q_x f - (q_y^2 + q_z^2) f + 2\eta f^3 = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{uq_y}{k_0} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{uq_z}{k_0} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (1.31)$$

$$\nabla_{yz}^2 f = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f - 2\eta f^3. \quad (1.32)$$

Положим в (1.31)  $f = f(s(\mathbf{r}, t))$ . Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'(s) \frac{\partial s}{\partial t}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'(s) \frac{\partial s}{\partial x_i},$$

то, подставляя это в (1.31) и сокращая на  $f'(s)$ , находим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{uq_y}{k_0} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{uq_z}{k_0} \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (1.33)$$

Записываем уравнения характеристик для (1.33):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{uq_y/k_0} = \frac{dz}{uq_z/k_0},$$

или

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{uq_y}{k_0}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{uq_z}{k_0}.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$  элементарно интегрируется:

$$x = ut + x_0; \quad y = \frac{uq_y}{k_0} t + y_0; \quad z = \frac{uq_z}{k_0} t + z_0.$$

Выражаем отсюда начальные координаты

$$x_0 = x - ut; \quad y_0 = y - \frac{uq_y}{k_0} t; \quad z_0 = z - \frac{uq_z}{k_0} t. \quad (1.34)$$

Согласно методу Коши полный интеграл уравнения (1.33) имеет вид

$$s(\mathbf{r}, t) = b_x x_0 + b_y y_0 + b_z z_0 + b_0,$$

где  $b_x, b_y, b_z$  – произвольные постоянные,  $b_0$  – аддитивная произвольная постоянная, а  $x_0, y_0$  и  $z_0$  выражаются формулой (1.34), т.е.

$$s(\mathbf{r}, t) = b_x (x - ut) + b_y \left( y - \frac{uq_y}{k_0} t \right) + b_z \left( z - \frac{uq_z}{k_0} t \right) + b_0.$$

Аддитивную постоянную  $b_0$  выберем в виде  $b_0 = -b_x x_0 - b_y y_0 - b_z z_0$ .

Тогда

$$s(\mathbf{r}, t) = b_x (x - x_0 - ut) + \\ + b_y \left( y - y_0 - \frac{uq_y}{k_0} t \right) + b_z \left( z - z_0 - \frac{uq_z}{k_0} t \right),$$

что можно записать в векторной форме

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t), \quad (1.35)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_\perp$  – вектор скорости с проекциями

$$\mathbf{v} = (u; uq_y/k_0; uq_z/k_0). \quad (1.36)$$

В силу линейности уравнения (1.33), его решение (1.35) можно умножить на любой числовой множитель  $1/A$ , что сделано для дальнейшего удобства. Итак, окончательно полный интеграл уравнения (1.33) имеет вид:

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t) / A. \quad (1.37)$$

Решим теперь уравнение (1.32).

Подставляем  $f = f(s)$ , где  $s$  – определяется формулой (1.37), в уравнение (1.32). Так как

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(s) b_y^2 / A^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''(s) b_z^2 / A^2,$$

то из (1.32) получим

$$f''(s) (b_y^2 + b_z^2) / A^2 = \\ = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (1.38)$$

Выберем  $A = \sqrt{b_y^2 + b_z^2}$ . Тогда (1.37) и (1.38) принимают вид

$$s = \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t) / \sqrt{b_y^2 + b_z^2}, \quad (1.39)$$

$$f''(s) = (2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (1.40)$$

Введем, как и ранее, обозначение  $a = \sqrt{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}$ . Тогда (1.40) принимает вид:  $f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s)$ , совпадающий с уравнением (1.21), и, согласно (1.20), имеет решение:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch}(as(\mathbf{r}, t))},$$

где  $s(\mathbf{r}, t)$  выражается формулой (1.39). В силу симметрии уравнений (1.32) и (1.40) относительно преобразования  $f \leftrightarrow -f$ , решением будет также  $f_a = -f$ .

Окончательно решение (1.30) имеет вид:

$$E_0(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm \sqrt{(2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2) / \eta} \exp\{i\mathbf{q}\mathbf{r}\}}{ch \left[ \sqrt{\frac{2k_0 q_x + q_y^2 + q_z^2}{b_y^2 + b_z^2}} \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t) \right]}.$$

## 2. Математическая модель нелинейного волнового уравнения

Уравнение (1) выведено в [1] при предположениях, что  $\partial^2 E_0 / \partial x^2$  много меньше поперечных производных, а также, что можно воспользоваться приближенной формулой

$$\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \approx -\omega^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{E} - i \frac{d(\omega^2 \varepsilon(\omega))}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{-i\omega t}.$$

В этом разделе мы откажемся от этих предположений и выведем нелинейное волновое уравнение.

Рассмотрим прохождение интенсивного лазерного луча с частотой  $\omega$  через прозрачный однородный изотропный диэлектрик с плавным распределением центрально-симметричных атомов с плотностью  $n$  атомов на кубический сантиметр.

Будем исходить из уравнений Максвелла, исключив из них магнитное поле [1]:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Подставив сюда  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации, получим:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{E} + 4\pi \text{div } \mathbf{P} = 0. \quad (2.2)$$

Поляризацию  $\mathbf{P}$  представим в виде [3]:

$$\mathbf{P} = \alpha_1 n \mathbf{E} + \alpha_3 n |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha_1(\omega)$  – линейная, а  $\alpha_3(\omega)$  – нелинейная поляризуемость.

Подстановка (2.3) в (2.1) и (2.2) даёт

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\alpha}{c^2} \text{div } \mathbf{E} + 2\gamma \text{div } |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\alpha = 1 + 4\pi n \alpha_1$ ;  $\gamma = 2\pi n \alpha_3 / c^2$ . Для слабонелинейных диэлектриков  $\gamma$  – малая величина.

Воспользовавшись формулой

$$\text{div } f \mathbf{a} = \mathbf{a} \text{grad } f + f \text{div } \mathbf{a},$$

перепишем (2.5) в виде

$$\left( \frac{\alpha}{c^2} + 2\gamma |\mathbf{E}|^2 \right) \text{div } \mathbf{E} + 2\gamma \mathbf{E} \text{grad } |\mathbf{E}|^2 = 0. \quad (2.6)$$

Пусть луч распространяется вдоль оси  $x$ . Поле  $\mathbf{E}$  будем искать в виде произведения быстро осциллирующей функции  $e^{i(k_0 x - \omega t)}$  и медленно меняющейся функции  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$ , т.е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) e^{i(k_0 x - \omega t)}.$$

Тогда в (2.6) последним слагаемым можно пренебречь, так как  $2\gamma \mathbf{E} \text{grad } |\mathbf{E}|^2 = 2\gamma \mathbf{E} \text{grad } |\mathbf{E}_0|^2$  является малой величиной за счёт производных от медленно меняющейся функции  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  и дополнительно мала в силу малости коэффициента нелинейности  $\gamma$ . Следовательно, из (2.6) имеем  $\text{div } \mathbf{E} \approx 0$ , т.е. поле остается поперечным, как в линейной теории. Далее

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \approx -\nabla^2 \mathbf{E},$$

$$\begin{aligned} 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) &= 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{E}_0 e^{i(k_0 x - \omega t)}) \approx \\ &\approx -2\gamma \omega^2 |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{E}_0 e^{i(k_0 x - \omega t)} = -2\gamma \omega^2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Тогда (2.4) примет вид:

$$\frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} - 2\eta |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.7)$$

где  $\eta = \gamma \omega^2$ .

Пусть поле  $\mathbf{E}$  поляризовано вдоль оси  $z$ , т.е.  $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ . Тогда, подставляя  $E = E_0(\mathbf{r}, t) e^{i(k_0 x - \omega t)}$  в уравнение

$$\frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E - 2\eta |E|^2 E = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - \nabla^2 E_0 + \left( k_0^2 - \frac{\alpha \omega^2}{c^2} \right) E_0 - \\ - 2\eta |E_0|^2 E_0 - i2 \left( \frac{\alpha \omega}{c^2} \frac{\partial E_0}{\partial t} + k_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Функцию  $E_0(\mathbf{r}, t)$  ищем в виде

$$E_0(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (2.9)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  – вещественная функция,  $\mathbf{q}$  – малая поправка к волновому вектору  $\mathbf{k}_0 = (k_0, 0, 0)$ . Подставляя (2.9) в (2.8) и приравнявая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{c^2 k_0}{\alpha \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{c^2}{\alpha \omega} (\mathbf{q} \nabla \varphi) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + \left( k_0^2 + q^2 + 2k_0 q_x - \frac{\alpha \omega^2}{c^2} \right) \varphi - 2\eta \varphi^3 = 0. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.10) и (2.11) совместны, так как (2.10) является линейным однородным уравнением первого порядка. Как известно из теории таких уравнений [7], решением уравнения (2.10) является любая дважды дифференцируемая функция  $\varphi = \varphi(s)$ , где  $s(\mathbf{r}, t)$  – полный интеграл уравнения (2.10), если в нем  $\varphi$  заменить на  $s$ .

Раскрывая скалярное произведение  $(\mathbf{q} \nabla \varphi)$ , перепишем (2.10) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left( \frac{c^2 k_0}{\alpha \omega} + \frac{c^2 q_x}{\alpha \omega} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{c^2 q_y}{\alpha \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{c^2 q_z}{\alpha \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Заметим, что каждый множитель перед  $\partial \varphi / \partial x_i$  имеет размерность скорости, и примем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k_0}{\alpha \omega} &= u_0, & \frac{c^2 q_x}{\alpha \omega} &= \delta u_x, \\ \frac{c^2 q_y}{\alpha \omega} &= \delta u_y, & \frac{c^2 q_z}{\alpha \omega} &= \delta u_z \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда (2.12) можно записать в векторной форме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla \varphi) = 0, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}$ , с проекциями на оси координат

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= (u_0, 0, 0), & \delta \mathbf{u} &= (\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z), \\ \mathbf{u} &= (u_0 + \delta u_x, \delta u_y, \delta u_z) \end{aligned}$$

Положим  $\varphi = \varphi(s)$ .

Поскольку  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'(s) \frac{\partial s}{\partial t}$ ,  $\nabla \varphi = \varphi'(s) \nabla s$ , то, подставляя это в (2.14) и сокращая на  $\varphi'(s)$ , находим:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla s) = 0,$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_x \frac{\partial s}{\partial x} + u_y \frac{\partial s}{\partial y} + u_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (2.15)$$

Запишем уравнения характеристик [7] для (2.15):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений элементарно интегрируется при начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ :

$$x = u_x t + x_0, \quad y = u_y t + y_0, \quad z = u_z t + z_0.$$

Выражаем отсюда начальные координаты:

$$x_0 = x - u_x t; \quad y_0 = y - u_y t; \quad z_0 = z - u_z t.$$

Согласно методу Коши [7] полный интеграл уравнения (2.15) имеет вид:

$$s = b_x x_0 + b_y y_0 + b_z z_0 + b_0,$$

где  $b_x, b_y, b_z$  – произвольные постоянные,  $b_0$  – аддитивная произвольная постоянная, т.е.

$$s = b_x (x - u_x t) + b_y (y - u_y t) + b_z (z - u_z t) + b_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную  $b_0$  выберем в виде

$$b_0 = -b_x x_0 - b_y y_0 - b_z z_0,$$

тогда

$$\begin{aligned} s &= b_x (x - x_0 - u_x t) + \\ &+ b_y (y - y_0 - u_y t) + b_z (z - z_0 - u_z t), \end{aligned}$$

что можно записать в векторной форме:

$$s = \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u}t). \quad (2.16)$$

В том, что (2.16) является решением уравнения (2.15) легко убедиться прямой подстановкой.

В силу линейности уравнения (2.15) его решение (2.16) можно умножить на любой числовой множитель  $1/A$ , что сделано для дальнейшего удобства. Итак, окончательно

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u}t) / A. \quad (2.17)$$

Займемся теперь решением уравнения (2.11).

Подставляя в уравнение (2.11)  $\varphi = \varphi(s)$ , где  $s$  определяется формулой (2.17), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \varphi''(s) \frac{(\mathbf{b}\mathbf{u})^2}{A^2}; \\ \nabla^2 \varphi &= \varphi''(s) \frac{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}{A^2} = \varphi''(s) \frac{b^2}{A^2}; \end{aligned}$$

тогда (2.11) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi''(s)}{A^2} \left[ \frac{\alpha}{c^2} (\mathbf{b}\mathbf{u})^2 - b^2 \right] + \\ + a^2 \varphi(s) - 2\eta \varphi^3(s) = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где принято обозначение

$$a^2 = k_0^2 + q^2 + 2k_0 q_x - \alpha \omega^2 / c^2. \quad (2.19)$$

Положим  $A = \sqrt{b^2 c^2 - \alpha (\mathbf{b}\mathbf{u})^2} / c$ . Тогда (2.17) и (2.18) примут вид:

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{c}\mathbf{b}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{u}t)}{\sqrt{b^2 c^2 - \alpha (\mathbf{b}\mathbf{u})^2}}, \quad (2.20)$$

$$\varphi''(s) = a^2 \varphi(s) - 2\eta \varphi^3(s), \quad (2.21)$$

или

$$\varphi'' = \partial V(\varphi) / \partial \varphi,$$

где

$$V(\varphi) = a^2 \varphi^2 / 2 - \eta \varphi^4 / 2 = (a^2 - \eta \varphi^2) \varphi^2 / 2.$$

Нулями функции  $V(\varphi)$  являются  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = a/\sqrt{\eta}$  и  $\varphi_3 = -a/\sqrt{\eta}$ , поэтому граничными условиями для (2.11) примем:

$$\varphi = \varphi_i, \quad i=1,2,3; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ .

Уравнение (2.21) элементарно интегрируется. Умножив его на  $\varphi'(s)$  и проинтегрировав, получим

$$\varphi'^2 / 2 = a^2 \varphi^2 / 2 - \eta \varphi^4 / 2 + C_1.$$

Из принятых граничных условий следует, что  $C_1 = 0$ . Тогда

$$\partial \varphi / \partial s = \varphi \sqrt{a^2 - \eta \varphi^2},$$

откуда

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi \sqrt{a^2 - \eta \varphi^2}} = s.$$

Выполняя интегрирование и обращая полученное выражение, находим

$$\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}, t)) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{ch(as(\mathbf{r}, t))}, \quad (2.22)$$

где  $a$  и  $s(\mathbf{r}, t)$  определяются формулами (2.19) и (2.20).

С учетом (2.20) приходим к выводу, что найденное решение (2.22) является гладкой функцией, локализованной вдоль направления  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t$  и его центр движется с постоянной скоростью  $\mathbf{u}$ .

В силу симметрии уравнения (2.18) относительно преобразования  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ , решением будет также  $\varphi_a = -\varphi$ .

Таким образом, огибающая, имеющая форму гиперболического секанса, модулирует монохроматическую несущую волну в последовательность sech-импульсов, каждый из которых отклонен от оси  $x$  на угол

$$\beta^i = \text{arctg} \frac{\sqrt{(\delta u_y^i)^2 + (\delta u_z^i)^2}}{u_0 + \delta u_x^i} \approx \text{arctg} \frac{\sqrt{(q_y^i)^2 + (q_z^i)^2}}{k_0}.$$

Средняя скорость импульсов  $\langle \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}_0 = \frac{c^2 \mathbf{k}_0}{\alpha \omega}$

направлена вдоль оси  $x$ .

Установим дисперсионное соотношение. Полный волновой вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$  имеет проекции  $(k_0 + q_x, q_y, q_z)$  и равенство (2.19) записывается в виде

$$a^2 = (k_0 + q_x)^2 + q_y^2 + q_z^2 - \alpha \omega^2 / c^2$$

или

$$a^2 = k^2 - \alpha \omega^2 / c^2. \quad (2.23)$$

С другой стороны, из (2.22) следует, что  $|\mathbf{E}_0|_{\max} = a/\sqrt{\eta}$ . Отсюда  $a = \sqrt{\eta} |\mathbf{E}_0|_{\max}$  и из (2.23) находим

$$k^2 = \frac{\alpha \omega^2}{c^2} + \eta |\mathbf{E}_0|_{\max}^2,$$

что и является дисперсионным соотношением.

Установим область значений волнового вектора  $k$ , где среда обладает фокусирующими свойствами.

Во-первых, из (2.23) имеем:

$$a^2 = \frac{k^2 c^2 - \alpha \omega^2}{c^2} > 0,$$

откуда

$$kc > \sqrt{\alpha \omega}. \quad (2.24)$$

Во-вторых, скорость движения огибающей  $\mathbf{u}$  должна быть меньше скорости света в вакууме:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u} = \frac{c^2 \mathbf{k}_0}{\alpha \omega} + \frac{c^2 \mathbf{q}}{\alpha \omega} = \frac{c^2}{\alpha \omega} (\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}) = \frac{c^2 \mathbf{k}}{\alpha \omega},$$

следовательно,  $c^2 k / \alpha \omega < c$ , откуда:

$$kc < \alpha \omega. \quad (2.25)$$

Объединяя (2.24) и (2.25), имеем:

$$\sqrt{\alpha \omega} / c < k < \alpha \omega / c.$$

Это и есть дозволённая область значений волнового вектора.

Функция  $s(\mathbf{r}, t)$  из (2.20) должна быть вещественной. Следовательно,  $b^2 c^2 - \alpha (\mathbf{b} \mathbf{u})^2 > 0$  или  $b^2 c^2 - \alpha b^2 u^2 \cos^2(\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}) > 0$ . Учитывая, что

$$u = c^2 k / \alpha \omega, \quad \text{отсюда имеем } kc < \sqrt{\alpha \omega} / |\cos(\mathbf{b} \wedge \mathbf{u})|.$$

Разрешая это неравенство совместно с (2.25) находим  $|\cos(\mathbf{b} \wedge \mathbf{u})| \leq 1/\sqrt{\alpha}$ , что можно записать в виде  $|\mathbf{b} \mathbf{u}| / bu \leq 1/\sqrt{\alpha}$ , или  $|\mathbf{b} \mathbf{k}| / bk \leq 1/\sqrt{\alpha}$ .

Последнее неравенство налагает ограничение на произвольные постоянные  $b_x, b_y, b_z$ .

### Заключение

Разработан прямой метод решения модельных эволюционных уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и волнового уравнения типа Гинзбурга-Ландау на примере уравнений нелинейной оптики.

Найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера в виде гладких стационарных и нестационарных функций, содержащих полные интегралы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка.

Из уравнений Максвелла выведено нелинейное волновое уравнение типа Гинзбурга-Ландау, описывающее распространение оптического излучения в нелинейном однородном изотропном диэлектрике, и найдены его точные аналитические решения для стационарного и нестационарного случаев.

Показано, что использование особого интеграла линейного однородного уравнения в частных произ-

водных первого порядка приводит к неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, для которого найдены асимптотические и численные решения.

Огибающие всех найденных решений имеют форму гиперболического секанса, аргументом которого являются различные функции, порой достаточно громоздкие.

#### ***Благодарности***

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, правительства Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE, REC N 14).

#### ***Литература***

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред // М.: «Наука», 1982.
2. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов // М.: Наука, 1986.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения // М.: Мир, 1988.
4. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике // М.: Мир, 1989.
5. Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля // М.: «Мир», 1985.
6. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы // М.: Наука, 1977.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений // М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.

# Exactly solvable mathematical models in nonlinear optics

*I.V. Alimenkov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolev*

## **Abstract**

Exact three-dimensional solutions of nonlinear differential equations are obtained that describe the propagation of linearly polarized optical radiation in a nonlinear isotropic dielectric in various approximations. It is shown that the obtained three-dimensional solutions contain the known two-dimensional solutions, as a special case.

Keywords: nonlinear optics, mathematical model, differential equations, isotropic dielectric.

Citation: Alimenkov IV. Exactly solvable mathematical models in nonlinear optics. *Computer Optics* 2005; 28: 45-54.

## **References**

- [1] Landau LD, Lifshitz EM. *Electrodynamics of continuous media*. 2<sup>nd</sup> ed. Oxford: Pergamon Press Ltd; 1984.
- [2] Takhtadzhyan LA, Faddeev LD. *The Hamiltonian method in the theory of solitons* [In Russian]. Moscow: Nauka Publisher, 1986.
- [3] Dodd RK, Morris HC, Eilbeck JC, Gibbon JD. *Soliton and nonlinear wave equations*. London, New York: Academic Press Inc; 1982.
- [4] Newell AC. *Solitons in mathematics and physics*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1985.
- [5] Rajaraman R. *Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory*. New York: Elsevier Science BV; 1982.
- [6] Dwight GB. *Tables of integrals and other mathematical data*. 4<sup>th</sup> ed. The Macmillan Company; 1961.
- [7] Stepanov VV. *Course of differential equations*. Moscow: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature; 1953.